This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

LSoc 3061.25

Harvard College Library

FROM

Transferred from the
Astronomical Observatory

17 May, 1900

reeks. D. 1 7, 8

8 70-71

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

DERDE REEKS.

ZEVENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1890.

LSoc3061.25

Harvard College Library
May 17, 1900
Transferred from the
Astronomical Observatory.

3/16
96

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZEVENDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

Vergadering gehouden	26	October	1889	. . . . .	blz.	1.
" "	30	November	"	. . . . .	"	64.
" "	28	December	"	. . . . .	"	109.
" "	25	Januari	1890	. . . . .	"	165.
" "	22	Februari	"	. . . . .	"	229.
" "	29	Maart	"	. . . . .	"	303.

VERSLAGEN.

Rapport over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN: „Anthropologische Studien aus Insulinde"; uitgebracht in de vergadering van 26 October 1889. . . . . blz. 5.

Rapport over eene verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER te Utrecht: „Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes, in verband met de isotonische coëfficienten"; uitgebracht in de vergadering van 26 October 1889. . . „ 13.

Rapport over eene verhandeling van Dr. JAN DE VRIES: „Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen"; uitgebracht in de vergadering van 30 November 1889. . . . . „ 71.

Verslag omtrent de verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER: „Kenmerkende getallen der algebraïsche ruimtekromme"; uitgebracht in de vergadering van 28 December 1889. . „ 117.

Verslag over eene verhandeling van Dr. JAN DE VRIES: „Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie (24_3, 18_4)"; uitgebracht in de vergadering van 25 Januari 1890. „ 174.

Rapport over eene verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER te Utrecht: „Over de regeling der bloedbestanddeelen bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie"; uitgebracht in de vergadering van 29 Maart 1890. „ 361.

Verslag over de verhandeling van Dr. R. SISSINGH: „Metingen over Kerr's verschijnsel bij magnetisatie evenwijdig

aan het spiegelend oppervlak"; uitgebracht in de vergadering van 29 Maart 1890. . . . . blz. 422.

Verslag over de verhandeling van Dr. JAN DE VRIES: "Cyclische veelhoeken op vlakke kubische krommen", door D. BIERENS DE HAAN en F. J. VAN DEN BERG . . . . " 425.

MEDEDEELINGEN.

H. J. HAMBURGER. Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes, in verband met de isotonische coëfficiënten . " 15.

E. MULDER. Wijnsteenzuur aethyl in zijne verhouding tot natrium- en kalium-aethylaat . . . . . " 24.

C. GRINWIS. Over twee vormen van energie bij rollende beweging . . . . . " 47.

JAN DE VRIES. Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen . . . . . " 75.

C. A. J. A. OUDEMANS. Observations sur quelques Sphéropsidées qui croissent sur les feuilles des espèces européennes de Dianthus. (Met Plaat.) . . . . . " 97.

J. C. KLUYVER. Kenmerkende getallen der algebraïsche ruimtekromme. . . . . " 121.

JAN DE VRIES. Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie (24_3, 18_4) . . . . . " 177.

S. Hoogewerff en W. A. van Dorp. Over de inwerking van onderbromigzuur kalium op succinphenylamide . . blz. 192.

M. W. Beijerinck. Over lichtvoedsel en plastisch voedsel van lichtbacteriën . . . . . " 239.

C. A. J. A. Oudemans. Micromycètes nouveaux. (Met 2 Platen . . . . . " 312.

G. F. .W Barhr. Sur les points d'inflexion de l'herpolhodie de Poinsot . . . . . " 328.

H. J. Hamburger. Over de regeling der bloedbestanddeelen bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie . . . . . " 364.

Jan de Vries. Cyclische veelhoeken op vlakke kubische krommen . . . . . " 430.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 26 October 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KOSTER, VAN DIESEN, MICHAËLIS, MULDER, MOLL, PEKELHARING, RAUWENHOFF, WEBER, ZEEMAN, VAN DORP, STOKVIS, FRANCHIMONT, A. C. OUDEMANS JR., LORENTZ, DE VRIES, ZAAIJER, BIERENS DE HAAN, KAPTEYN, ENGELMANN, VAN DER WAALS, SCHOLS, J. A. C. OUDEMANS, PLACE, MAC GILLAVRY, HOEK, SURINGAR, KAMERLINGH ONNES, GRINWIS, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, HUBRECHT, en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. P. VAN DER STOK, Batavia, September 1889; 2°. den Directeur van het magnetisch-meteorologisch Observatorium te Batavia, 9 September 1889; 3°. J. LIAGRE, Secretaris van de Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts te Brussel, 13 November 1888; 4°. A. AGUILAR, Secretaris van de Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales te Madrid, 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. J. Liagre, Secretaris van de Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts te Brussel, Juni 1889; 2⁰. Förstemann, Secretaris van de kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 28 Juni 1889; 3⁰. den Secretaris van de Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften te Marburg, April 1889; 4⁰. E. Betti, Directeur van de R. Scuola normale superiore te Pisa, 16 Mei 1889; 5⁰. den Bibliothecaris van de Académie royale des Sciences te Stokholm, 1889; 6⁰. E. Regel, Directeur van den Jardin impérial de botanique te St. Petersburg, 31 Juli 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1⁰. een brief van den Heer Dr. A. G. Vorderman te Batavia, waarin dank wordt betuigd voor zijne benoeming tot Correspondent der Afdeeling; 2⁰. eene schriftelijke verontschuldiging van den Heer Behrens over het niet bijwonen van de Vergadering.

— De Heeren Zaaijer en Pekelharing brengen, bij monde van den eerstgenoemde, verslag uit over de verhandeling van Dr. Hagen, aangeboden in de September-Vergadering. Zij stellen voor daaraan eene plaats te verleenen in de 4⁰ werken der Akademie. Aldus wordt besloten.

— De Heeren Engelmann en de Vries rapporteeren gunstig over het in de September-Vergadering aangeboden opstel van Dr. Hamburger te Utrecht. Hun voorstel om dit te bestemmen voor de *Verslagen en Mededeelingen* wordt aangenomen.

— De Heer Mulder biedt voor de *Verslagen en Mededeelingen* aan eene verhandeling: »Over wijnsteenzuur aethyl en zijn verhouding tot natrium- en kalium-aethylaat".

— De Heer GRINWIS spreekt »over twee vormen van energie bij rollende beweging" en biedt over dit onderwerp eene verhandeling aan voor de *Verslagen en Mededeelingen*.

— De Heer RAUWENHOFF biedt eene verhandeling aan met platen »over de Geslachtsgeneratie der Gleicheniaceeën", ter plaatsing in de werken in 4⁰. Dit onderwerp hield den Spreker reeds vele jaren geleden bezig. In de zittingen der Afdeeling van 27 Januari en van 30 Juni 1877 deelde hij daaromtrent eenige voorloopige uitkomsten mede en in 1879 gaven zijne waarnemingen hem aanleiding tot eene andere voorstelling van de kiemingsverschijnselen der sporen van Cryptogamen, ontwikkeld in een opstel, verschenen in *Verslagen en Mededeelingen*, Afd. Natuurk. 2e Reeks Dl. XIV. In den laatsten tijd is het onderzoek van Gleichenia door hem met versche voorwerpen hervat.

De thans aangeboden verhandeling bevat de uitkomsten der studie van dit onderwerp, waarover tot heden nog nagenoeg niets in het licht verschenen is. De bouw en de kieming der sporen, de vorming van prothalliën, antheridiën en archegoniën, enz., worden daarin uitvoerig beschreven en afgebeeld, waaruit blijkt, dat de bij Gleicheniaceeën voorkomende verschijnselen nog het meest naderen tot die, welke bij de familie der Osmundaceeën gevonden worden. Tevens handhaaft de S. zijne bovengenoemde voorstelling van de kiemingsverschijnselen tegenover de bezwaren, in 1884 door LEITGEB daartegen aangevoerd.

Eindelijk wijst de Heer RAUWENHOFF op eenige merkwaardige afwijkingen, welke sommige prothalliën der Gleicheniaceeën vertoonen, als:

1⁰. voortdurenden groei zonder vorming van geslachtsorganen;

2⁰. neiging tot dioecie, bestaande in de vorming van talrijke archegoniën op prothalliën die geene antheridiën dragen: eene Apandrie, welke bij Varens nog niet waargenomen is;

3⁰. algemeene proliferatie door vorming van secundaire

en tertiaire prothalliën uit enkele randcellen of celgroepen van oude, allengs afstervende prothalliën.

— De Heer v. d. Waals spreekt over het evenwicht van vaste verbindingen tegenover vloeistof- en dampmengsels en toont aan hoe, ter bepaling van de voorwaarden voor dit evenwicht, gebruik zou kunnen gemaakt worden van het vroeger door hem beschreven ψ-vlak voor mengsels van twee stoffen. Neemt men nl. aan de mogelijkheid van het bestaan van een verbinding in bepaalde verhouding in vasten toestand, bijv. in verhouding van x_1 tot $1 - x_1$ molekulen, dan moet in een doorsnede, door x_1 bepaald, een nieuwe lijn aan het ψ-vlak worden toegevoegd. Hoe deze lijn, door gegevens, aan de ervaring ontleend, zou kunnen geconstrueerd worden, wordt door den spreker aangetoond. Een vlak, dat te gelijker tijd dezen nieuwen tak en het ψ-vlak raakt, geeft coëxisteerende phasen aan. Als een der eerste gevolgen kan aangemerkt worden, dat, bij gegeven druk en bij gegeven temperatuur, het vaste lichaam in evenwicht kan zijn met tweeërlei vloeistof of dampmengsel. Bij lage temperatuur zullen op het ψ-vlak raakpunten gevonden worden: zoowel op het gedeelte dat vloeistofvolumes, als op dat, hetwelk dampvolumes aangeeft. Bij den overgang is er een vlak, dat in 3 punten raakt, nl. 1^0 in een punt der lijn, 2^0 in een vloeistofphase, 3^0 in een dampphase. Zulk een driedubbel rakend vlak bestaat ter wederzijde van het vlak x_1: een uitkomst, die geheel in overeenstemming is met wat de ervaring geleerd heeft.

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden:

Door den Heer Bierens de Haan deel XVI, Stuk 1, van »Nieuw Archief der Wiskunde", en door den Heer Schols 3 afleveringen van »Waterbouwkunde" door Henket, Schols en Telders.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. B. HAGEN,

GETITELD:

„ANTHROPOLOGISCHE STUDIEN AUS INSULINDE".

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 October 1889).

De Verhandeling van Dr. B. HAGEN, in de vorige Vergadering der Akademie in onze handen gesteld, met verzoek daarover in de Vergadering van heden rapport te willen uitbrengen, is getiteld: »*Anthropologische Studien aus Insulinde.*"

Het omvangrijke stuk van meer dan 200 bladzijden, met afbeeldingen en uitvoerige tabellen der genomene maten, bevat, volgens de uitdrukking van den Schrijver: »*das ganze bislang von mir zusammengetragene anthropologische Material*". Aanvankelijk was het de bedoeling des Schrijvers de mededeeling der thans reeds verkregene resultaten uit te stellen totdat hij gelegenheid zou gehad hebben ook een aantal Dajakstammen op Borneo te bestudeeren en te meten; doch de onzekerheid omtrent het tijdstip, waarop dit onderzoek zou kunnen ten einde gebracht zijn, deed hem besluiten reeds nu zijne onderzoekingen bekend te maken.

Het eerste Hoofdstuk heeft tot titel: »*Die Bevölkerungs- und Vermischungsverhältnisse. Geschichtliches.*" De inhoud komt in 't kort hierop neder.

De verhoudingen der volksstammen in den O. I. Archipel

zijn uiterst ingewikkeld door de vermenging met van elders afkomstige elementen. In de eerste plaats behooren hierbij de Chineezen genoemd te worden, wier aantal in onzen O. I. Archipel veel meer dan 500.000 bedraagt. Daar de uitvoer van vrouwen uit China verboden is, zijn stellig $^4/_5$ der in onzen Archipel aanwezige, z. g. Chineezen uit gemengde huwelijken van Chineezen met inlandsche vrouwen, vooral Javaansche en Dajaksche, voortgesproten. Nog ouder en, voor zoo verre de Maleische volksstammen betreft, veel invloedrijker, is de kruising der inboorlingen met Voor-Indiërs, omdat deze eveneens den Islam beleden en dezen zelfs voor een deel in den Archipel hielpen invoeren.

Chineezen en Indiërs werken ook thans nog krachtig aan de vermenging der bedoelde volkeren mede, terwijl alleen in Atjeh iets van beteekenis van den invloed der Arabieren te bespeuren is. Sedert het begin der 16de eeuw hebben ook de Europeanen ijverig deel genomen aan de vermenging der rassen. Verder spelen Siameezen en Boegi's geen geringe rol in de geschiedenis van den Archipel en ten slotte mogen de Negrito's niet buiten beschouwing blijven.

Dr. Hagen stelt zich den historischen gang van dit vermengingsproces aldus voor. Van de hooglanden van Sumatra en wellicht ook van Borneo (destijds met elkander verbonden en één geheel uitmakend) trokken de z. g. Oermaleijers naar de lager gelegene streken, gelijk de tegenwoordige bewoners dit nog heden ten dage doen, om zich verder over den Archipel te verspreiden en wellicht nog oudere bewoners te verdringen, waarvan de spaarzame overblijfselen waarschijnlijk nog in de raadselachtige Negrito's te herkennen zijn. Tot deze Oermaleijers behooren de volksstammen, die, vrij van invloeden van buiten af levende, het zuiverst hun type hebben kunnen bewaren: dat zijn dus de bewoners van de binnenlanden der groote eilanden, waartoe te brengen zijn: de Batta's van Sumatra, de Dajaks van Borneo, de Alfoeren van Celebes en een kleine stam in de bergen van Westelijk Java. De kustbewoners daarentegen zijn door de kruising met vreemde elementen zeer belangrijk gewijzigd en, psychisch zoowel als somatisch, zeer vooruitgegaan.

Uit de tegenwoordige verhoudingen en uit historische gegevens is af te leiden, dat de volksstammen van Malakka, van Sumatra en van Java sterk gekruist zijn en wel het allermeest met Indische en Chineesche elementen. De oorspronkelijke bevolking heeft zich op Sumatra het zuiverst kunnen staande houden op de westelijke hooglanden van Menangkabau en Tobah. Malakka is door zijne eigenaardige ligging veel minder geschikt om het Oermaleische type onvermengd te bewaren. De bevolking van Java is het allermeest gekruist; dit geldt vooral voor het Oosten van het eiland, omdat de z.g. Soendaneezen, in de moeielijk toegankelijke gebergten van het Westen, veel minder van het indringen van vreemde elementen te lijden hadden en, met uitzondering van de bewoners van Bantam, als ras veel zuiverder zijn gebleven.

In het tweede Hoofdstuk, dat tot opschrift draagt: »*Allgemein Anthropologisches. Messungsschema. Kurze Characteristik der gemessenen Völker*". maakt Dr. HAGEN melding van de tot op zekere hoogte tegenover elkander staande meeningen van KEANE en JUNGHUHN. Terwijl de eerste al de bruine Maleische rassen afleidt uit de kruising van den Kaukasischen en den Mongoolschen typus, neemt JUNGHUHN zelfs 2 oorspronkelijke rassen, het Batta'sche en het Maleische, aan. Beider meening steunt evenwel hoofdzakelijk op het onderzoek van schedels. Terecht merkt echter Dr. HAGEN op, dat dit hulpmiddel niet voldoende is om het vraagstuk tot eene bevredigende oplossing te brengen. Nog eens wordt de klacht herhaald dat een schedel, waarvan de afkomst niet voldoende bekend is en gewaarborgd, weinig waarde heeft als »*exactes Material*". (Men denke aan de mededeeling van HALBERTSMA, die zekeren custos op den schedel van een echten Leidenaar *Russus* zag schrijven, om dien daardoor duurder aan den man te kunnen brengen). Naar het gevoelen van Dr. HAGEN hebben alleen die schedels anthropologische waarde, waarvan de inzender verklaren kan dat hij de individu's bij hun leven gekend en hen omtrent hunne afkomst behoorlijk ondervraagd heeft. De ondervinding heeft hem, die thans de eer heeft tot U te spreken,

evenwel geleerd, dat men ook dan zelfs nog niet volkomen voor dwaling gevrijwaard is. Vóór vele jaren ontving hij eene bezending Javaansche vrouwenbekkens; één daarvan had een zoo volkomen mannelijken vorm, dat hij aan de juistheid van de etiquette moest twijfelen. De inzender, een zeer ijverig en uiterst nauwgezet verzamelaar, was door dezen twijfel eenigszins ontstemd; vergissing was hier niet mogelijk. Eerst toen aan dezen werd getoond, dat aan het bekken op zeer vernuftige wijze twee dijbeenderen der rechterzijde bevestigd waren, werd de mogelijkheid eener vergissing erkend. De Javaansche jongen had zich, toen het bedoelde vrouwenbekken in het ongereede geraakt was, uit de moeielijkheid weten te redden!

Dr. Hagen gaat evenwel te ver in zijne uitspraak, dat het voor de wetenschap beter ware, indien $^2/_3$ der in de Europeesche verzamelingen aanwezige Maleische schedels op het kerkhof rustten.

Voor de oplossing van anthropologische vraagstukken zijn evenwel schedels, zelfs de best gewaarborgden, niet toereikend. Skeletten zijn er slechts weinig voorhanden en tot op zekere hoogte gelden daarvoor dezelfde bezwaren als voor de schedels. Men moet dus zijne toevlucht nemen tot het meten van levenden, en Dr. Hagen deelt ons in de verdere Hoofdstukken zijner Verhandeling de resultaten mede der metingen van omstreeks 400 personen. Voor sommige groepen vooral is het te betreuren, dat de getallen zoo klein zijn. Maar men telle de bezwaren, die Dr. Hagen te overwinnen had, niet gering! Vooreerst waren allen, die zouden onderzocht worden, overtuigd dat zij de slachtoffers van eene verschrikkelijke toovenarij zouden worden. De Batta's meenden niet meer of niet minder dan dat Dr. Hagen door het meten hun leven in zijne hand kreeg. Welk een geduld en welk een tact zijn er noodig geweest om die vreesachtige natuurmenschen over te halen om zich te doen meten! en toch liepen er nog velen onder de operatie weg, waardoor de hiaten in de Tabellen verklaard worden.

Bij het onderzoek werd Virchow's *Messungsliste* in Neumayer's *Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf*

Reisen" in hoofdzaak gevolgd. Tot de door Dr. HAGEN gemeten stammen behooren:

1. *Sikhs*, gewoonlijk uitgediende Engelsche soldaten uit Pendjab, uitsluitend Hindoe's;
2. *Bengaleezen*, meestal geboren te Bombay en Calcutta; op zuiverheid van ras kunnen zij niet de minste aanspraak maken. Zij zijn Hindoe's of Mohamedanen;
3. *Klings of Tamyls*, bijna allen uit de buurt van Madras, meestal Hindoe's, enkele Mohamedanen;
4. *Pinang-maleijers*, d. z. Maleijers van het eiland Pinang, de kuststreken van Malakka en Singapore;
5. *Deli-maleijers*, inboorlingen van de geheele Oostkust van Sumatra, van Kaap Tamian tot Siak;
6. *Menangkabau-maleijers*, mohamedaansche inboorlingen der hooglanden van Menangkabau en Mandeling op de Westkust van Sumatra;
7. *Batta's*, meestal afkomstig van de oevers van het Tobah-meer: eene streek, die anthropologisch zeer zuiver is;
8. *Atjehers*;
9. *Ala's*, een mohamedaansche Batta-stam aan de zuidelijke grens van Atjeh;
10. *Soendaneezen*, waaronder Dr. HAGEN hier alle niet Javaansch sprekende bewoners van de westelijke helft van Java verstaat;
11. *Javanen*, uitsluitend Mohamedanen; de naar Deli gedeporteerde kettinggangers waren voor Dr. HAGEN uitstekend materiaal;
12. *Madoereezen*;
13. *Boegi's*;
14. *Baweaneezen*, van de kleine eilandengroep Bawean bij Madoera, Mohamedanen;
15. *Zuid-Chineezen*, als koelies op de groote tabaksplantages te Deli werkzaam, allen afkomstig uit de Zuid-Chineesche provincie Kwang-tung, Boeddhisten.

De resultaten der metingen zijn in het derde Hoofdstuk

der Verhandeling geboekt. Met het oog op den grooten rijkdom der hierin besproken feiten zullen wij de meest mogelijke beknoptheid in acht nemen.

Allereerst worden de verhoudingsgetallen medegedeeld; waardoor bij de onderzochte rassen de verhouding der verschillende lichaamsdeelen tot de lengte van het geheele lichaam wordt voorgesteld. Vervolgens worden de verkregene gemiddelden en de afzonderlijke lichaamsdeelen besproken en eindelijk de haren en de huid behandeld. Een aantal afbeeldingen van dwarse doorsneden, zoowel van hoofd- als schaamharen, zijn aan dit Hoofdstuk toegevoegd en eveneens, in navolging van Broca, maar met de noodige wijzigingen, een afzonderlijke schaal voor de kleur der huid.

Wachtsthumsverhältnisse is het opschrift van het 4de Hoofdstuk. Dr. Hagen heeft hierbij ook zooveel mogelijk gebruik gemaakt van door anderen (Weisbach en Beyfuss) genomen maten en het hem ten dienste staande materiaal dienstbaar gemaakt aan de oplossing der gewichtige en tot dusver veel te stiefmoederlijk behandelde vraag betreffende den groei van het menschelijk lichaam, een onderdeel slechts van de z.g. postfoetale ontwikkeling, welk veld van onderzoek ook thans nog zoo goed als geheel braak ligt. Aan het slot komt Dr. Hagen tot dit besluit, dat de verschillende deelen van het lichaam, tot minstens het 25ste levensjaar toe, hunne verhoudingen ten opzichte van elkander wijzigen, d. w. z. dat op een bepaalden tijd het eene, op een anderen tijd het andere lichaamsdeel meer groeit, en dat men daarom voor het bepalen van de onderlinge verhoudingen der rassen slechts volwassen individu's bezigen kan, d. w. z. dezulken, bij wie alle maten hare volkomene ontwikkeling bereikt hebben.

Als hoofdresultaat van het onderzoek wordt door Dr. Hagen het volgende medegedeeld.

Op Sumatra bestaat nog een menschenras, dat niet uit een eenvoudig gekruist ras van den Mongoolschen met den Kaukasischen typus kan worden afgeleid en dat daarom als een Oerras beschouwd moet worden. Hiertoe behooren de Batta's, de Ala's en de Maleijers uit de hooglanden van West-Sumatra

De kustbewoners, die men gewoonlijk onder den naam »Maleijers" begrijpt, zijn producten eener zeer sterke kruising van dit Oerras met Voor-Indische en Mongoolsche elementen. De z. g. Maleijers van Oost-Sumatra en Malakka zijn bijna uitsluitend met Indische, de Javanen, Soendaneezen, Madoereezen en Baweaneezen meer met Mongoolsche elementen gekruist.

In een Aanhangsel geeft Dr. Hagen nieuwe mededeelingen: »*Ueber die Körpergrösse der Südchinesen.*" In de *Verslagen en Mededeelingen* onzer Afdeeling, 2de Reeks, Deel XX, bl. 236, 1884, is eene korte verhandeling van zijne hand opgenomen, getiteld: »*Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Südchinesen.*" Hierin waren de resultaten van het meten van 1000 personen opgenomen; thans had Dr. Hagen over een 15 maal grooter materiaal (dus over 15000 metingen) te beschikken. Het eindresultaat is evenwel onveranderd gebleven. Het gemiddelde van de lichaamslengte der Zuid-Chineezen, uit dit zeer groote aantal metingen afgeleid, bedraagt evenals bij het vorige onderzoek, 1622 mm.

De protocollen der verrichte metingen en eene korte beschrijving der gemetene individu's, ten getale van 383, besluiten dezen uitvoerigen arbeid.

Het korte verslag, dat wij U van den rijken inhoud der besproken Verhandeling gaven, zal, naar wij vertrouwen, U ook een denkbeeld geschonken hebben van al den ijver, van al de volharding, die noodig zijn geweest om, onder de ongunstige omstandigheden, waaronder Dr. Hagen moest werken, een zoo tijdroovend onderzoek te verrichten. De Schr. heeft te midden van zijne drukke bezigheden als arts te Deli, strijdende tegen de bezwaren eener geschokte gezondheid, den tijd daarvoor weten te vinden en ons in zijne Verhandeling een ook voor anderen bruikbaar anthropologisch materiaal geschonken, zooals wij zulks van onze O. I. Koloniën nog niet bezitten. Wij mogen het met hem betreuren dat hem tot dus ver de gelegenheid ontbroken heeft om ook de Dajakstammen van Borneo in zijn onderzoek

op te nemen; maar wij moeten hem tevens dankbaar zijn dat hij: »*das warnende schmerzvolle Beispiel* MICLUCHO-MACLAY'S *vor Augen, dem nun der Tod definitiv die stets zögernde Feder aus der Hand genommen*" ons thans gegeven heeft. wat hij had en kunnen daarbij den wensch niet onderdrukken, dat het hem vergund moge zijn, bij zijn nieuw verblijf in O. I., ook met zijne anthropologische onderzoekingen voort te gaan en de daarin overgeblevene leemten aan te vullen.

Naar ons oordeel verdient dus de door DR. B. HAGEN aangeboden Verhandeling ten volle om in de werken onzer Akademie opgenomen te worden en wij hebben mitsdien de eer daartoe het voorstel te doen.

Amsterdam,
26 October 1889.

T. ZAALJER.
C. A. PEKELHARING.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. H. J. HAMBURGER**

te Utrecht,

GETITELD:

„OVER DE PERMEABILITEIT DER ROODE BLOEDLICHAAMPJES, IN VERBAND MET DE ISOTONISCHE COËFFICIËNTEN".

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 October 1889).

De verhandeling van Dr. Hamburger, waarover rapport uit te brengen aan de ondergeteekenden in de September-vergadering der Afdeeling Natuurkunde der K. Akademie van Wetenschappen werd opgedragen, sluit zich aan bij twee vroegere mededeelingen van den schrijver, door wijlen het lid F. C. Donders aan de Akademie voorgelegd, en handelende over de inwerking van zoutoplossingen op roode bloedlichaampjes, bepaaldelijk op het uittreden van bloedkleurstof uit die lichaampjes, naar aanleiding van de resultaten, door de plasmolytische methode op plantencellen verkregen. Het bleek toen dat de concentraties, waarbij kleurstof begint uit te treden, beantwoorden aan de isotonische coëfficiënten, en verder, dat het bloedserum in wateraantrekkend vermogen de zoutsoluties van de genoemde concentratie verre overtreft. Soluties, in osmotische kracht gelijk aan serum, werden door Dr. Hamburger »isotonisch", meer geconcentreerde »hyperisotonisch", minder geconcentreerde »hypisotonisch" genoemd.

In de nu aangeboden verhandeling (7 bladzijden in folio beslaande) toont Dr. HAMBURGER aan, dat de roode bloedlichaampjes van gedefibrineerd runder-, paarde-, honde- en varkensbloed, ook na behandeling met verschillende: isotonische, hyperisotonische en hypisotonische oplossingen van KNO_3, $NaNO_3$, NaO, Na_2SO_4, NaI, druivesuiker, rietsuiker en verdund serum, nog bij de oorspronkelijke concentraties kleurstof beginnen te verliezen.

Dit resultaat kon niet verklaard worden uit de onderstelling, dat de roode lichaampjes slechts voor water, niet voor zouten permeabel zijn, want in opzettelijk daartoe verrichte kwantitatief-analytische proeven, waarvan een achttal nader worden medegedeeld, bleek, dat de lichaampjes, na vermenging met zoutsoluties, daaruit — ook uit de isotonische — zout hadden opgenomen, resp. daaraan hadden afgestaan.

Men moet dus, volgens Dr. HAMBURGER, aannemen, dat de uitwisseling van zouten tusschen lichaampjes en vocht in isotonische verhouding plaats heeft.

In overeenstemming hiermede vond Dr. HAMBURGER bij plasmolytische proeven, op Tradescantia-cellen verricht, dat het serum van met isotonische zoutsoluties vermengd gedefibrineerd bloed, door dit vermengen, geen verandering in wateraantrekkend vermogen ondergaat.

Het verkregen resultaat is zeer opmerkelijk, omdat een dergelijke wisseling in isotonische verhouding nog nergens is aangetoond, en bij plantencellen, voor zoo verre deze daarop zijn onderzocht, zeker niet bestaat. Mocht voor de normale — »levende" — bloedlichaampjes hetzelfde gelden als voor de lichaampjes van het gedefibrineerde bloed — een punt waarmede Dr. HAMBURGER zich nader zal bezig houden — dan zal zeker op vele vragen, de stofwisseling van bloed en weefsels betreffende, een nieuw licht worden geworpen.

In elk geval verdient de aangeboden verhandeling voor de opneming in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie te worden aanbevolen.

Th. W. ENGELMANN.
HUGO DE VRIES.

24 October 1889.

OVER DE PERMEABILITEIT

DER

ROODE BLOEDLICHAAMPJES, IN VERBAND MET DE ISOTONISCHE COËFFICIËNTEN,

DOOR

Dr. H. J. HAMBURGER.

Vroeger *) toonden wij aan, dat wanneer men bloed vermengt met zoutoplossingen van verschillende concentraties en de bloedlichaampjes laat bezinken, van elk zout een concentratie gevonden wordt, waarin geen bloedkleurstof uittreedt, terwijl de solutie, die een slechts weinig geringere concentratie bezit, wel kleurstof doet uittreden. Wij zagen, dat, zoo men voor elk zout telkens het gemiddelde van beide grenzen neemt en dan de gemiddelden onderling vergelijkt, de laatste nauwkeurig beantwoorden aan de isotonische coëfficiënten van Prof. HUGO DE VRIES.

Later †) toonden wij aan, dat de zoutoplossing, waarin de bloedlichaampjes kleurstof beginnen te verliezen, in wateraantrekkend vermogen ver beneden het overeenkomstige serum staat. Men moet dit met 50, gewoonlijk met meer procent water verdunnen, voordat het in staat is, evenals

*) *Verslagen en Mededeelingen* der Koninkl. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. 1884. Zie verder Onderz. physiol. lab. Derde Reeks. X. 1e stuk. p. 22.

†) *Verslagen en Mededeelingen* der Koninkl. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. 1886. Zie verder Onderz. physiol. lab. Derde Reeks. X. 1e stuk. p. 33.

de bedoelde zoutoplossing, kleurstof uit de lichaampjes te doen treden. De zoutoplossingen, die in wateraantrekkend vermogen met het serum gelijk staan, noemden wij *isotonisch*, de daarboven gelegene *hyperisotonisch* en de daaronder gelegene *hypisotonisch*.

Wij hebben bovenstaande onderzoekingen voortgezet.

Vermengden wij 20 c.M^3 gedefibrineerd runderbloed met 40 c.M^3 van een K NO_3-solutie van 1,67$^0/_0$ (in het onderwerpelijke geval isotonisch met het serum), lieten wij de lichaampjes door middel van een centrifugaalmachine op den bodem van het vat bezinken, verwijderden wij de vloeistof en vermengden wij van de bloedlichaampjes eenige droppels met 20 cM^3 van Na Cl-oplossingen van verschillende sterkten, dan bleek, na het bezinken der bloedlichaampjes, *dat kleurstof was uitgetreden in dezelfde* Na Cl-*soluties*, *als waarin het oorspronkelijk gedefibrineerd bloed uittreden van kleurstof vertoonde.*

Hetzelfde namen wij waar, wanneer runderbloed behandeld was met *hyper-* en met *hypisotonische* oplossingen van K NO_3, Na NO_3, Na M, Na_2 SO_4, Na I, druivesuiker, rietsuiker en met serum, dat vooraf met water verdund was. Alleen Mg SO_4 scheen zoowel in hyper- als in hypisotonische oplossing een afwijking te vertoonen, doch steeds in denzelfden zin. Voorts gaven paarde-, honde- en varkensbloed dezelfde resultaten als runderbloed.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van eenige der genomen proeven:

T A B E L.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diersoort.	. . . . cM³ bloed, vermengd met . . . . cM³ zoutoplossing.	Isotonische coëfficiënt van het gebruikte zout.	Zoutoplossing, isotonisch met het bij 't gebruikte bloed behoorende serum.	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof uit de lichaampjes van het met zoutoplossing behandelde bloed (IV).	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof uit de lichaampjes van het oorspronkelijke gedefibrineerde bloed.
Rund.	20 bloed + 40 KNO_3-opl. van 1.67 % (isotonisch)	3	KNO_3 — 1.67 %	1.05 % en 1.11 % KNO_3	1.05 % en 1.11 % KNO_3
	20 bloed + 40 KNO_3-opl. van 3 % (hyperisot.)	3	" " "	1.05 " " 1.11 " KNO_3	" " " " " "
	20 bloed + 40 KNO_3-opl. van 1.25 % (hypisot.)	3	" " "	1.05 " " 1.11 " KNO_3	" " " " " "
	10 bloed + 30 rietsuikeropl, an 12 % (hyperisot.)	2	rietsuiker 8.51 "	0.5 " " 0.51 " NaCl	0.5 " " 0.51 " NaCl
	10 bloed + 30 rietsuikeropl. van 6 % (hypisot.)	2	" " "	0.5 " " 0.51 " NaCl	" " " " " "
	10 bloed + 30 $MgSO_4$-opl. van 10 % (hyperisot.)	2	$MgSO_4 + 7$ aq. 5.3 "	0.46 " " 0.47 " NaCl	" " " " " "
	10 bloed + 30 $MgSO_4$-opl. van 4 % (hypisot.)	2	" " "	0.47 " " 0.48 " NaCl	" " " " " "
Paard.	10 bloed + 30 NaCl-opl. van 3 % (hyperisot.)	3	NaCl 0.928 "	0.54 " " 0.55 " NaCl	0.55 " " 0.56 " NaCl
	10 bloed + 30 NaJ-opl. van 4 % (hyperisot.)	3	NaI 2.04 "	0.54 " " 0.55 " NaCl	0.55 " " 0.56 " NaCl
	10 bloed + 30 druivensuikeropl. van 4 % (hyperisot.)	2	druivensuiker 3.15 "	0.55 " " 0.56 " NaCl	" " " " " "
	10 bloed + 30 verdund serum (10 serum op 5 water)	.....	.....	0.55 " " 0.56 " NaCl	" " " " " "
	10 bloed + 40 $MgSO_4$-opl. van 10 % (hyperisot.)	2	$MgSO_4 + 7$aq. 5.3 "	0.48 " " 0.49 " NaCl	0.52 " " 0.53 " NaCl
	10 bloed + 40 $MgSO_4$-opl. van 4 % (hypisot.)	2	" " " "	0.48 " " 0.49 " NaCl	" " " " " "
	10 bloed + 30 verdund serum (10 serum op 2 water)	.....	.....	0.54 " " 0.55 " NaCl	0.54 " " 0.55 " NaCl
	10 bloed + 30 verdund serum (10 serum op 4 water)	.....	.....	0.54 " " 0.55 " NaCl	" " " " " "
Hond.	10 bloed + 80 Na_2SO_4-opl. van 5 % (hyperisot.)	4	Na_2SO_4 1.1 "	0.38 " " 0.39 " NaCl	0.38 " " 0.39 " NaCl
Varken.	10 bloed + 30 NaCl-opl. van 3 % (hyperisot.)	3	NaCl 0.84 "	0.48 " " 0.49 " NaCl	0.48 " " 0.49 " NaCl

Het verkregen resultaat zou kunnen verklaard worden, door aan te nemen, dat de bloedlichaampjes slechts voor water permeabel zijn. In dit geval zouden zij in isotonische zoutsoluties geheel onveranderd blijven, in hyperisotonische slechts water verliezen en in hypisotonische water opnemen. Worden dan de lichaampjes, na in deze oplossingen gelegen te hebben, in een zwakke Na Cl-solutie gebracht, dan zullen zij in de drie gevallen ten slotte een gelijke quantiteit water bevatten, een hoeveelheid, die beantwoordt aan de absolute hoeveelheid zout, er in aanwezig; welke hoeveelheid, ingevolge de onderstelling, gelijk gebleven is. Daar het opnemen van een zeker volumen water aanleiding geeft tot zwelling en ten slotte tot verlies van kleurstof, zal men bij de bloedbloelichaampjes, die in isotonische, zoowel als bij die, welke in hyper- en hypisotonische zout-soluties hadden gelegen, door dezelfde Na Cl-oplossingen kleurstof zien uittreden.

Echter hebben wij door een reeks van chemische analysen kunnen constateeren, dat de bloedlichaampjes, zelfs in isotonische oplossingen, voor zouten in aanzienlijke mate permeabel zijn.

Wij laten hier eenige proeven volgen:

1. 20 cM^3 gedefibrineerd paardebloed worden vermengd met 50 cM^3 van een $Na\,NO_3$-oplossing van $1\frac{1}{2}$ $^0/_0$. Het mengsel wordt in de centrifugaalmachine gebracht en na eenigen tijd worden 20 cM^3 van de gele bloedlichaampjesvrije vloeistof afgezogen. Van deze vloeistof worden chloorbepalingen gedaan, nadat de eiweitstoffen door verwarming met $1\frac{1}{2}$ maal het volumen van een verzadigde oplossing van chloor-vrij $(NH_4)_2\,SO_4$ zijn neêrgeslagen. De chloorbepalingen geschieden door toevoeging van $H\,NO_3$ en een overmaat van $Ag\,NO_3$; het $Ag\,NO_3$, dat niet door het chloor verbruikt is, wordt door KC NS en Ferrinitraat teruggetitreerd. Het blijkt, dat 20 cM^3 van de door centrifugeeren verkregen sereuse vloeistof overeenkomt met 4,86 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $Ag\,NO_3$ oplossing. Neemt men aan, dat in 100 volumina paardebloed aanwezig zijn 40 vol. bloedlichaampjes en 60 vol. serum, dan zijn in 20 cM^3 bloed 12 cM^3 serum aanwezig en bedraagt de geheele hoeveelheid vloeistof van het mengsel

50 + 12 = 62 cM³. Daar nu 20 cM³ van deze vloeistof overeenkomen met 4.86 cM³ $AgNO_3$-oplossing, zullen 62 overeenkomen met 15,06 cM³ $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Bij een chloorbepaling van het door centrifugeeren verkregen serum *) van het onvermengde gedefibrineerde bloed, bleken 12 cM³ overeen te stemmen met 12.24 cM³ $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Terwijl dus de *vloeistoffen*, voordat zij bij elkander gevoegd worden, een hoeveelheid chloor bevatten, overeenkomend met 12.24 cM³ $^1/_{10}$ n. $AgNO_3$, blijken zij na vermenging een hoeveelheid chloor te bevatten, die overeenkomt met 15,06 cM³ $^1/_{10}$ n. $AgNO_3$.

De sereuse vloeistof is dus $\frac{15.06-12.24}{12.24} \times 100 = 23.04\,^0/_0$ *in chloorgehalte toegenomen ten koste van dat der bloedlichaampjes; m. a. w. er is chloor uit de bloedlichaampjes getreden.*

Dit resultaat schijnt in zekere mate afhankelijk van de onderstelling, dat in 100 vol. bloed 60 vol. serum aanwezig zijn. Stelt men echter, dat 100 volumina van het paardebloed 50 of 70 vol. serum bevatten — wat hier zeker niet waar was — dan geeft de berekening toch nog een uittreden van chloor uit de bloedlichaampjes.

2. Van deze proef en de 6 volgende, die wij geheel op dezelfde wijze uitvoerden als de sub. 1 beschrevene, laten wij de berekening achterwege, doch deelen slechts de resultaten mede.

20 cM³ kalfsbloed + 40 cM_3 $NaNO_3$ van $1\frac{1}{2}$ $^0/_0$.

Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn

20 cM³ = 8.62 cM³ $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn

12 cM³ = 12.46 cM³ $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof is* 79.8 $^0/_0$ *in chloorgehalte toegenomen ten koste der bloedlichaampjes.*

---

*) Het is ons vaak gebleken, dat het serum, uit den koek verkregen, een weinig in chloorgehalte verschilt met dat van het gedefibrineerde bloed. Elders zullen wij daarop terug komen.

3. 20 cM³ kalfsbloed + 50 cM³ $NaNO_3$ van 1½ %.
Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM³ = 6.04 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.
Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM³ = 12.46 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof is* 55.7 % *in chloorgehalte toegenomen ten koste der bloedlichaampjes.*

4. 20 cM³ kalfsbloed + 40 cM³ serum + 10 cM³ $NaNO_3$ van 1½ %.
Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM³ = 19.6 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.
Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM³ = 12.46 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof is* 12.46 % *in chloorgehalte toegenomen ten koste der bloedlichaampjes.*

5. 20 cM³ paardebloed + 40 cM³ serum + 10 cM³ Na Cl-oplossing (ongeveer isotonisch met het serum).
Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM³ = 16.77 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.
Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM³ = 12.24 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.
Van de Na Cl-oplossing zijn 10 cM³ = 18.57 cM³ $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof heeft* 36.4 % *van haar chloorgehalte aan de bloedlichaampjes afgestaan.*

6. 20 cM³ paardebloed + 40 cM³ Na Cl-oplossing (ongeveer isotonisch met het serum).
Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM³ = 32,65 cM³ 1/10 normaal $AgNO^3$.
Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM³ = 12.24 cM³ 1/10 normaal $AgNO_3$.
Van de Na Cl-oplossing zijn 10 cM³=18.57 cM³ 1/10 n. $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof heeft* 1.9 % *van haar chloorgehalte aan de bloedlichaampjes afgestaan.*

7. 20 cM^3 paardebloed + 50 cM^3 Na Cl-oplossing (ongeveer isotonisch met het serum).

Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM^3 = 31.71 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM^3 = 12,24 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Van de Na Cl-oplossing zijn 10 cM^3=18.57 cM^3 $^1/_{10}$ n. $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof heeft* 6,5 % *van haar chloorgehalte aan de bloedlichaampjes afgestaan.*

8. 20 cM^3 paardebloed + 40 cM^3 serum + 10 cM^3 water.

Van de door centrifugeeren verkregen vloeistof zijn
20 cM^3 = 17.33 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Van het bij het gedefibrineerde bloed behoorende serum zijn
12 cM^3 = 12.24 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$.

Resultaat: *De sereuse vloeistof is* 1.24 % *in chloorgehalte toegenomen ten koste van de bloedlichaampjes.*

Wij hebben, hoewel met een ander doel, nog een aantal proeven in deze richting genomen, zoo bijv. met isotonische, hyper- en hypisotonische KNO_3 en druivesuiker-oplossingen, en zijn ook door deze tot het resultaat gekomen, *dat de bloedlichaampjes van het gedefibrineerde bloed voor chloriden permeabel zijn en wel extra- en intrameabel* *).

Van deze proeven willen wij er nog ééne vermelden, waarbij gebleken is, dat terwijl chloor *uit* de bloedlichaampjes trad, phosphorzuur den omgekeerden weg volgde.

Voor deze proef werden de eiwitstoffen uit de sereuse vloeistof niet verwijderd door $(NH_4)_2SO_4$, maar door azijnzuur. Het phosphorzuur werd bepaald door titratie met uraanacetaat en ferrocyaankalium. Wij vermengden 200

---

*) „Extrameabel" noemt JANSE plantencellen, wanneer er stoffen *uit* en „extrameabel" wanneer er stoffen *in* kunnen treden. Zie Dr. J. M. JANSE. Die Permeabilität des Protoplasma, in: *Verslagen en Mededeelingen* der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde, Derde reeks, Dl. IV. p. 336.

cM³ gedefibrineerd paardebloed met 300 cM³ KNO_3-oplossing van 1.55% (isotonisch met het serum).

Het bleek, dat de sereuse vloeistof 15.5% in chloorgehalte was toegenomen, terwijl zij 20% van haar phosphorzuur aan de bloedlichaampjes had afgestaan.

Uit onze vroegere proeven over de geldigheid der isotonische coëfficiënten bij de bloedlichaampjes, is gebleken, dat deze in hoofdzaak moest berusten op wateraantrekking. Waren onze redeneeringen werkelijk juist, dan mogen wij thans naar aanleiding van de bovenvermelde proeven aannemen, dat bij vermenging van bloed met isotonische, hyper- en hypisotonische oplossingen, het wateraantrekkend vermogen van den inhoud der bloedlichaampjes onveranderd is gebleven en in dit geval moet er tusschen de laatsten en hun omgeving een wisseling van bestanddeelen hebben plaats gehad in isotonische verhoudingen.

Dat nu inderdaad het wateraantrekkend vermogen der bloedlichaampjes, na vermenging met verschillende zoutsoluties, onveranderd is gebleven, hebben wij met zekerheid kunnen aantoonen.

Wij redeneerden aldus:

Vermengt men een willekeurige hoeveelheid gedefibrineerd bloed met een willekeurige hoeveelheid van een zout- of suikeroplossing, die isotonisch is met het serum, dan mag, indien inderdaad in de bloedlichaampjes geen verandering van wateraantrekkend vermogen heeft plaats gegrepen, dit met het verdunde serum ook niet het geval zijn.

Wij hebben het wateraantrekkend vermogen der vloeistoffen bepaald door middel van bloedlichaampjes en ook, om geen gevaar te loopen in een cirkel te redeneeren, met Tradescantia discolor (naar de methode van DE VRIES).

Het resulaat was zeer bevredigend.

Volgens een dergelijke methode hebben wij ook geëxperimenteerd met hyper- en hypisotonische oplossingen en wel, met hetzelfde resultaat.

Het bovenstaande onderzoek heeft dus geleerd, dat na ver-

menging van gedefibrineerd bloed met isotonische, hyperisotonische zout- en suikeroplossingen en met serum, dat vooraf met water is verdund, een uitwisseling van bestanddeelen plaats grijpt tusschen bloedlichaampjes en omgeving, en wel in zoodanige verhouding, dat de wateraantrekkende kracht van geen van beiden hierdoor verandering ondergaat, m. a. w. in isotonische verhouding.

Wij houden ons thans bezig met de vraag, of de hier gevonden feiten ook geldig zijn voor circuleerend bloed, een vraag, die ons voor de leer der stofwisseling, en meer in het bijzonder van die van het bloed, niet van belang ontbloot schijnt.

Physiol. Laborat. der Rijks-Veeartsenijschool.
September 1889.

WIJNSTEENZUUR AETHYL

IN ZIJNE

VERHOUDING TOT NATRIUM- EN KALIUM-AETHYLAAT

DOOR

E. MULDER.

Eenige scheikundigen *) maakten wel de inwerking van natrium en natrium-aethylaat, zoo ook van kalium- en kalium-aethylaat op wijnsteenzuur aethyl tot een punt van onderzoek, maar schijnen geen produkten te hebben afgezonderd van genoegzaam zuiveren aard, en hebben dan ook geen analysen medegedeeld, niet medegerekend een bepaling van natrium van een lichaam, dat buiten twijfel was wijnsteenzuur natrium-aethyl: $C_2H_5O.CO.CH.OH.CH.OH$ $CO.ONa$ (zie later). Eenigen tijd geleden †) heeft men de uitkomsten van eenige analysen medegedeeld van prodrukten, verkregen bij inwerking van natrium- en kalium-aethylaat op wijnsteenzuur aethyl, maar het schijnt, dat het product van inwerking onder afkoeling, eenvoudig in hoofd-

*) Zie W. H. PERKIN: *Journ. of the Chem. Soc. of London.* New Series. Vol. V. 138 (1867), *Ann. Ch. Ph.* Suppl. 5, 291 *et Dict. Wurtz art. tartriques* (éthers) p. 244.

Verder: LASSER COHN: *Ber.* 20 *S.* 2003 (1887).

†) Zie *Recueil* T. VII. 338.

zaak is geweest wijnsteenzuur kalium-aethyl: $C_2H_5O.CO.CH.OH.CH.OH.CO.OK$. De verbinding ontstaan bij de primaire reactie was blijkbaar omgezet als gevolg eener secondaire reactie. Voor deze veronderstelling pleit ook het feit, dat het lichaam, gemaakt met natrium- en kalium-aethylaat, aanvankelijk gedeeltelijk oplosbaar was in alkohol en vervloeibaar, na eenigen tijd niet meer het geval. Men begrijpt, dat een weinig water hier de omzetting veroorzaakt. Ten einde dit na te gaan, heeft men met *zuiveren* en met *gewonen abs. alkohol* gewerkt onder overigens gelijke omstandigheden; en in de volgende proeven opgelost 1 gr. kalium in 15 gr. *zuiveren* alkohol en deze oplossing gedaan bij 5,26 gr. wijnsteenzuur aethyl (overgehaald in een gedeeltelijk luchtledig en zuiver) opgelost in 10 gr. zuiveren alkohol, overeenstemmende met een verhouding tusschen kalium en wijnsteenzuur aethyl uitgedrukt door K en 1 mol. wijnsteenzuur aethyl, terwijl dezelfde proef werd gedaan met gewonen abs. alkohol. Welnu, met zuiveren alcohol ontstond slechts een onbeduidend afzetsel, terwijl gewone abs. alkohol na eenigen tijd staans betrekkelijk veel deed afzetten van een krystallijne verbinding, wier samenstelling overeenkomt met die van het wel bekende wijnsteenzuur kalium-aethyl. Een hoeveelheid van 5 gr. wijnsteenzuur aethyl behoeft slechts 0,41 gr. water om met kalium en (zuiveren) alkohol in wijnsteenzuur kalium-aethyl te worden omgezet. Werkt men derhalve met kalium-aethylaat, gemaakt met gewonen abs. alkohol, zoo kan het grootste gedeelte of alles eenvoudig wezen wijnsteenzuur kalium-aethyl in plaats van kalium-wijnsteenzuur aethyl. Later zal blijken, dat hetzelfde geldt van natrium-aethylaat, gemaakt met gewonen abs. alkohol. Men moet dus werken met *zuiveren alkohol.*

Verder zal worden aangetoond, dat $\begin{matrix}\text{mono}\\ \text{di}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$-wijnsteenzuur kunnen bestaan. Bijgevolg heeft men b.v. voor monokalium-wijnsteenzuur aethyl de volgende omzettingen als gevolg der aanwezigheid van eenig water, uitgaande van wijnsteenzuur aethyl en kalium-aethylaat (later wordt de analyse van het eindproduct medegedeeld):

$$a.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + C_2H_5OK = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OK \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + C_2H_5.OH.$$

$$b.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OK \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + KOH.$$

$$c.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + KOH = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OK \end{array} + C_2H_5.OH.$$

Zooals bekend, wordt neutraal wijnsteenzunr aethyl reeds verzeept tot zure wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van water en betrekkelijk gemakkelijk (zoo b.v. door water der dampkringslucht), en bij gevolg veel sneller door bijtende potassa of soda.

Werkt men met een oplossing van wijnsteenzuur aethyl b.v. in benzol (of aether) met natrium of kalium, dan is het genoegzaam onmogelijk om zuivere produkten te verkrijgen onder omstandigheden tot nog toe gevolgd, vervloeibaar als deze produkten zijn, en geneigd om door de zuurstof der lucht te worden veranderd. Ook gaat de reactie na eenigen tijd zeer langzaam, eu wordt het metaal door een slijmige massa omgeven. Perkin, die deze methode volgde, deed geen analysen zijner produkten; en Lasser Cohn maakte wel afgeleiden met natrium en potassium naar deze methode (doch deed evenmin analysen), maar werkte bijkans uitsluitend met produkten verkregen met natrium- en kalium-aethylaat naar de methode genaamd die van Conrad en Limpach, evenwel werd naar het schijnt gewone abs. alkohol

gebruikt. Wat betreft het mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, zoo loste LASSER COHN wijnsteenzuur aethyl op in aether, en werd hier bijgevoegd de noodige hoeveelheid natrium-aethylaat (wel in alkoholische oplossing); de massa gelatineerde, en bij toevoeging van zeer weinig water, zette zich de natrium-verbinding (naar dezen scheikundige mononatrium-wijnsteenzuur aethyl) af. Aldus te werk gaande verkrijgt men een volkomen kleurloos product, zegt LASSER COHN. Een natrium-bepaling gaf 11,2 p.c., terwijl mononatrium-wijnsteenzuur aethyl vordert 10,1 p.c. (wijnsteenzuur natrium-aethyl vordert 11,5 p.c. natrium). Maar de geleiachtige massa was reeds wijnsteenzuur natrium-aethyl: $C_2H_5O.CO.CH.OH.CH.OH.CO.ONa$, dat meer consistent wordt door het toevoegen van eenig water. Want, zooals later zal blijken, is mononatrium-wijnsteenzuur-aethyl (vereenigd met alkohol) zeer oplosbaar in abs. aether, maar uit deze oplossing slaat gewone abs. alkohol een geleiachtige massa neder, die meer en meer consistent wordt (en wel zonder toevoegen van eenig water) en ten slotte krystallijn, terwijl zuivere alkohol uit deze aetherische oplossing niets neêrslaat; dit lichaam is wijnsteenzuur natrium-aethyl.

Aethylchloride als middel om de al of niet vorming van een natrium- en potassium-verbinding met natrium- en kalium-aethylaat aan te toonen. In vele gevallen bezit men in aethylchloride een betrekkelijk eenvoudig middel om te weten of er al of niet verplaatsing is geschied van een atoom waterstof (of meer) door een atoom natrium of kalium (of meer) onder den invloed van natrium- of kalium-aethylaat. Aethylchloride toch reageert op natrium- en kalium-aethylaat bij gewone temperatuur zoodanig, dat, zooals bekend is, ontstaan aether en natrium- of kalium-chloride (in zuiveren alkohol genoegzaam onoplosbaar), terwijl vele natrium- en kalium-verbindingen niet worden ontleed door aethylchloride onder dezelfde omstandigheden, en bij gevolg geen natrium- of kalium-chloride doen ontstaan.

De natrium- of kalium-verbindingen, gevormd ten koste van natrium- of kalium-aethylaat, kunnen onoplosbaar zijn in alkohol. In dit geval wordt er de vereischte hoeveelheid

aethylchloride aan toegevoegd, het geheel gedaan in een buis en daarna toegesmolten. Als getuige wordt een alkoholische oplossing van natrium- of kalium-aethylaat genomen met aethylchloride van dezelfde concentratie, en geplaatst onder dezelfde omstandigheden.

Heeft men te doen met verbindingen van natrium en kalium, die in alkohol onoplosbaar zijn, dan moet, na een behoorlijk contact met natrium- of kalium-aethylaat, worden gefiltreerd, en bij het filtraat aethylchloride worden gedaan.

Het is duidelijk, dat de vorming van een natrium- of kalium-verbinding het ontstaan van een secondaire reactie niet buitensluit. Het niet gevormd worden van een natrium- of kalium-verbinding is nimmer twijfelachtig, slechts kan de snelheid der reactie (afhankelijk van de concentratie, de temperatuur en de spanning van substitutie) meer of min wijziging ondergaan. Tot nog toe heeft men in plaats van aethylchloride geen ander lichaam kunnen vinden, dat dezelfde voordeelen aanbiedt.

Aethylchloride als middel om de vorming van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl aan te toonen. In een reageerbuis wordt 0,29 gr. natrium opgelost in 6 gr. zuiveren alkohol, en deze oplossing gedaan bij 2,63 gr. wijnsteenzuur aethyl zich bevindende in een uitgetrokken buis, daarna volgt ongeveer 1 gr. aethylchloride, terwijl vervolgens de buis wordt toegesmolten. De verhouding is bijgevolg die van 1 mol. wijnsteenzuur aethyl, Na en C_2H_5Cl. De buizen zijn aanvankelijk gereinigd met zuiveren alkohol.

Als getuige neemt men natrium, alkohol en aethylchloride in dezelfde verhouding, het geheel in een buis, daarna toegesmolten. De getuige doet weldra chloornatrium afzetten, en na vele dagen is de reactie bij gewone temperatuur geeindigd. De buis daarentegen met wijnsteenzuuraethyl doet geen chloornatrium ontstaan, zelfs na eenige maanden te hebben gestaan is geen spoor chloornatrium gevormd (alleen wordt de oplossing meer en meer gekleurd, tevens het geval zonder de aanwezigheid van aethylchloride).

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl: $C_2H_5O.CO.CH.ONa.CH.OH.CO.OC_2H_5$.

I. Er werd uitgegaan van 0,29 gr. natrium opgelost in 6 gr. zuiveren alkohol, met 2,67 gr. wijnsteenzuur aethyl (dus 0,04 gr. in overmaat, zie vroeger), het geheel in een kleine retort (gewasschen met zuiveren alkohol), vereenigd met een buis gevuld met zwavelzuur als absorbeerend lichaam. De drukking bedroeg als minimum ongeveer 12$^{mm.}$ en als maximum 50$^{mm.}$. Na ongeveer 24 uur werd de retort (gesloten met een glazen stop) gewogen (de grootste hoeveelheid alkohol was in de eerste 6 uur verdampt), het gewicht bedroeg 4,693 gr.. Opnieuw in verbinding gebracht met de kwikpomp, werd het retortje gewogen na ongeveer 24 uur, en zoo vervolgens tot het gewicht genoegzaam constant bleef. Het oorspronkelijk gewicht was dat van 0.29 gr. natrium + 2,67 gr. wijnsteenzuur aethyl + 6 gr. alkohol = 8,96 gr.. Hiervan aftrekkende de kleine overmaat van ester, te weten 0.04 gr., blijft 8,92 gr. voor het gezamentlijke gewicht. Aldus berekend, werd achtereenvolgens gevonden:

		Verlies:	
Oorspronk. gew.	8,92 gr.	—	(de massa is vloeibaar).
Na 24 uur	4,553 »	4,367 gr.	(de massa is vrij consistent).
» » »	4,063 »	0,484 »	(de massa zwelt op en wordt vast).
» » »	3,0992 »	0,9698 »	(de massa is vast).
» » »	2,9779 »	0,1213 »	
» » »	2,9305 »	0,0475 »	

Berekend op 0,29 gr. natrium geeft 1 mol. mononatriumwijnsteenzuur aethyl voor eindgewicht verbonden met:

$3(C_2H_5.OH)$	4,612	gr.
$2(C_2H_5.OH)$	4,032	»
$C_2H_5.OH$	3,452	»
Zonder alkohol	2,873	»

Het eindproduct levert derhalve een verschil op met de theorie van 2,9305 — 2,873 = 0.0575 gr. (zie hierboven).

II. Opnieuw werd uitgegaan van 0,29 gr. natrium, maar van 2,75 gr. wijnsteenzuur aethyl, dus een overmaat van 0,12 gr. (zie vroeger) en 6 gr. zuiveren alkohol. De druk was die van 14mm. tot ongeveer 50mm. Dezelfde methode werd gevolgd. Het totale gewicht bedroeg 0,29 + 2,75 + 6 = 9,04 gr.. Het te veel aan ester daarvan aftrekkende, werd achtereenvolgens gevonden:

		Verlies:
Oorspronkelijk gewicht	8,92 gr.	—
Na 24 uur	4,7205 »	4,1995 gr.
» » »	4,277 »	0,4434 »
» 2 × 24 »	3,5895 »	0,6875 »
» 24 »	3,4245 »	0,16 »
» 2 × 24 »	3,2585 »	0,171 »
» 3 × 24 »	3,107 »	0,1515 »
» 24 »	2,929 »	0,178 »

De massa zwol niet op, en bijgevolg werd meer tijd vereischt ter dissociatie der verbinding van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, wier bestaan wel moet worden aangenomen. In een voorloopige proef het retortje verhittende op een waterbad (de grootste hoeveelheid alkohol was reeds verjaagd), had er bij een temperatuur van het bad van ongeveer 45° een soort ontploffing plaats, wel als gevolg eener snelle ontleding van gemelde verbinding met alkohol, reden te meer om bij latere proeven den alkohol bij gewone temperatuur te doen ontwijken, dat aan geen bezwaar onderhevig is.

III. De verhouding was die van 0,29 gr. natrium, 2,68 gr. wijnsteenzuur aethyl (derhalve slechts te veel 0,05 gr.) en 6 gr. zuiveren alkohol. De druk was veelal die ongeveer van 3mm tot een maximum van 30mm. De overmaat aan ester aftrekkende, vond men:

		Verlies:	
Oorspronkelijk gewicht	8,92 gr.	—	
Na 24 uur	4,618 »	4,302 gr.	(de massa was vrij consistent).
» 3 × 24 »	2,886 »	1,732 »	(de massa zwol aanvankelijk een weinig op)

De massa was nog minder gekleurd dan met de vorige produkten het geval was, en zelfs genoegzaam kleurloos, wel een gevolg van het meer verwijderd zijn der lucht (ook werd het zwavelzuur der buis ververscht).

Lettende op de verkregen uitkomsten, schijnt het vrij duidelijk, alhoewel niet te beschouwen als bewezen, dat mononatrium-wijnsteenzuur aethyl zich als *maximum* verbindt met 3 mol. alkohol op 1 mol. ester, want, berekend op 0,29 gr. natrium verkrijgt men voor het gewicht van het product na 24 uur (de alkohol wordt dan veel langzamer verwijderd):

		$C_2H_5O.CO.CH.ONa.CH.OH.CO.OC_2H_5.3(C_2H_5.OH)$ eischt:
	Gevonden:	
I.	4,553 gr.	
II.	4,7205 »	
III.	4,618 »	
Gemidd.	4,6305 gr.	4,612 gr..

Gelijk bij natrium-aethylaat $C_2H_5 . ONa$, zou dan in onze verbinding de rest $CH . ONa$ de eigenschap bezitten om alkohol vast te leggen, terwijl het wel aan geen twijfel onderhevig kan zijn, of de alkohol zal dáár worden gebonden waar zich de rest $CH . ONa$ bevindt, te weten in het midden der keten.

De massa bezit een glasachtig aanzien, en is, zooals gezegd, vooral van de laatste bereiding, genoegzaam kleurloos, en bezit alleen een zeer zwak gele kleur. Het lichaam is zeer oplosbaar in zuiveren alcohol, schijnt onoplosbaar in abs. aether en weinig oplosbaar in benzine. Het is zeer vervloeibaar, terwijl de druppels gevormd weldra krystallen doen ontstaan van wijnsteenzuur natrium-aethyl. Daarentegen is het product verbonden met alkohol (zij dat met ongeveer 1 mol.) zeer oplosbaar in aether en benzine.

a. Een hoeveelheid van 0,5814 gr. der stof (III) gaf 0,8843 gr. kooldioxyde en 0.3248 gr. water.

b 0,5948 gr. der stof gaf 0,9021 gr. kooldioxyde en 0,3282 gr. water.

Berekend op 100 gew.-d heeft men:

	a.	b.	Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl $C_2H_5O.CO.CH.ONa.CH.OH.CO.OC_2H_5$ bevat:
Koolstof	41,5	41,4	42,1
Waterstof	6,2	6,1	5,7.

De kleine overmaat van wijnsteenzuur aethyl oefent geen' noemenswaardigen invloed uit op de samenstelling van het product. Een wasschen met abs. aether zou geen voordeel aanbieden, aangezien de massa te hygroscopisch is, om aan de lucht tot poeder te kunnen fijn gewreven worden. Bij het doen der analyse wordt dan ook de stof met het mengsel van chroomzuur lood en kalium-dichromaat in een mortier fijngewreven. Zelfs alzoo te werk gaande is het niet wel mogelijk, om een merkbare fout te ontgaan. Dit is vooral het geval, indien de te analyseeren stof betrekkelijk nog al is verdeeld, zooals het geval was met bereiding II.

a. Een hoeveelheid van 0,3735 gr. dezer stof gaf 0,5512 gr. kooldioxyde en 0.2055 gr. water.

b. 0,3347 gr. gaf 0,4963 gr. kooldioxyde en 0,1798 gr. water, evereenkomende op 100 gew.-d. met:

	a.	b.
Koolstof	40,2	40,1
Waterstof	6,1	6,0.

Ook een deel der bereiding III, dat meer verdeeld was, gaf een lager koolstof-gedeelte.

a. 0,8201 gr. hiervan gaf 1,2202 gr. kooldioxyde en 0,4343 gr. water.

b. 0,9826 gr. gaf 1,4483 gr. kooldioxyde en 0,5191 gr. water.

Op 100 gew.-d. overeenstemmende met:

	a.	b.
Koolstof	40,6	40,2
Waterstof	5,9	5,9.

Over de omzetting van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl in wijnsteenzuur natrium-aethyl. Bij een oplossing van 0,29 gr. natrium, 6 gr. zuiveren alkohol en 2,73 gr. wijnsteenzuur aethyl (dus een te veel van 0,1 gr.) werd gewone abs. alkohol (van 98,8 p. c. bij 15^0) beginnende met 5,58 gr. (na eenige uren was nog geen neêrslag ontstaan), daarop 5,998 gr. gedaan; het geheel werd een geleiachtige massa van zeer fijne krystallen. Na wasschen met gewonen abs. alkohol, en verdampen van den alkohol, deed de massa zich voor als een krystallijn poeder, bedragende ongeveer 2,3 gr.. Dit lichaam is niet vervloeibaar, zeer oplosbaar in water en weinig oplosbaar in gewonen abs. alkohol.

Een hoeveelheid van 0,5964 gr. dezer stof (met opzet niet nader gezuiverd, daar men zich dan zou moeten bedienen van water en neêrslaan met alkohol) gaf 0,7716 gr. kooldioxyde en 0,2554 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

	gevonden	wijnsteenzuur natrium-aethyl vordert:
koolstof	35,3	35,9
waterstof	4,7	4,5.

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl maakt zich bijgevolg meester van het water aanwezig in gewonen abs. alkohol teneinde te worden omgezet in wijnsteenzuur natrium-aethyl (deze eigenschap zou men kunnen nemen als grondslag ter bepaling van water in alkohol), aldus voortestellen:

$$a.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} = NaOH$$

$$b.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5. \end{array} + C_2H_5.OH$$

In verband met het vroeger medegedeelde blijkt ook hieruit zeer duidelijk, dat de oorspronkelijke stof in werkelijkheid is mononatrium-wijnsteenzuur aethyl. De verhouding van dit lichaam tegenover aethylchloride en aethyliodide toont dit nog nader aan.

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, bevrijd van alkohol, tegenover aethylchloride. In een buis werd van de verbinding gedaan, vervolgens aethylchloride, en daarna de buis toegesmolten; er werd ongeveer 0,3 gr. der stof genomen op 2 gr. aethylchloride. Er werd betrekkelijk langen tijd geschud, terwijl het *mononatrium-wijnsteenzuur aethyl oploste* met een zwak gele kleur. Er had hoegenaamd geen vorming plaats van chloornatrium; na eenigen tijd zette zich evenwel blijkbaar een andere stof af in krystallijnen staat, terwijl het in oplossing geblevene na verdampen van het aethylchloride een meer of min consistente massa terugliet. Daarenboven werd het ontstaan waargenomen van een lichaam met doordringenden reuk.

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl tegenover aethyliodide. Met 't oog ook op de proeven van Perkin en Lasser Cohn werden deze stoffen in een buis gedaan, die vervolgens werd dicht gesmolten. Het mononatrium-wijnsteenzuur aethyl begint met te drijven op het aethyliodide (daarentegen is het zwaarder dan aethylchloride); bij schudden wordt het *geheel opgelost*, en wel 0,27 gr. der stof in 2 gr. aethyliodide (blijkbaar kan meer worden opgenomen). Zelfs na maanden was geen ioodnatrium afgezet, maar alleen de oplossing meer of min gekleurd. Perkin *) verhitte een lichaam, naar dezen scheikundige te beschouwen als te zijn mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, met aethyliodide, en meent waarschijnlijk monoaethyl-wijnsteenzuur aethyl te hebben verkregen, maar dit product werd niet geanalyseerd. Lasser Cohn veronderstelt, dat het lichaam van Perkin was wijnsteenzuur aethyl hervormd uit mononatrium-wijnsteenzuur aethyl. Men meent evenwel, dat dit wel was wijnsteenzuur aethyl, maar ontsnapt aan de inwerking van het natrium bij de reactie

*) l. c.

van dit metaal op wijnsteenzuur aethyl, opgelost in benzine (het mononatrium-wijnsteenzuur was evenmin geanalyseerd).

Lasser Cohn meent dezelfde reactie te hebben gedaan met aethylbromide, maar deze scheikundige nam wijnsteenzuur aethyl met natrium-aethylaat in gewonen abs. alcohol, onder welke omstandigheden wijnsteenzuur natrium-aethyl ontstaat (afgeleid van mononatrium-wijnsteenznur aethyl), zooals vroeger werd aangetoond. In verband met het voorgaande moge nog het volgende worden medegedeeld.

Wijnsteenzuur natrium-aethyl tegenover aethylchloride en aethyliodide. Een hoeveelheid van 0,2 van dit zout en 2 gr. aethylchloride werd in een buis gedaan en dit toegesmolten. Zelfs na maanden was alles onveranderd gebleven. Op 2 gr. aethyliodide werd genomen 0,1 gr. van het zout, en ook dit bleef onveranderd. Zooals trouwens te wachten was, bestaat er een groot verschil in de scheikundige natuur van:

mononatrium-wijnsteenzuur aethyl:

$$C_2H_5O,\ CO,\ CH.ONa.\ CH,\ OH,\ CO.OC_2H_5$$

wijnsteenzuur natrium-aethyl:

$$C_2H_5O,\ CO,\ CH.OH,CHOH,\ COONa.$$

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing tegenover aethylchloride bij verhitten. Men ging uit van 0,29 gr. natrium, 6 gr. zuiveren alkohol en 2,63 gr. wijnsteenzuur aethyl met 1 gr. aethylchloride, het geheel in een buis, daarna toegesmolten. Na bij ongeveer 50^0 gedurende 2 uur te zijn verwarmd had zich de oplossing een weinig gekleurd, welke verkleuring toenam na een meer langdurig verhitten en bij hoogere temperatuur; chloornatrium werd niet gevormd. Bijkans dezelfde graad van kleuring neemt men waar, indien een oplossing van natrium-aethylaat met en zonder wijnsteenzuur aethyl wordt verhit, onder overigens gelijke omstandigheden (behalve dat aethylchloride niet aanwezig is). Men zou de vraag kunnen doen, of er wellicht natrium-aethylaat ontstaat ten koste van het mononatrium-wijnsteenzuur aethyl (met natrium-aethylaat gemaakt), maar in dat geval zou er chloornatrium moeten ontstaan. Het

besluit is derhalve, dat mononatrium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing onder gemelde omstandigheden wordt ontleed. Hetzelfde geschiedt ook bij gewone temperatuur, maar vereischt dan meer tijd. Het is dus zeer wel mogelijk, dat het bij verhitten is ontleed alvorens de noodige warmtegraad is ingetreden, om de rest Na te verplaatsen door die van $C_2 H_5$.

Aethylchloride als middel om de vorming van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl aan te toonen. Dezelfde hoeveelheid natrium, zuivere alkohol en aethylchloride werden genomen, maar de helft van het wijnsteenzuur aethyl in de proef met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl. Vorming van natriumchloride werd niet waargenomen. De getuige evenwel, die hetzelfde inhield, uitgezonderd wijnsteenzuur aethyl, liet weldra van dit zout afzetten.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl: $C_2 H_5 O. C O. C H. O Na. C H. O N a, C O. O C_2 H_5$. I. Er werd uitgegaan van 0,29 gr. natrium, 1,317 gr. wijnsteenzuur aethyl (bijgevolg nagenoeg de helft van 2,63 gr., te weten 1,315 gr.) en 6 gr. zuiveren alkohol, gedaan in een retortje, in verbinding gebracht met een buis met zwavelzuur als absorptie-middel voor den alkohol. De massa wordt weldra geleiachtig (tevens het geval uitgaande van de dubbele hoeveelheid alkohol). Het minimum in druk bedroeg 12mm., het maximum 50mm.. Na aftrekken der kleine overmaat aan wijnsteenzuur aethyl, werd gevonden:

			verlies:	
oorspronkelijk gewicht	7,605	gr.	———	(de massa wordt
na 2 × 24 uur	3,6625	»	3,9445 gr.	geleiachtig)
» 24 »	2,797	»	0.8655 »	(de massa is vast)
» 24 »	2,4025	»	0,3945 »	(de massa vangt aan met gekleurd
» 3 × 24 »	1,9145	»	0,488 »	te worden)
» 3 × 24 »	1,8285	»	0,086 »	(de massa kleurt zich meer en meer geel-bruin).

De gekleurde massa bezat geheel den reuk naar caramel

(overigens in 't algemeen vertoonende de eigenschappen der volgende produkten, die slechts zeer weinig reuk vertoonden).

0,5452 gr. dezer stof gaf 0,7352 gr. kooldixyde en 0,2914 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof 36,8
waterstof 6,0.

II. In 't vervolg werd zooveel mogelijk gewerkt in een atmospheer van waterstof. De verhouding was die van 0,29 gr. natrium, 1,313 gr. wijnsteenzuur aethyl (dus 0,002 gr. minder dan de theorie vereischt, te weten 1,315 gr.) en 6 gr. zuiveren alkohol; het geheel in een buis en deze vereenigd met een buis gevuld met zwavelzuur. Zoodra de grootste hoeveelheid alkohol was verdampt, bleef de druk ongeveer 1^{mm} (gebruik makende van een andere kwikpomp). Er werd gevonden:

oorspronkelijk gewicht	7,603 gr.	———	(de massa wordt geleiachtig)
na 2 × 24 uur	2,152 »	5,451 gr.	(de massa is vast)
» 3 × 24 »	1,666 »	0,486 »	
» » »	1,637 »	0,029 »	

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, verondersteld bevrijd te zijn van alkohol, zou vorderen als eindproduct een hoeveelheid van 1,575 gr. (gevonden werd 1,637 gr. bijgevolg een verschil van 1,637 — 1,575 = 0,062 gr.). Verbonden met een hoeveelheid alkohol aangegeven in mol. op 1 moltartraat heeft men:

6 ($C_2H_5.OH$)	zou vorderen	3,31 gr.	(zie bereiding I)
2 ($C_2H_5.OH$)	» »	2.155 »	
$C_2H_5.OH$)	» »	1,865 »	
zonder alkohol	» »	1,575 »	

De massa is amorph en bijkans kleurloos, alleen bezit deze een zwak gele tint.

Een hoeveelheid van 0,7408 gr. gaf 0,9661 gr. kool-

dioxyde en 0,3432 gr. water op 100 gew.-d. overeenkomende met:

		$C_2H_5O.CO.CH.ONa.CH.ONa.CO.OC_2H_5$ vordert:
koolstof	37,4	36,3
waterstof	5,4	4,8

In een andere bereiding gaf 0,29 natrium met 1,3155 gr. wijnsteenzuur aethyl en 6 gr. zuiveren alkohol, in een gedeeltelijk ledig na 5 × 24 uur bij gewone temperatuur en 2 uur bij ongeveer 63° onder overigens dezelfde omstandigheden, als eindproduct 1,6807 gr. (na opnieuw 2 uur te zijn verhit genoegzaam onveranderd blijvende, te weten 1,666 gr.). Een hoeveelheid van 0,6388 gr. stof gaf 0,8654 gr. kooldioxyde en 0,3071 gr. water op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	36,9
waterstof	5,3.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl is zeer vervloeibaar (met betrekking tot het analyseeren geldt genoegzaam hetzelfde als van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl). De druppels gevormd, doen weldra kristallen afgezet worden van wijnsteenzuur dinatrium. Het is zeer oplosbaar in water, uit welke oplossing hetzelfde zout zich afzet, de vorming waarvan door deze vergelijkingen kan worden voorgesteld:

$$a.\ \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH.$$

$$b.\ \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} (B) + C_2H_5OH$$

$$c.\ \begin{array}{l} CO.ONaH_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH$$

$$d\ \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.ONa. \end{array} + C_2H_5.OH$$

De verbinding (B) is nog onbekend en isomeer met de volgende (tevens onbekend):

$$\begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.ONa, \end{array}$$

die blijkbaar onder deze omstandigheden niet zal gevormd worden. Het lichaam beschouwd als zijnde dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, zwelt op met zuiveren alkohol en geeft een geleiachtige massa gelijk in den aanvang bij de bereiding het geval is. Hierin heeft men dus wel een contrôle voor de structuur dezer stof, terwijl er tevens als waarschijnlijk uit volgt, dat dinatrium-wijnsteenzuur aethyl zich verbindt met alkohol. Neemt men het gewicht van het product, nadat de massa 2 × 24 uur in het gedeeltelijk gasledig had verkeerd, dan werd in de volgende proeven onder overigens gelijke omstandigheden gevonden:

	2,152	gr. (zie II)
	2,2155	»
	2,031	»
	2,360	»
gemiddeld	2,189	»

De formule van 1 mol. dinatrium-wijnsteenznur aethyl met 2 ($C_2H_5.OH$) vordert 2,155 gr.; waarschijnlijk zal deze echter zich met meer alkohol kunnen vereenigen (daar genoemde verbinding niet geleiachtig is, maar vast).

Wijnsteenzuur aethyl met 3 ($C_2H_5.ONa$) *op* 1 *mol.*. Ook ditmaal was de verhouding van natrium en alkohol dezelfde, maar de hoeveelheid wijnsteenzuur aethyl herleid tot een derde. De massa, aanvankelijk vloeibaar, stolde weldra tot een gelei gelijk het geval is uitgaande van de verhouding van 2 (C_2H_5ONa) op 1 mol. tartraat (evenzoo bewaard in een buis, daarna toegesmolten).

Aethylchloride tegenover dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing. Er werd uitgegaan van dezelfde verhouding als bij de bereiding van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, en er bij gedaan aan aethylchloride zóóveel als ter ontleding werd vereischt. Na geruimen tijd te zijn bewaard was de massa *rood-bruin* gekleurd. Hetzelfde vertoonde zich uitgaande van 3 (C_2H_5ONa) en 1 mol. wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride. Het schijnt dus, dat de aanwezigheid van aethylchloride niet zonder invloed is op de verkregen uitkomst.

Aethylchloride tegenover dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevrijd van alkohol. Dit lichaam bezit de vooral met 't oog op zijn structuur merkwaardige eigenschap van oplosbaar te zijn in aethylchloride (waartoe echter veel tijd wordt vereischt); er werd ongeveer 0,5 gr. tartraat genomen op 2 gr. aethylchloride.

Aethyldiodide tegenover dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevrijd van alkohol. Met aethyliodide geeft het een geleiachtige massa, lost daarin evenwel niet op; integendeel wordt deze met den tijd consistenter, terwijl zij een melkwit aanzien verkrijgt; er werd uitgegaan van ongeveer 0,8 gr. tartraat op 3 gr. aethyliodide.

Di-natrium wijnsteenzuur aethyl bevrijd van alkohol tegenover aether. Het lichaam is onoplosbaar in (abs.) aether (als altijd bij gewone temperatuur).

Chonokalium-wijnsteenzuur aethyl: $C_2H_5O.COCH.OK.CH.OH.CO.OC_2H_5$. Er werd uitgegaan van dezelfde mole-

culaire hoeveelheid als bij de bereiding van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, en bijgevolg genomen 0,5 gr. kalium op 6 gr. zuiveren alkohol en 2,63 gr. wijnsteenznur aethyl. Uit de oplossing zet zich na eenige uren een kleine hoeveelheid of eener krystallijne stof (blijkbaar wijnsteenzuur kalium-aethyl $C_2H_5O.CO.CH.OH.CH.OH.CO.OK$, zie later). De massa wordt langzamerhand meer en meer gekleurd, in sterkere mate dan het geval is met de overeenkomstige natrium-verbinding; voor een deel wordt zij geleiachtig (als naar gewoonte was het geheel bevat in een buis, daarna dichtgesmolten).

Omzetting ran monokalium-wijnsteenzuur aethyl in wijnsteenzuur kalium-aethyl. Er werd genomen 3,262 gr. wijnsteenzuur aethyl (0,102 gr. te veel), 7 gr. zuivere alkohol en 0,6 gr. kalium, dus alles in de verhouding uitgedrukt door K en 1 mol. ester. Bij deze oplossing werd gedaan 6,232 gr. gewone abs. alkohol (zie vroeger), men liet het geheel eenige uren staan, schonk af en waschte de gevormde krystallijne massa met gewonen abs. alkohol.

Een hoeveelheid van 0.4844 gr. stof (met opzet niet gezuiverd) gaf 0,5988 gr. kooldioxyde en 0,2055 gr. water. Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

		$C_2H_5O.CO.CH.OH.CH.OH.CO.OK$ vordert:
koolstof	33,7	33,3
waterstof	4,7	4,2.

Men deed bij het filtraat op nieuw (5,83 gr.) gewonen abs. alkohol, waardoor andermaal een afzetsel werd gevormd; maar aangezien de massa tamelijk geleiachtig was geworden (eenigermate ook aanvankelijk het geval), werd nog 10 gr. alkohol toegevoegd, waardoor het geheel minder geleiachtig werd en bijgevolg gemakkelijker te filtreeren. Die geleiachtige massa is blijkbaar dezelfde verbinding, maar in meer verdeelden staat, of wellicht nog meer of min met alkohol verbonden (zie vroeger).

Aethylchloride als middel om de vorming aan te toonen van monokalium-wijnsteenzuur aethyl. De moleculaire verhouding

was weder dezelfde als bij de overeenkomstige natrium-verbinding. De massa aanvankelijk vloeibaar, wordt ten deele geleiachtig, tevens het geval uitgaande van de dubbele hoeveelheid alkohol. Vorming van chloorkalium heett niet plaats, wel het geval met den getuige.

Dikalium-wijnsteenzuur aethyl: $C_2H_5O.CO.CH.OK.CH.OK.CO.OC_2H_5$. De moleculaire verhouding is dezelfde, alleen werd de helft van wijnsteenzuur aethyl genomen. De massa aanvankelijk vloeibaar, wordt geleiachtig en langzamerhand meer en meer gekleurd, en wel in een sterkere mate dan het geval is met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing.

Aethylchloride als middel om de vorming aan te toonen van dikalium-wijnsteenzuur aethyl. Men neemt de moleculaire verhouding van zoo even, en een hoeveelheid aethylchloride uitgedrukt door K en C_2H_5Cl. De massa aanvankelijk vloeibaar wordt, gedeeltelijk geleiachtig, en meer en meer gekleurd. Chloorkalium wordt niet gevormd.

Monokalium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing tegenover aethylchloride bij verhitten. De verhouding was dezelfde, te weten die van 0,5 gr. kalium, 6 gr. alkohol (zuiver) en 2,63 gr. wijnsteenzuur aethyl met 1 gr. aethylchloride. Gedurende 2 uur bij ongeveer 50° verhit in een toegesmolten buis, was de oplossing tamelijk gekleurd; langer verhittende of bij hoogere temperatuur tot ongeveer 100° werd de kleur sterker, maar vorming van chloorkalium had toch niet plaats. Ongeveer hetzelfde geschiedt bij verhitten eener oplossing van kalium-aethylaat met wijnsteenzuur aethyl, en als zoodanig. Men moet aannemen, dat er geen kalium-aethylaat ontstaat, want in dat geval zou chloorkalium worden gevormd bij aanwezigheid van aethylchloride. Bij gevolg komt men tot het besluit, dat monokalium-wijnsteenzuur aethyl onder gemelde omstandigheden wordt ontleed, hetwelk tevens het geval is bij gewone temperatuur maar dan na geruimen tijd te hebben gestaan. Eigentlijk mag niet worden gezegd, dat monokalium-wijnsteenzuur aethyl niet wordt ontleed door aethylchloride in alkoholische oplossing bij verhitten, want het zou wel eens geheel ont-

leed kunnen zijn, alvorens de temperatuur die was, welke een subsitutie toeliet van de rest K door die van C_2H_5.

Over mono- en dikalium-wijnsteenzuur aethyl van alkohol bevrijd, zal in een volgende Verhandeling mededeeling worden gedaan.

BESLUIT.

1. Tot nog toe trachtte men te vergeefs het mono- en di- $\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$ wijnsteenzuur aethyl af te zonderen (dat blijkt uit zekere eigenschappen in deze Verhandeling medegedeeld, bijv. de oplosbaarheid van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethyliodide), onder anderen, omdat niet op voldoende wijze rekening werd gehouden met den storenden invloed der aanwezigheid van water. en, vooral wat betreft het di- $\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$ wijnsteenzuur aethyl (en wederom vooral in alkoholische oplossing), tevens van zuurstof (der lucht).

Mono- $\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$ wijnsteenzuur aethyl laten zich bezwaarlijk maken door inwerking van natrium of kalium op wijnsteenzuur aethyl opgelost in benzol (of abs. aether); di- $\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$ wijnsteenzuur aethyl laten zich wel aldus niet vervaardigen, tengevolge der beperkte oplosbaarheid, vooral betreffende $\left\{\begin{matrix}\text{natrium}\\ \text{kalium}\end{matrix}\right.$ wijnsteenzuur aethyl, in dit oplossingsmiddel. Deze verbindingen kunnen integendeel betrekkelijk gemakkelijk worden verkregen met een alkoholische oplossing van natrium- en kalium-aethylaat, maar men moet uitgaan van *zuiveren* alkohol, anders worden gemelde verbindingen ontleed (zie 2).

2. Wanneer een gedeeltelijk vacuum wordt gemaakt in

een oplossing in alkohol van natrium-aethylaat en wijnsteenzuur aethyl, genomen in een verhouding beantwoordende aan die van *mononatrium-wijnsteenzuur aethyl*, dan schijnt aanvankelijk een verbinding van dit lichaam met alkohol te worden afgezonderd (blijkbaar bevindt deze alkohol zich in het midden der keten); ten slotte blijft het lichaam terug van alkohol bevrijd. In dien toestand treedt het mononatrium-wijnsteenzuur aethyl op als een amorphe stof *) met zeer zwak gele tint. Het is zeer vervloeibaar, terwijl de druppels ontstaan aan de vochtige lucht weldra een krystallisatie vertoonen van wijnsteenzuur natrium-aethyl. In zuiveren alkohol is het lichaam zeer oplosbaar, maar gewone abs. alkohol doet hieruit gemeld zout afzetten, uit te drukken door de volgende vergelijkingen:

$$a.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH$$

$$b.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.ONa \end{array} + C_2H_5.OH.$$

Mononatrium-wijnsteenzuur aethyl is oplosbaar in aethylchloride en aethyliodide.

3. *Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl* †) kan evenzoo worden verkregen door natrium-aethylaat en wijnsteenzuur aethyl uitgaande van zuiveren alkohol, maar het wordt betrekkelijk gemakkelijk veranderd bij aanwezigheid van alkohol onder den invloed van de zuurstof der lucht, in meerdere mate

---

*) Zie deze Verhandeling p. 31.

†) l. c. 36.

dan het geval is met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl, zoodat men moet werken in een atmospheer van *waterstof*, terwijl het vacuum wordt gemaakt ter verwijdering van den alkohol. Ook deze verbinding schijnt zich aanvankelijk met alkohol te vereenigen. Van alkohol bevrijd is het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl een amorphe stof, een weinig geel gekleurd; het lichaam is zeer vervloeibaar, terwijl zich weldra krystallen vormen van wijnsteenzuur di-natrium. Het is zeer oplosbaar in water, uit welke oplossing dit zout wordt afgezet, uittedrukken door de volgende vergelijkingen;

$$a.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH$$

$$b.\quad \begin{array}{l} CO.OC_2H_5 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_5H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.GC_2H_5 \end{array} + C_2H_5.OH$$

$$c.\quad \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.ONa \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH$$

$$d.\quad \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CO.OC_2H_5 \end{array} + NaOH = \begin{array}{l} CO.ONa \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CA.OH \\ | \\ CO.ONa \end{array} + C_2H_5.OH$$

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl vormt met zuiveren *alkohol* een geleiachtige massa, zooals aanvankelijk bij de berei-

ding het geval is. Het doet evenzoo met *aethyliodide* een geleiachtige massa ontstaan. *In aethylchloride is dinatrium-wijnsteenzuur aethyl oplosbaar* *), zooals het geval is met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl (zie vroeger), een zeer kenmerkende eigenschap. Daarentegen is het onoplosbaar in abs. aether.

4. Mono- en dikalium-wijnsteenzuur aethyl †) zijn meer dan de overeenkomstige natrium-verbindingen vatbaar, om bij aanwezigheid van alkohol, onder den invloed van de zuurstof der lucht te worden ontleed.

Monokalium-wijnsteenzuur aethyl in alkoholische oplossing geeft met gewonen abs. alkohol wijnsteenzuur kalium-aethyl.

5. In *aethylchloride* §) bezit men in vele gevallen een betrekkelijk eenvoudig middel, om de al of niet vorming van een natrium- of kalium-verbinding door natrium- of kalium-aethylaat in alkoholische oplossing aan te toonen; terwijl dan natrium- en kalium-aethylaat met aethylchloride, in een andere proef onder overigens dezelfde omstandigheden, dient tot getuige.

Deze arbeid zal worden vervolgd, en de uitkomsten van dit onderzoek in een volgende Verhandeling worden medegedeeld.

Utrecht, 26 October 1889.

---

*) l. c. p. 40.

†) l. c. p. 40, 41 en 42.

§) l. c. 27, 28, 36, 41 en 42.

OVER TWEE VORMEN VAN ENERGIE BIJ ROLLENDE BEWEGING.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. Wanneer een lichaam glijdt of rolt nemen wij in het algemeen voortgaande en draaiende beweging waar; ieder dezer bewegingen heeft hare eigene snelheid en dus ook hare eigene kinetische energie.

Volgens de leer der dynamica, mag de energie der voortgaande beweging beschouwd worden als vereenigd (geconcentreerd) te zijn in het zwaartepunt; de energie der draaiende beweging is die, welke gewoonlijk de betrekkelijke (relatieve) energie ten opzichte van het zwaartepunt wordt genoemd. Beide vormen van kinetische energie volgen hunne eigene wetten, zoodat hunne verandering met den tijd voor ieder eene eigene uitdrukking heeft; beide energieën worden gedeeltelijk in elkander omgezet en gaan gedeeltelijk door andere transformatie voor de voortgaande of draaiende beweging van het lichaam verloren.

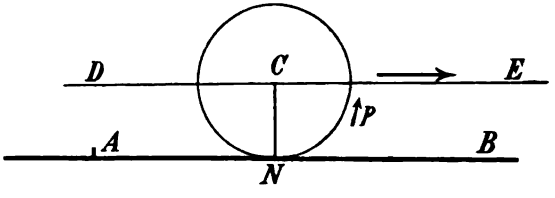
Bij onze zeer gebrekkige kennis van de verschijnselen der wrijving, meer bepaald van die der rollende wrijving, is iedere bijdrage tot de kennis van dit onderwerp van belang. Wij willen daarom thans onderzoeken, welke wetten de bovengenoemde energievormen volgen; hunne veranderingen, die niet moeilijk zijn optesporen, kunnen ons eenig licht geven op dit zoo duister gebied.

2. Een zwaar omwentelingslichaam wordt op een ruw horizontaal vlak geplaatst. De wrijvingscoëfficiënt voor dit

vlak zij bij glijdende wrijving μ. De omwentelingsas van het lichaam zij evenwijdig aan het vlak; de straal van den cirkel, volgens welken het lichaam het vlak raakt, zij a. Het lichaam ontvangt bij aanvang eene draaiende beweging om zijne horizontaal geplaatste as en eene voortgaande beweging langs het vlak loodrecht op die as. De snelheid der laatste beweging zij v, de hoeksnelheid der omwenteling zij ω; een punt van den rakenden cirkel heeft dus bij den aanvang eene draaingsnelheid $d = a\omega$.

Bij de nu volgende beweging zal zich de omwentelingsas evenwijdig aan zich zelve en aan het platte vlak verplaatsen en terwijl het lichaam om die as draait, zal elk punt der as en dus ook het zwaartepunt van het lichaam eene horizontale rechte lijn beschrijven in een verticaal vlak, dat loodrecht op de as staat. Trachten wij thans de snelheden dier twee bewegingen op een willekeurig tijdstip te bepalen.

De figuur stelt eene doorsnede vanhet lichaam met een vlak door zijn zwaartepunt C loodrecht op de as voor. De lijn $A\,N\,B$ is de doorsnede van dit vlak met het horizontale vlak, waarop het lichaam zich beweegt; de daaraan evenwijdige lijn $D\,C\,E$ wordt door het zwaartepunt beschreven. Op den tijd t heeft in N de aanraking plaats; zij op dit oogenblik x de afstand $A\,N$ van het raakpunt tot het vaste punt A; $\frac{dx}{dt}$ is de snelheid van het punt C; de hoeksnelheid ω van het omwentelingslichaam om zijne as wordt positief of negatief gerekend, naar gelang de draaing in den zin van den uurwijzer (zooals de pijl p aanduidt) of tegengesteld plaats vindt.



Is M de massa van het lichaam, k^2M zijn traagheidsmoment ten opzichte der omwentelingsas en g de versnelling der zwaartekracht, zoo volgt voor de bewegingsvergelijkingen, na het weglaten van den factor M,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu g \qquad k^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu g a \ldots . (1)$$

deze geven na integratie, daar c en $\frac{d}{a}$ de waarden van $\frac{dx}{dt}$ en van ω voor $t = 0$ zijn,

$$V = c - \mu g t \qquad \omega = \frac{d}{a} - \frac{\mu g a t}{k^2} \ldots (2)$$

Voeren wij thans uitdrukkingen in voor de beide vormen van kinetische energie. Voor de bewegingsenergie T' der voortgaande en voor T'', die der draaiende beweging, hebben wij,

$$T' = \frac{1}{2} M v^2 \qquad T'' = \frac{1}{2} M k^2 \omega^2 \ldots . . (3)$$

derhalve vinden wij, ingevolge (2), wanneer wij den factor $\frac{1}{2} M$ kortheidshalve achterwege laten en $\mu g = h$ stellen,

$$T' = (c - h t)^2 \qquad T'' = \frac{k^2}{a^2} (d - \frac{a^2}{k^2} h t)^2 , . . (4)$$

De eerste dezer waarden geeft op den tijd t de kinetische energie der voortgaande beweging of de energie van het zwaartepunt, waarin alle massa geconcentreerd wordt gedacht; de tweede waarde geeft de energie der draaiende beweging m. a. w. de betrekkelijke energie ten opzichte van het zwaartepunt.

Bij deze ontwikkeling hebben wij den stellig *zeer kleinen* weerstand tegen het rollen, wiens wetten bovendien geheel onbekend zijn, buiten rekening gelaten.

3. De aanvankelijke snelheden c en d, die geheel willekeurig zijn aangenomen, brengen het lichaam in het algemeen in *glijdende beweging*, die deels voortgaande, deels draaiende is. Deze bewegingstoestand wordt voortdurend gewijzigd tot op het tijdstip, dat het *rollen* intreedt, waarbij de lijn

of het punt, dat het lichaam met het vlak gemeen heeft, in oogenblikkelijke rust verkeert.

De voor het rollen noodige voorwaarde wordt blijkbaar gegeven door de vergelijking

$$v + a\omega = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

of ingevolge (2), wanneer wij het tijdstip, waarop het rollen intreedt door t_1 aanduiden, zal

$$c + d = \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \mu g t_1 = \frac{a^2 + k^2}{k^2} h t_1,$$

zoodat

$$h t_1 = \frac{k^2}{a^2 + k^2} (c + d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Van den tijd t_1 af zal, wanneer wij den kleinen weerstand tegen het rollen buiten rekening laten, de beweging *eenparig* zijn; T' en T'' zullen derhalve voor $t > t_1$ constant blijven. Hunne veranderingen vóór dat het rollen aanvangt en hunne eindwaarden bij het rollen zullen wij thans nader onderzoeken.

Brengt men den genoemden kleinen weerstand in rekening, zoo treedt bij het rollen eene bij benadering zeer langzaam eenparig vertraagde beweging in. Van den weerstand der lucht is bij dit alles afgezien.

4. Wij zullen de totale bewegingsenergie van het lichaam door T aangeven, zoodat steeds $T = T' + T''$ en zullen de indices 0 en 1 bezigen om de oogenblikken aanteduiden, waarop $t = 0$ en $t = t_1$ is.

De vergelijkingen (4) geven voor den aanvang

$$T_0' = c^2, \quad T_0'' = \frac{k^2}{a^2} d^2, \quad T_0 = \frac{a^2 c^2 + k^2 d^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

of, wanneer wij alles in T_0, de bij den aanvang aanwezige kinetische energie, uitdrukken,

$$T_0' = \frac{a^2 c^2}{a^2 c^2 + k^2 d^2} T_0, \quad T_0'' = \frac{k^2 d^2}{a^2 c^2 + k^2 d^2} T_0 \quad . \quad . \quad (7a)$$

Voor het tijdstip, waarop het rollen aanvangt, substitueeren wij in de vergelijking (4) voor $h\,t$ de waarde (6)

$$h\,t_1 = \frac{k^2}{a^2 + k^2}(c + d)$$

en vinden

$$\left.\begin{array}{c} T_1' = \dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{(a^2 + k^2)^2}, \quad T_1'' = \dfrac{k^2}{a^2}\,\dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{(a^2 + k^2)^2} \\ T_1 = \dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^2 (a^2 + k^2)}; \end{array}\right\} \cdot \quad (8)$$

dus, na invoering van T_0,

$$\left.\begin{array}{c} T_1' = \dfrac{a^2}{(a^2 + k^2)^2}\,\dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^2 c^2 + k^2 d^2}\,T_0, \\ T_1'' = \dfrac{k^2}{(a^2 + k^2)^2}\,\dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^2 c^2 + k^2 d^2}\,T_0, \quad T_1 = \dfrac{1}{a^2 + k^2}\,\dfrac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^2 c^2 + k^2 d^2}\,T_0 \end{array}\right\} (8a)$$

uit deze vergelijkingen blijkt, dat als het rollen aanvangt

$$\frac{T_1'}{T_1''} = \frac{a^2}{k^2},$$

zoodat de verhouding der beide energieën eene constante waarde behoudt, die onafhankelijk is van den aanvankelijken toestand, welke door de grootheden c en d bepaald is.

Zulks volgt ook terstond door op te merken, dat de vergelijkingen (3) wegens (5) geven:

$$T_1' : T_1'' = v^2 : k^2 w^2 = a^2 w^2 : k^2 w^2 = a^2 : k^2.$$

5. Voor de *vermindering* der energie van den aanvang tot het tijdstip, waarop het rollen begint, geven de formulen (7) en (8) na korte herleiding:

$$\left.\begin{array}{l} T_0' - T_1' = \dfrac{k^2}{(a^2 + k^2)^2}(c + d)\,\{(2a^2 + k^2)\,c - k^2 d\} \\ T_0'' - T_1'' = \dfrac{k^2}{(a^2 + k^2)^2}(c + d)\,\{(a^2 + 2k^2)\,d - a^2 c\} \\ T_0 - T_1 = \dfrac{k^2}{a^2 + k^2}(c + d)^2 \end{array}\right\} \cdot \quad (9)$$

Wanneer wij de *vermindering* der verschillende waarden der energie

$$T_0' - T_1', \quad T_0'' - T_1'' \text{ en } T_0 - T_1$$

door

$$\Delta T_1', \qquad \Delta T_1'' \text{ en } \qquad \Delta T_1$$

voorstellen, laten de uitdrukkingen (9) zich onder de volgende meer doelmatige vormen brengen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T_1' &= \frac{k^2}{(a^2+k^2)^2}\{(2a^2+k^2)c^2 + 2a^2cd - k^2d^2\} \\ \Delta T_1'' &= \frac{k^2}{(a^2+k^2)^2}\{-a^2c^2 + 2k^2cd + (a^2+2k^2)d^2\} \\ \Delta T_1 &= \frac{k^2}{a^2+k^2}(c+d)^2. \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

Voor den homogeenen bol, waar $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ is, worden deze waarden,

$$\left.\begin{aligned} \Delta T_1' &= \frac{1}{49}\{24c^2 + 20cd - 4d^2\} \\ \Delta T_1'' &= \frac{1}{49}\{-10c^2 + 8cd + 18d^2\} \\ \Delta T_1 &= \frac{1}{49}\{14c^2 + 28cd + 14d^2\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9a)$$

Opdat de uitdrukkingen $T_0' - T_1'$ en $T_0'' - T_1''$ positief zijn, is noodig, dat

$$c > \frac{k^2}{2a^2+k^2}d \text{ en } c < \frac{a^2+2k^2}{a^2}d,$$

dus

$$\frac{k^2}{2a^2+k^2}d < c < \frac{a^2+2k^2}{a^2}d \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Voor den bol gaan de waarden (9) over in

$$T_0' - T_1' = \frac{4}{49}(c+d)(6c-d)$$

$$T_0'' - T_1'' = \frac{2}{49}(c+d)(9d-5c)$$

$$T_0 - T_1 = \frac{2}{7}(c+d)^2$$

terwijl de voorwaarde (10) wordt

$$c > \frac{1}{6}d, \quad c < \frac{9}{5}d;$$

Voor waarden van c buiten die grenzen gelegen, zal een der energievormen T' of T'' vóór dat het rollen aanvangt zijn toegenomen; dus is een dier vormen van energie gedeeltelijk in den anderen vorm overgegaan. Wanneer $c < \frac{1}{6}d$, zoo wordt $T_0' - T_1'' < 0$, derhalve is dan een deel der betrekkelijke energie T_0'' in voortgaande beweging T' omgezet; is $c > \frac{9}{5}d$, zoo heeft het omgekeerde plaats; een deel van T_0' is dan in relatieve energie T'' getransformeerd.

Voor den cirkelvormigen cilinder, waar $k^2 = \frac{1}{2}a^2$, worden die uitdrukkingen,

$$T_0' - T' = \frac{1}{9}(c+d)(5c-d)$$

$$T_0'' - T_1'' = \frac{2}{9}(c+d)(2d-c)$$

$$T_0 - T_1' = \frac{1}{3}(c+d)^2$$

en de voorwaarde (10) wordt

$$c > \frac{1}{5}d, \qquad c < 2d$$

en zoo wordt ieder omwentelingslichaam door zijne waarden

van $\frac{k^2}{a^2}$ ten opzichte van de grenzen der verhouding $\frac{c}{d}$ gekarakteriseerd. Merken wij nog op, dat blijkens de algemeene waarden (9), de vermindering der energievormen gedurende de glijdende periode verdwijnt, er dus geen verlies is, als $c + d = 0$, of, als ω_0 de aanvankelijke hoeksnelheid is, wanneer

$$c + a\omega_0 = 0 \qquad \text{of } \omega_0 = \frac{c}{a};$$

doch dan zal blijkens (4) $t_1 = 0$ zijn, zoodat dan het rollen *dadelijk* aanvangt en de glijdende periode vervalt.

6. Keeren wij thans tot de algemeene waarde van $\frac{k^2}{a^2}$ terug en staan wij nader stil bij twee merkwaardige uiterste gevallen.

$$(\alpha) \quad c = 0 \qquad (\beta) \quad d = 0.$$

In het eerste geval heeft het omwentelingslichaam bij den aanvang slechts eene draaiende, geene voortgaande beweging; in het tweede geval heeft het lichaam, door eene plotselinge stoot bij den aanvang, slechts eene voortgaande beweging zonder draaing.

(α) $c = 0$, dan

$$\left.\begin{aligned} &T_0' = 0 \qquad T_0'' = \frac{k^2}{a^2} d^2 = T_0 \\ &T_1' = \frac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \qquad T_1'' = \frac{k^4}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &T_0' - T_1' = -\frac{k^4}{(a^2 + k^2)^2} d^2 = -\frac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \\ &T_0'' - T_1'' = \frac{k^2 (a^2 + 2k^2)}{(a^2 + k^2)^2} d^2 = \frac{a^2 (a^2 + 2k^2)}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \\ &T_0 - T_1 = \frac{k^2}{a^2 + k^2} d^2 = \frac{a^2}{a^2 + k^2} T_0 \end{aligned}\right\} \ldots (11a)$$

Volgens deze uitdrukkingen is energie T'' in T' overge-

gaan en wordt, daar bij den aanvang de aanwezige energie T_0 bedraagt, het hierbij getransformeerde gedeelte

$$\frac{T_1'}{T_0} = \frac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11b)$$

terwijl, wegens de laatste formule een gedeelte

$$\frac{T_0 - T_1}{T_0} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11c)$$

voor de beweging is verloren gegaan, in andere energie bijv. warmte is getransformeerd. Beide verhoudingen zijn onafhankelijk van den aanvankelijken toestand, die door de waarden c en d bepaald wordt. Zij hangen slechts van $\frac{k^2}{a^2}$, d. i. van den vorm en de massaverdeeling van het omwentelingslichaam af.

(β). $d = 0$, dan

$$\left.\begin{array}{ll} T_0' = c^2 = T_0 & T_0'' = 0 \\ T_1' = \dfrac{a^2}{(a^2 + k^2)^2} T_0 & T_1'' = \dfrac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} T_0' - T_1' = \dfrac{k^2 (2 a^2 + k^2)}{(a^2 + k^2)^2} c^2 = \dfrac{k^2 (2 a^2 + k^2)}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \\ T_0'' - T_1'' = -\dfrac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} c^2 = -\dfrac{k^2 (2a^2 + k^2)}{(a^2 + k^2)^2} T_0 \\ T_0 - T_1 = \dfrac{k^2}{a^2 + k^2} c^2 = \dfrac{k^2}{a^2 + k^2} T_0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (12a)$$

In dit geval is energie T' in T'' overgegaan en wel wordt het hierbij getransformeerde gedeelte

$$\frac{T_1''}{T_0} = \frac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12b)$$

terwijl het gedeelte, dat voor de beweging verloren gaat, uitgedrukt wordt door

$$\frac{T_0 - T_1}{T_0} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12c)$$

Ook deze verhoudingen zijn onafhankelijk van den aanvankelijken toestand, worden alleen door den aard (vorm en dichtheid) van het omwentelingslichaam bepaald.

7. Het is een merkwaardig feit, dat de waarden in (11*b*) en (12*b*) voor $\frac{T_1'}{T_0}$ en $\frac{T_1''}{T_0}$ gevonden, geheel dezelfde zijn; beide verhoudingen worden door de waarde

$$\frac{a^2 k^2}{(a^2 + k^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

aangegeven. *Het gedeelte der aanvankelijk aanwezige energie, dat in deze grensgevallen van den eenen vorm in den anderen blijvend wordt omgezet, is hetzelfde en onafhankelijk van den aanvankelijken toestand.*

Voor den bol wordt dit $\frac{10}{49}$, voor den cirkelvormigen cilinder $\frac{2}{9}$; beide verhoudingen staan tot elkander als 45 : 49, zoodat het gedeelte der aanvankelijke energie, dat in deze twee uiterste gevallen (aanvankelijk draaien zonder voortgaande beweging en aanvankelijk voortgaan zonder draaien) gedurende de periode der glijdende beweging van den eenen vorm in den anderen blijvend overgaat (zoodat het bij het rollen aanwezig is), bij den cilinder grooter is dan bij den bol.

Die verhouding, door de waarde van $\frac{k^2}{a^2}$ bepaald, neemt met deze grootheid toe en zal als k^2 tot a^2 nadert, tot de maximwaarde $\frac{1}{4}$ convergeeren; deze laatste waarde is dus het hoogste bedrag, dat gedurende de periode van glijden uit den eenen vorm in den anderen blijvend kan worden getransformeerd, zoodat het bij het rollen in het lichaam aanwezig is.

Dit maximum geval doet zich voor bij den uitgeholden, oneindig dunnen, cirkelvormigen cilinder, waarvoor $k^2 = a^2$ is. Wij hebben voor dit lichaam als

$$c = 0, \qquad T_0' = 0 \qquad T_0'' = T_0$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{4}, \quad \frac{T_1''}{T_0} = \frac{1}{4}, \quad T_0 - T_1 = \frac{1}{2} T_0$$

$$d = 0, \qquad T_0' = T_0 \qquad T_0'' = 0$$

$$\frac{T_1'}{T_0} = \frac{1}{4}, \quad \frac{T_1''}{T_0} = \frac{1}{4}, \quad T_0 - T_1 = \frac{1}{2} T_0;$$

in beide gevalleu gaat $\frac{1}{4}$ der aanwezige energie in den vroeger niet aanwezigen vorm over; de helft der aanvankelijk aanwezige energie gaat voor de beweging verloren; bij het rollen zijn beide energievormen gelijkelijk (ieder $\frac{1}{4}$ der oorspronkelijke energie) in het lichaam aanwezig.

8. Wat den aard der beweging vóór het intreden van het rollen betreft, merken wij op, dat in de uiterste gevallen $c = 0$ en $d = 0$, de formulen (4) geven:

$$(\alpha) \quad c = 0 \qquad T' = h^2 t^2 \qquad T'' = \frac{k^2}{a^2}(d - \frac{a^2}{k^2} h t)^2$$

$$(\beta) \quad d = 0 \qquad T' = (c - h t)^2 \quad T'' = \frac{a^2}{k^2} h^2 t^2,$$

dat is,

$$\text{als } c = 0, \qquad v^2 = h^2 t^2$$

$$\text{als } d = 0 \qquad \omega^2 = \frac{a^2}{k^4} h^2 t^2.$$

In het eerste geval is de voortgaande beweging eene eenparig versnelde; hetzelfde geldt voor de draaiende beweging in het tweede geval. In beide gevallen zijn bij den aanvang respectievelijk v en ω nul, dus ook T_0' en T_0''. De beide andere bewegingen zijn dan eenparig vertraagd. Het algemeene geval, dat c en d eindige waarden hebben, vordert een nader onderzoek.

Wanneer wij den tijd waarop T' nul wordt, aanduiden door t', dien waarop T'' verdwijnt door t'', terwijl de tijd, waarop het rollen aanvangt, weder door t_1 wordt aangegeven, zoo hebben wij, volgens (4) en (6)

$$h t' = c, \qquad h t'' = \frac{k^2}{a^2} d, \qquad h t_1 = \frac{k^2}{a^2 + k^2}(c + d);$$

nu is

$$\frac{k^2}{a^2+k^2}(c+d)=c+\frac{k^2 d-a^2 c}{a^2+k^2}=\frac{k^2}{a^2}d-\frac{k^2(k^2 d-a^2 c)}{a^2(a^2+k^2)}$$

of

$$h t'=h t_1-\frac{k^2 d-a^2 c}{a^2+k^2},\quad h t''=h t_1+\frac{k^2 d-a^2 c}{a^2(a^2+k^2)},$$

zoodat t_1 steeds tusschen t' en t'' gelegen is, behalve als

$$a^2 c=k^2 d, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

wanneer de drie tijdstippen t', t'', t_1 zamenvallen. Het lichaam blijft dan volgens (8) op dit oogenblik in rust.

Wanneer $k^2 d > a^2 c$ zal $t' < t_1$ zijn; de voortgaande beweging zal dus nul worden en daarna van richting veranderen, vóór dat het rollen begint. Is $k^2 d < a^2 c$ zoo is $t' < t_1$ en dan geldt ditzelfde voor de draaibeweging, die dan omkeert en dus van teeken verandert voor den aanvang van het rollen.

Bepalen wij ons vooreerst tot *positieve* waarden van c en d, zoo blijkt, dat steeds eene der bewegingen van richting verandert vóór dat het rollen intreedt. Het is verder volgens de waarde (4) duidelijk, dat de beweging, wier energie vóór het rollen verdwijnt, van den aanvang af eene eenparig vertraagde is en na de omkeering van richting tot aan het tijdsiip van rollen eenparig versneld wordt. De andere beweging, die in de periode van het glijden niet verdwijnt, is eene eenparig vertraagde. Bij de grensgevallen $c=0$ en $d=0$, zal de eerste beweging eenparig versneld, de andere eenparig vertraagd zijn; dan heeft geene omkeering van bewegingsrichting plaats, overeenkomstig hetgeen vroeger ontwikkeld is.

In résumé blijkt dus, dat behalve bij de grensgevallen $c=0$ of $d=0$, *voor positieve waarden* van c en d, steeds eene der beide bewegingen van richting verandert vóórdat het rollen intreedt, en wel is dit de voortgaande beweging als $k^2 d > a^2 c$; de draaiende beweging verandert vóór het rollen van richting als $k^2 d < a^2 c$.

Voor negatieve waarden van c of d zij opgemerkt, dat als beide negatief zijn, dit wel de vergelijkingen (2) doch niet de vergelijkingen (4) wijzigt. Het eindresultaat is, dat de beweging dezelfde blijft, doch in tegengestelden zin van vroeger.

Zijn c en d tegengesteld van teeken, zoo zal voor die welke de absoluut kleinste waarde heeft de overeenkomstige energie steeds toenemen, de snelheid dus niet meer van teeken veranderen; slechts de andere beweging, voor welke de absolute snelheid de grootste is, neemt van den aanvang af en hare snelheid verandert niet van richting vóór het rollen aanvangt. Een en ander volgt eenvoudig bij het opstellen der vergelijkingen (2) en (4).

In het algemeen wordt dus steeds de tijd t_1 der beweging van af den aanvang tot dat het rollen intreedt in twee ongelijke deelen verdeeld, een vóór, een na het tijdstip, dat eene der bewegingen nul wordt en van richting verandert. Wij zullen die tijdsdeelen als 1e en 2e perioden der glijdende beweging aanduiden.

De grootten dier perioden zijn:

$$\left.\begin{array}{l} \text{als} \\ \qquad k^2 d > a^2 c,\ t' \text{ en } t_1 - t' \\ \text{of} \\ \qquad \dfrac{c}{h} \text{ en } \dfrac{k^2 d - a^2 c}{h(a^2 + k^2)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (15a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{als} \\ \qquad k^2 d < a^2 c,\ t'' \text{ en } t_1 - t'' \\ \text{of} \\ \qquad \dfrac{k^2 d}{a^2 h} \text{ en } \dfrac{k^2 (a^2 c - k^2 d)}{a^2 h (a^2 + k^2)} \end{array}\right\} \ldots\ldots, (15b)$$

De verhouding van de grootte der eerste tot die der tweede periode is dus

$$\left.\begin{array}{l} \text{in het eerste geval,} \\ \qquad \dfrac{c(a^2 + k^2}{k^2 d - a^2 c} \\ \text{in het tweede geval,} \\ \qquad \dfrac{d(a^2 + k^2)}{a^2 c - k^2 d}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (16)$$

die verhoudingen worden:

1e bij een homogeenen bol, waar $k^2 = \frac{2}{5} a^2$,

$$\frac{7\,c}{2\,d - 5\,c} \text{ en } \frac{7\,d}{5\,c - 2\,d}$$

2e bij een homogeenen, massieven cirkelvormigen cilinder, waar $k^2 = \frac{1}{2} a^2$,

$$\frac{2\,c}{d - 2\,c} \text{ en } \frac{2\,d}{2\,c - d}$$

3e bij eenen uitgeholden, oneindig dunnen cirkelvormigen cilinder, waar $k^2 = a^2$,

$$\frac{2\,c}{d - c} \text{ en } \frac{2\,d}{c - d}.$$

9. Bepalen wij thans het verlies aan energie gedurende deze beide perioden, waarbij het doelmatig schijnt, niet het verlies zelf te nemen, doch zijne verhouding tot het totale verlies aan energie gedurende den tijd der glijdende beweging, d. i. gedurende de *beide* genoemde perioden.

Achtereenvolgens beschouwen wij de gevallen $t' < t_1$ en $t'' < t_1$. In het eerste noemen wij de energiën op den tijd t', T_α en T_α''; blijkbaar is $T'_\alpha = 0$, $h\,t' = c$. In het tweede geval duiden wij de energieën op het tijdstip t'' door T_β en T'_β aan; T''_β is dan nul, $h\,t'' = \frac{k^2}{a^2}\,d$.

Met toepassing der in N⁰. 4 en 5 gegeven uitdrukkingen, vinden wij gemakkelijk de verlangde verhoudingen:

1e. $t' < t_1$.

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{T_0 - T_\alpha}{T_0 - T_1} = \frac{c\,(2\,k^2 d - (a^2 - k^2)\,c)\,(a^2 + k^2)}{k^4\,(c + d)^2} \\ B &= \frac{T_\alpha - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{(a^2 c - k^2 d)^2}{k^4\,(c + d)^2} \\ A' &= \frac{T'_0 - T_\alpha'}{T_0 - T_1} = \frac{a^2 + k^2}{k^2}\,\frac{c^2}{(c + d)^2} \end{aligned}\right\}. \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
B' &= \frac{T'_\alpha - T_1'}{T_0 - T_1} = -\frac{(a^2 c - k^2 d)^2}{k^2 (a^2 + k^2)(c + d)^2} \\
A'' &= \frac{T_0'' - T_\alpha''}{T_0 - T_1} = \frac{c(2k^2 d - a^2 c)(a^2 + k^2)}{k^4 (c + d)^2} \\
B'' &= \frac{T_\alpha'' - T_1''}{T_0 - T_1} = \frac{(a^2 + 2k^2)(a^2 c - k^2 d)^2}{k^4 (a^2 + k^2)(c + d)^2}
\end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

2e $t'' < t_1$

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{T_0 - T\beta}{T_0 - T_1} = \frac{d(a^2 + k^2)(2a^2 c + (a^2 - k^2) d)}{a^4 (c + d)^2} \\
B &= \frac{T\beta - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^4 (c + d)^2} \\
A' &= \frac{T_0' - T'\beta}{T_0 - T_1} = \frac{d(a^2 + k^2)(2a^2 c - k^2 d)}{a^4 (c + d)^2} \\
B' &= \frac{T\beta' - T_1'}{T_0 - T_1} = \frac{(2a^2 + k^2)(a^2 c - k^2 d)^2}{a^4 (a^2 + k^2)(c + d)^2} \\
A'' &= \frac{T''_0 - T''\beta}{T_0 - T_1} = \frac{a^2 + k^2}{a^2} \cdot \frac{d^2}{(c + d)^2} \\
B'' &= \frac{T''\beta - T_1''}{T_0 - T_1} = -\frac{(a^2 c - k^2 d)^2}{a^2 (a^2 + k^2)(c + d)^2}
\end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

Omtrent bovenstaande formulen valt op te merken:

1e. Dat de formulen (17) en (18) door letterverwisseling uit elkander volgen en wel door verwisseling van c en d, van a en k en zoo behooren de formulen

A, B, A', B', A'', B'', van (17)

bij A, B, A'', B'', A', B'. van (18).

2e. Dat de waarden voor A, A', A'' in (17) met c verdwijnen, dezelfde waarden in (18) met d nul worden, zooals te voorzien was.

3e. Dat alle de waarden B in (17) en (18) verdwijnen, als $a^2 c = k^2 d$, wat een gevolg is van het in N°. 8 ontwikkelde, daar dan de tweede perioden verdwijnen.

4e. Dat de waarden B' van (17) en B'' van (18) *negatief*

zijn, zooals onmiddelijk volgt, doordien voor t', T'_α en voor t'', T''_β verdwijnen. Er heeft dus voor die gedeelten *winst* van energie plaats; m. a. w. er is in de 2e periode in het geval $t' < t_1$ draaiende beweging in voortgaande *omgezet* en in het geval $t'' < t_1$ is voortgaande beweging in draaiende *getransformeerd*. Bij gelijknamig teeken van c en d, en dan slechts, zijn de formulen (17) en (18) van toepassing, heeft dus altijd transformatie van den eenen bewegingsvorm in den anderen plaats.

5e. De betrekkelijke vermindering aan energie, door (17) en (18) aangegeven, is, daar in alle deze verhoudingen c en d voorkomen, afhankelijk van den aanvankelijken toestand, d. i. van de voor $t = 0$ aanwezige energie van iedere soort.

Daar in alle die verhoudingen eveneens a en k voorkomen, hebben vorm en massaverdeeling van het omwentelings lichaam eveneens invloed op de verschillende waarden der vermindering van energie, in (17) en (18) aangegeven.

6e. Het blijkt echter, zoowel uit (17) als uit (18), dat de *verhouding* der waarden B, dat is de verhouding der vermindering der beide energieën gedurende de tweede periode, alleen van a en k afhangt, dus *onafhankelijk* is van den toestand bij den aanvang.

Wij vinden in het 1e geval, uit de formulen (17)

$$\frac{B'}{B} = -\frac{k^2}{a^2 + k^2}, \quad \frac{B''}{B} = \frac{a^2 + 2\,k^2}{a^2 + k^2}, \quad \frac{B'}{B''} = -\frac{k^2}{a^2 + 2\,k^2};$$

eveneens in het tweede geval, uit de formulen (18)

$$\frac{B'}{B} = \frac{2\,a^2 + k^2}{a^2 + k^2}, \quad \frac{B''}{B} = -\frac{a^2}{a^2 + k^2}, \quad \frac{B'}{B''} = -\frac{2\,a^2 + k^2}{a^2}.$$

Zoo vinden wij bij den bol voor deze verhoudingen als $t' < t_1$:

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2}{7}, \quad \frac{B''}{B} = \frac{9}{7}, \quad \frac{B'}{B''} = -\frac{2}{9}$$

en als $t'' < t_1$

$$\frac{B'}{B} = \frac{12}{7}, \quad \frac{B''}{B} = -\frac{5}{7}, \quad \frac{B'}{B''} = -\frac{12}{5}.$$

Voor de uitdrukkingen der vermindering in de eerste periode, dat is voor de verhoudingen der waarden A, A', A'', bestaan dergelijke eenvoudige verhoudingen *niet*.

Deze toch, hangen niet alleen van a en k, doch steeds van c en d af; de aanvankelijke verdeeling der energie heeft invloed op de waarden dier verhoudingen.

Het blijkt dus, dat wat betreft de veranderingen der energie, in de 1e periode zamengestelder wet gevolgd wordt dan in de 2e periode, waar de verhouding dier veranderingen slechts door den vorm en de dichtheid van het omwentelings lichaam wordt bepaald.

Bij onze onbekendheid met de wetten der energie, is dit laatste resultaat blijkbaar van belang.

Utrecht, October 1889.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 30 November 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, RAUWENHOFF, STOKVIS, MOLL, PEKELHARING, BUYS BALLOT, VAN DIESEN, MICHAËLIS, KAPTEYN, ENGELMANN, HUBRECHT, WEBER, ZEEMAN, DE VRIES, SCHOLS, BAEHR, FORSTER, A. C. OUDEMANS JR., MAC GILLAVRY, HOEK, HOFFMANN, FRANCHIMONT, MARTIN, ZAAIJER, SCHOUTE, BIERENS DE HAAN, KORTEWEG, VAN BEMMELEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. W. IJZERMAN, Padang, 5 October 1889; 2°. J. LIAGRE, Secretaris van de Académie des Sciences, des Lettres et des beaux Arts de Belgique te Brussel, 26 October 1889; 3°. E. COUBEAUX, Secretaris van de Société entomologique de Belgique te Brussel, 1889; 4°. A. TIELEMANS, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, 29 October 1889; 5°. P. J. VAN BENEDEN te Leuven, 6 November 1889; 6°. P. WILLEMS, Leuven, 7 November 1889; 7°. het Ministère de l'Instruction publique te Parijs, 25 October 1889; 8°. CROIZIER, Voorzitter van de Société académique Indo-

Chinoise te Parijs, 31 October 1889; 9°. Ch. Schefer, Secretaris van de Ecole spéciale des Langues orientales vivantes te Parijs, 2 November 1889; 10°. het Ministère de la Guerre te Parijs, 6 November 1889; 11°. L. Delisle, Directeur van de Bibliothèque nationale te Parijs, 9 November 1889; 12°. Fergeron, Secretaris van de Académie de Médecine te Parijs, 13 November 1889; 13°. den Secretaris van de Société zoologique de France te Parijs, 1889; 14°. den Secretaris van de Société des Antiquaires de Picardie te Amiens, 31 October 1889; 15°. den Secretaris van de Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 1 November 1889; 16°. den Bibliothecaris van de Académie de Stanislas te Nancy, 12 November 1889; 17°. den Secretaris van de Académie nationale de Savoie te Chambéry, 1889; 18°. H. Rix, Bibliothecaris van de royal Society te Londen, 23 November 1889; 19° J. de Winton, Secretaris van de royal geographical Society te Londen, 21 November 1889; 20°. R. Rost, Bibliothecaris van het India Office te Londen, 21 November 1889; 21°. P. L. Sclater, Secretaris van de zoological Society te Londen, 22 November 1889; 22°. den Directeur van het royal Observatory te Greenwich, 22 November 1889; 23°. J. D. Hooker. Kew, 23 November 1889; 24°. P. G. Tait, Secretaris van de royal Society te Edinburg, 23 November, 1889; 25°. den Secretaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 25 November 1889; 26°. A. Auwers, Secretaris van de Kon. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 26 October 1889; 27°. von Bezold, Directeur van het kön. preuss. meteorologisches Institut te Berlijn, 26 October 1889; 28°. H. Kreutz, Bibliothecaris van de kön. Sternwarte te Kiel, 28 October 1889; 29°. B. Windscheid, Leipzig, 3 November 1889; 30°. Th. Nöldeke, Straatsburg, 7 November 1889; 31°. P. E. Richter, Bibliothecaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 8 November 1889; 32°. de Redactie van Petermann's geographische Mittheilungen te Gotha, 11 November 1889; 33°. Schaarschmidt, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 9 November 1889; 34°. Valentiner, Directeur van de grossherzogliche Sternwarte te Karlsruhe, 11 November 1889;

35⁰. Joh. Franck, Bonn, 11 November 1889; 36⁰. J. E. Sonnenberg, Bibliothecaris van het Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande te Bonn, 13 November 1889; 37⁰. Wetzow, Bibliothecaris van de Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften te Görlitz, 14 November 1889; 38⁰. Conwentz, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Dantzig, 15 November 1889; 39⁰. C. Gegenbaur, Heidelberg, 20 November 1889; 40⁰. J. Aumer, Bibliothecaris van de Kön. Akademie der Wissenschaften te München, 30 September 1889; 41⁰. J. von Sachs, Würzburg, 20 November 1889; 42⁰. W. Kirchner, Bibliothecaris van de physikalisch-medicinische Gesellschaft te Würzburg, 25 November 1889; 43⁰. J. E. A. Martin, Secretaris van het Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde te Jena, 21 November 1889; 44⁰. C. Knoop, Secretaris van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, 28 November 1889; 45⁰. W. Müller, Secretaris van de medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft te Jena, 26 November 1889; 46⁰. M. Fürbringer, Jena, 1889; 47⁰. A. Gruber, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B, 1889; 48⁰. Buchner, Secretaris van de oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 1889; 49⁰. P. Blaserna, Secretaris van de regia Lynceorum Academia te Rome, 12 November 1889; 50⁰. G. Bizio, Secretaris van het R. Istituto di Scienze, Lettere ed Arti te Venetië, 12 November 1889; 51⁰. A. Ferrini, Secretaris van het Institut royal Lombard des Sciences et Lettres te Milaan, 13 November 1889; 52⁰. den Secretaris van de Societa Italiana d'Antropologia te Florence, 17 November 1889; 53⁰. D. Chilovi, Directeur van de R. Biblioteca nazionale centrale te Florence, 25 November 1889; 54⁰. S. Muller, Secretaris van de Société royale des Antiquaires du Nord te Kopenhagen, 16 November 1889; 55⁰. H. Gylden, Stockholm, 24 November 1889; 56⁰. J. Richter, Secretaris van de Société royale des Sciences te Drontheim, 21 November 1889; 57⁰. A. Arrhenius, Bibliothecaris van de Societas pro Fauna et Flora fennica te Helsingfors, 22 October 1889; 58⁰. H. Moriz, Directeur van het Observatoire impérial te

Rio de Janeiro, 3 October 1889; 59⁰. F. Kurtz, Bibliothecaris van de Academia nacional de Ciencias te Cordoba, 29 October 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 25 October, 8, 23 November 1889; 2⁰. het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid te 's Gravenhage, 12 November 1889; 3⁰. W. P. Wolters, Secretaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 16 November 1889; 4⁰. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 23 October 1889; 5⁰. den Directeur van het magnetical and meteorological Observatory te Batavia, Augustus 1889; 6⁰. E. Reusens, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, Januari 1889; 7⁰. F. Nicholson, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester 1889; 8⁰. J. B. Balfour, Secretaris van de botanical Society te Edinburgh, 18 November 1889; 9⁰. Siegel, Secretaris van de kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, 30 September 1889; 10⁰. R. Heidenhain, Secretaris van de schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 15 Augustus 1889; 11⁰. H. Knoblauch, Voorzitter van de kais. Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher te Halle a/S, 23 October 1889; 12⁰. den Secretaris van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, November 1889; 13⁰. den Bibliothecaris van de Académie royale suédoise des Sciences te Stockholm, 1889; 14⁰. G. Storm, Secretaris van de Videnskabs-Selskabet te Christiania, 31 Juli 1889; 15⁰. R. A. Moberg, Directeur van de Commission géologique de la Finlande te Helsingfors, 4 November 1889; 16⁰. den Directeur van de geological and natural History Survey te Ottowa, 1889; 17⁰. Silvatranjo, Secretaris van de Academia imperial de Medicina te Rio de Janeiro, 7 October 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren J. A. C. Oudemans, Suringar, van der Waals en Behrens, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, ter begeleiding van een relaas over de aardbeving, waardoor den 26sten October jl. het eiland Lesbos geteisterd werd. Dit relaas, door tusschenkomst van den consul van Smyrna en den gezant te Constantinopel in handen van den Minister gekomen, wordt echter door Z.Exc. terugverwacht. Dientengevolge wordt besloten, den Minister dank te zeggen voor de mededeeling en het stuk te doen overschrijven voor het Archief der Akademie.

3°. Een schrijven van den Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie (24_3, 18_4)", 'twelk de schrijver gaarne in de werken der Akademie zag opgenomen. Het opstel wordt om advies in handen gesteld van de Heeren Bierens de Haan en van den Berg.

4°. Een brief van den Heer Dr. T. J. Stieltjes jr. (Toulouse 27 Nov. 1887), waarin hij dank zegt voor zijne benoeming tot correspondeerend Lid.

— De Heeren Bierens de Haan en van den Berg brengen rapport uit over de verhandeling, door Dr. Jan de Vries voor de werken der Akademie aangeboden in de September-vergadering der Afdeeling. Hunne conclusie om die verhandeling te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen, wordt aangenomen.

— De Heer Hoek houdt eene voordracht over het Zuiderzeeharing-ras. Hij paste de Heincke'sche methode voor de onderscheiding van de haringrassen toe op de haring van de Zuiderzee en vond, dat deze in hoofdzaak overeenstemt met de in brak water paaiende voorjaarsharing van de Oostzee. Hij slaagde er verder in, den tijd van voortplanting dier

haring door onmiddellijke waarneming vast te stellen, en vond dien besloten binnen de maanden Mei en Juni. Groote hoeveelheden haringkuit, en weinige dagen later van haringlarven, werden door hem aangetroffen op plaatsen in de Zuiderzee, die door een gering zoutgehalte uitmunten. Eindelijk was het den spreker gelukt vast te stellen, dat de oudste larventoestanden, welke in de Zuiderzee voorkomen, ten opzichte hunner lengte geheel overeenstemmen met overeenkomstige toestanden der voorjaars-Oostzeeharing, doch aanzienlijk kleiner zijn dan de oudste larven, uit Noordzeeharing gesproten. Terwijl echter in de Oostzee twee haringrassen: een voorjaars- en een najaarsras voorkomen, treft men in de Zuiderzee uitsluitend vertegenwoordigers aan van niet meer dan één ras. Hieruit vloeit voort, dat de soms in aanzienlijke hoeveelheid in het najaar aldaar verschijnende haringen tot hetzelfde ras moeten behooren. Eene korte discussie tusschen den spreker en den Heer Hugo de Vries over de philogenetische zijde van het onderwerp sluit deze voordracht.

— De Heer van de Sande Bakhuysen geeft een overzicht van hetgeen onlangs te Parijs verhandeld werd in de vergadering van het Comité voor de vervaardiging van de photographische kaart van den hemel, en schetst het aandeel, hetwelk de Nederlandsche astronomen aan de voorbereiding dier werkzaamheden nemen zullen.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

Door den Heer Stokvis: een door hem geschreven levensbericht van wijlen den Hoogl. F. C. Donders in »Mannen van Beteekenis".

Door den Heer Schoute, uit naam van den Heer F. Gomez Teixeira te Cordova, het 1e deel van een in de Portugeesche taal geschreven Cursus van Integraalrekening.

— De Heer Schoute biedt voor de werken der Akademie eene Verhandeling aan van den Heer J. C. Kluyver, leeraar aan de H. B. S. te Breda: »Kenmerkende getallen der al-

gebraïsche ruimtekrommen". Zij wordt om advies in handen gesteld van de Heeren SCHOUTE en VAN DEN BERG.

— De heer C. A. J. A OUDEMANS biedt voor de Verslagen en Mededeelingen een opstel aan: »Observations sur quelques Sphéropsidées qui croissent sur les feuilles des espèces Européennes de *Dianthus*."

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. J. DE VRIES,**

GETITELD:

„OVER EENE GROEP VAN REGELMATIGE VLAKKE CONFIGURATIES EN EENIGE DAARMEDE SAMENHANGENDE VLAKKE CONFIGURATIES VAN PUNTEN EN KROMMEN".

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN F. J. VAN DEN BERG.

Over deze verhandeling, die door u ter beoordeeling in onze handen gesteld is, zijn wij thans bereid het volgende verslag uit te brengen.

Schrijver begint met het invoeren eener nieuwe notatie ik, als snijpunt der lijnen $1\,i\,k \equiv 1\,i, 1\,k$ en $i\,k\,(1)) \equiv (1\,i), (1\,k)$, en $(i\,k)$ als snijpunt van $1\,i\,(k) \equiv 1\,i, (1\,k)$ en $1\,k\,(i) \equiv 1\,k, (1\,i)$.

Trekt men nu, door een punt 1, $n-1$ stralen, waarop telkens de $n-1$ punten paren $1\,i, (1\,i)$ liggen (voor $i = 2, 3, 4 \ldots n$), en beschouwt men de daardoor gevormde paren van perspectivische driehoeken, dan verkrijgt men $\binom{n-1}{2}$ punten ik, en even zoo vele punten $(i\,k)$, die in drietallen incident zijn met $\binom{n-1}{3}$ lijnen $i\,k\,l \equiv i\,k,\ i\,l,\ k\,l$ en $3\binom{n-1}{3}$ lijnen $i\,k\,(l) \equiv i\,k,\ (i\,l)\,(k\,l)$, dat is met de $4\binom{n-1}{3}$ perspectiviteits-

assen. Deze laatste vormen nu met de $4\binom{n-1}{2}$ driehoeks-zijden $1\,i\,k$, $i\,k\,(1)$, $1\,i\,(k)$, $1\,k\,(i)$, en met de $(n-1,(n-2)$ punten $i\,k$, $(i\,k)$ en de $2\,(n-1)$ punten $1\,i$, $(1\,i)$ eene conf.

$$\sigma_n = (n\,(n-1)_{2n-4}, \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-2)_3).$$

Deze is regelmatig; zij bezit behalve het punt 1 nog $n-1$ andere $n-1$-voudige diagonaalpunten, welke punten i genoemd worden.

Deze uitkomsten werden voorbereid door de beschouwing van σ_4, die naar tabel (1) blijkt de conf. $(12_4, 16_3)\,A$ te zijn, die reeds herhaaldelijk door schrijver is behandeld.

Maar die σ_n kan ook nog anders worden opgevat, namelijk als de gelijkvormigheids-assen en punten van n cirkels. De n middelpunten dier cirkels zijn dan de $n-1$-voudige diagonaalpunten; er zijn nog $8\binom{n}{4}$ drievoudige diagonaalpunten; de stralen der cirkels zijn gegeven door de evenredigheid $r_1 : r_i = (1, 1i), (i, 1i)$.

Zulk eene conf. σ_n wordt door $3\,n-1$ gegevens ondubbelzinnig bepaald: zoodanig zamenstel van gegevens noemt schrijver in navolging van Burmester eene *constellatie*. Voor n even is dit $\frac{1}{2}\,(3\,n-2)$ willekeurige punten, en nog één punt, dat collineair gelegen is met twee dier punten. Voor n oneven is dit $\frac{1}{2}\,(4\,n-1)$ willekeurige punten.

Uit de σ_3, de volledige vierzijde, leidt schrijver zeer eenvoudig de σ_5 af, en daaruit verder de σ_7: uit σ_4 evenzeer de σ_6. En dit past hij algemeen toe op de constellatie voor σ_{2m} en σ_{2m+1}.

Uit de beschouwing van σ_4 en σ_3 leidt schrijver nu af: Eene σ_n bevat $(2\,n-5)\binom{n}{3}$ volledige vierzijden; elke lijn komt voor in $2\,n-5$, elk punt in $(2\,n-2)\,(2\,n-5)$ dier vierzijden. De σ_n bevat $\binom{n}{p}\,2^{p-1}$ conf. π_p $(p > 4)$. Geen σ_{n-2}, begrepen in σ_n, is de gemeenschappelijke restfiguur

der twee punten, aangeduid door de twee niet in σ_{n-2} voorkomende getallen. Uit de beschouwing eener π_4 en σ_4 volgt verder, dat eene σ_n bepaald wordt door eene π_n en twee willekeurige punten, die collineair gelegen zijn met één harer punten.

Na het herleiden van eene σ_{2n} leidt schrijver meer algemeen af, dat, wanneer men van eene $\sigma_{n\,p}$ wegneemt het samenstel van p conf. σ_n, die twee aan twee geen getal hunner notatie gemeen hebben, en nog de lijnen, die door de punten dezer σ_n gaan, er overblijft de conf.

$$\left(n^2 p\,(p-1)_{2\,n\,(p-2)},\ \frac{2}{3}\,n^3 p\,(p-1)\,(p-2)_3\right).$$

En verder na het opmaken van twee tabellen (2) en (3):

Als $n \equiv 1$ of $\equiv 4$ [mod. 12] is, dan bevat σ_n hoofd-σ_4-groepen, dat is groepen van σ_4, die te zamen alle punten der σ_n bevatten. Neemt men nu uit elke dezer σ_4 eene hoofd-vierzijde weg, dan blijft er de conf.

$$\left(n\,(n-1)_{2n-5},\ \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(2\,n-5)_3\right);$$

en neemt men alle lijnen der groep van σ_4 weg, dan komt er de conf.

$$\left(n\,(n-1)_{2n-8},\ \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-4)_3\right).$$

Als $n \equiv 1$ [mod. $(p-1)$] en $n\,(n-1) \equiv 0$ [mod. $p\,(p-1)$], dan bevat σ_n hoofd-σ_p-groepen; en neemt men alle lijnen van zulk een groep σ_p weg, zoo komt er de conf.

$$\left(n\,(n-1)_{2(n-p)},\ \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-p)_3\right).$$

Na eenige opmerkingen over eenige ten deele onbestaanbare conf., de 13_4, de reciproke figuur der buigpunten-conf. van Hesse, de 8_3 van Cayley, en de 14_4, — beschouwt schrijver de twee-takkige K_3, om eene σ_4 beschreven, past dit toe op alle σ_4 in eene σ_n begrepen, en vindt dan dat al die twee-takkige K_3 met de punten der σ_n eene nieuwe conf. vormen

$$\left(n(n-1)\binom{n-2}{2},\ \binom{n}{4}_{12}\right).$$

Tot twee geassocieerde σ_4 behooren, behalve de twee oorspronkelijke K_3, nog 32 andere, in tabel 6 bijeengebracht. De punten der harmonische conf. $(24_3,\ 18_4)$ vormen met deze 34 twee-takkige K_3 de conf. $(24_{17},\ 34_{12})$; neemt men daaruit twee der K_3 weg, dan ontstaat de conf. $(24_{16},\ 32_{12})$.

De punten eener $\Sigma_4 = (16_3,\ 32_4)\ A$, dat is de reciproke der σ_4, vormt verder met zestien kegelsneden eene conische conf. 16_6; en daaruit volgt weder dat de punten eener Σ_n, dat is de reciproke van eene σ_n, aanleiding geven tot eene conf.

$$\left(4\binom{n}{3}_{6(n-2)},\ 16\binom{n}{4}_6\right).$$

Wanneer men voor zes conconische punten der serpentine van eene twee-takkige K_3 de 27 antitangentiaalpunten zoekt, en die met de 4^5 kegelsneden verbindt, waarop zij liggen, dan ontstaat er eene conf. $(24_{256},\ 1024_6)$. Liggen de zes conconische punten op eene één-takkige K_3, dan vormen hunne twaalf bestaanbare antitangentiaalpunten met 2^5 kegelsneden eene conf. $(12_{16},\ 32_6)$, die deel uitmaakt van de eerstgenoemde.

Wanneer men voor zes conconische punten eener één-takkige K_3, de osculatiegroepen der n^{de} orde, of de centraalgroepen der n^{de} orde opmaakt, dan verkrijgt men de conische conf.

$$\left(6(3n-1)^4,\ (3n-1)^5_{6\,(3n-1)}\right) \text{ en } \left(6(3n-2)^4,\ (3n-2)^5_{6\,(3n-2)}\right).$$

Verder worden nog, met behulp der methode van projectiën, eenige zamengestelde conf. afgeleid uit de snijding eener K_2 met krommen van hooger graad.

Wij kunnen de Afdeeling gerust aanraden, dit stuk in hare Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Leiden en *Hilversum*, November 1889.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

OVER EENE GROEP VAN REGELMATIGE VLAKKE CONFIGURATIES

EN EENIGE

DAARMEDE SAMENHANGENDE VLAKKE CONFIGURATIES VAN PUNTEN EN KROMMEN.

DOOR

JAN DE VRIES.

§ 1.

1. Drie puntenparen 12, (12); 13, (13); 14, (14), welke op drie naar het punt 1 convergeerende stralen geplaatst zijn, bepalen vier paren perspectieve driehoeken:

12, 13, 14	met	(12), (13), (14)
(12), 13, 14	met	12, (13), (14)
12, (13), 14	met	(12), 13, (14)
12, 13, (14)	met	(12), (13), 14.

Duidt men het snijpunt der lijnen $1\,i\,k \equiv (1\,i,\ 1\,k)$ en $i\,k\,(1) \equiv ((1\,i),\ (1\,k))$ door $i\,k$ en het snijpunt der lijnen $1\,i\,(k) \equiv (1\,i,\ (1\,k))$ en $1\,k\,(i) \equiv (1\,k,\ (1\,i))$ door $(i\,k)$ aan, dan bevatten de vier perspectiviteitsassen achtereenvolgens de punten

34,	42,	23
34,	(42),	(23)
(34),	42,	(23)
(34),	(42),	23.

3. Worden de gelijkvormigheidspunten van twee cirkels met middelpunten i, k door $i\,k$ en $(i\,k)$ en de gelijkvormigheidsassen van drie cirkels i, k, l door $i\,k\,l$ of $i\,k\,(l)$ voorgesteld, naar gelang zij 3 uitwendige gelijkvormigheidspunten $i\,k$ of een punt $i\,k$ met twee inwendige gelijkvormigheidspunten $(i\,k)$ bevatten, dan vormen deze punten en lijnen voor n in een vlak gelegen cirkels blijkbaar eene cf. σ_n, waarvan de n middelpunten de $(n-1)$-voudige diagonaalpunten zijn. Omgekeerd kan elke σ_n beschouwd worden als het samenstel van de gelijkvormigheidspunten en assen van n cirkels. Immers beschrijft men uit de punten $1, 2, \ldots n$ als middelpunten cirkels met stralen $r_1, r_2, \ldots r_n$, zoodat $r_1 : r_i = (1\,.\,1\,i) : (i\,.\,1\,i)$, dan zijn de punten $1\,i, (1\,i)$ de gelijkvormigheidspunten, welke door de cirkels 1 en i bepaald worden, en daar σ_n uit deze $2\,(n-1)$ punten ondubbelzinnig kan geconstrueerd worden, is zij identiek met de cf., welke bij de n cirkels behoort.

4. In σ_n is natuurlijk elke σ_p begrepen, waarvoor de notatie der elementen p der getallen 1 tot n vereischt. Van de cf. $\sigma_4 \equiv (12_4,\ 16_3)\,A$, welke met behulp van de getallen i, j, k, l wordt voorgesteld, liggen vier punten der geassociëerde σ_4 (drievoudige diagonaalpunten) in de $(n-1)$-voudige diagonaalpunten i, j, k, l der σ_n; deze heeft dus, met het oog op de overige acht drievoudige diagonaalpunten van elke der $\binom{n}{4}$ in haar begrepen σ_4, $8\binom{n}{4}$ drievoudige diagonaalpunten.

Elke cf.

$$\left(n\,(n-1)_{2n-4},\ \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-2)_3\right),$$

waarvan de punten door de teekens $i\,k$, $(i\,k)$ en de lijnen door de teekens $i\,k\,l$ en $i\,k\,(l)$ zoodanig kunnen voorgesteld worden, dat de lijn $i\,k\,l$ de punten $i\,k$, $i\,l$, $k\,l$ en de lijn $i\,k\,(l)$ de punten $i\,k$, $(i\,l)$, $(k\,l)$ draagt, bezit $8\binom{n}{4}$ drievoudige en n $(n-1)$-voudige diagonaalpunten; de laatsten zijn de middelpunten

van n cirkels, waarvan de verhouding der stralen door de cf. gegeven is, en de gelijkvormigheidspunten en assen met de elementen der cf. samenvallen.

5. Daar het punt 1 door twee, elke der $n-1$ door 1 gedragen stralen door een, en elke der $2(n-1)$ op deze lijnen gelegen punten der σ_n eveneens door een enkelvoudig gegeven bepaald is, kunnen voor de constructie der cf. $3n-1$ gegevens willekeurig aangenomen worden; voor even waarden van n zal zij dus kunnen bepaald worden door $\frac{1}{2}(3n-2)$ punten, die men naar willekeur kan kiezen benevens een met twee dier punten collineair gelegen punt; voor oneven waarden van n kan men $\frac{1}{2}(3n-1)$ punten der σ_n willekeurig nemen. Op het voetspoor van BURMESTER *) noem ik zulk eene groep van punten, welke de cf. ondubbelzinnig bepalen, eene *constellatie.*

Voor de volledige vierzijde σ_3 bestaat de constellatie uit twee paren overstaande toppen b.v. 12, (12); 13, (13). Voegt men aan dit viertal de punten 14, (15), 45 toe, dan is door deze 7 punten eene σ_5 bepaald; immers de lijnen 12 (12) en 13 (13) ontmoeten elkander in het punt 1, dat met de punten 45, 14, (15) de vierzijde doet ontstaan, waarvan de punten 15 en (14) het derde paar overstaande toppen zijn. Op dezelfde wijze geeft de toevoeging van 16, (17), 67 tevens de punten (16), 17, dus eene σ_7.

Voor σ_4 vormen de punten 12, (12), 13, (13), 14, 34 eene constellatie; immers het als boven gevonden punt 1 projecteert het punt 14 op de verbindingslijn der punten (13), 34 in het ontbrekende punt (14). Voegt men aan deze zespuntige constellatie de punten 15, (16), 56 toe, waardoor met behulp van 1 tevens (15), 16 bekend zijn, dan ontstaat de negenpuntige constellatie der σ_6. Algemeen:

De cf. σ_{2m} is bepaald door de constellatie:

12, (12), 13, (13), 14, 34, 15, (16), 56, .. 1 [2 $i-1$], (1 [2 i]),

---

*) „Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten" (*Civilingenieur* Bd. XXVI, 1880). De aldaar behandelde stelsels van momentaancentra behooren tot de vlakke polyedrale cf.

$[2\,i-1]\,[2\,i]\ldots 1\,[2\,m-1]$, $(1\,[2\,m])$, $[2\,m-1]\,[2\,m]$, *de cf.* σ_{2m+1} *door de constellatie*:

12, (12), 13, (13), 14, (15), 45, . . . 1 $[2\,i]$, $(1\,[2\,i+1])$, $[2\,i]\,[2\,i+1]$.

§ 2.

6. De cf. $\sigma_4 \equiv (12_4, 16_3)\,A$ bevat twaalf volledige vierzijden; daarvan worden er vier door de bovenstaande notatie der σ_n met behulp van *drie* getallen voorgesteld, terwijl de overige acht elk *vier* getallen vereischen; eene in σ_n begrepen vierzijde der tweede soort behoort derhalve slechts tot eene σ_4, terwijl de σ_3, welke door de getallen 1, 2, 3 wordt aangeduid, in elke der $n-3$ cf. σ_4 voortkomt, waarvan de notatie de getallen $1, 2, 3, i$ bevat.

In elke σ_n *zijn* $(2\,n-5)\binom{n}{3}$ *volledige vierzijden begrepen; elk punt van* σ_n *komt voor in* $(2\,n-5)\,(n-2)$, *elke lijn in* $2\,n-5$ *dier vierzijden.*

Onder de σ_3 met vier getallen zijn er $\binom{n}{4}$, welke enkel punten $i\,k$, dus enkel lijnen $i\,k\,l$ bezitten, zoodat hunne notatie de voor eene π_4 *) gebruikelijke is; verder bestaan er $4\binom{n}{4}$ uit drie collineaire punten $i\,k$ en drie punten $(i\,k)$, terwijl de overige $3\binom{n}{4}$ elk twee overstaande toppen $i\,k$ hebben.

7. In σ_n is het punt 12 gescheiden van (12) en van de $(n-2)\,(n-3)$ punten $i\,k$, $(i\,k)$, (waar $i = 3$ tot n, $k = 4$ tot n), dus ook van de lijnen $i\,k\,l$, $i\,k\,(l)$, welke door de getallen 3 tot n worden aangewezen, m. a. w.

Elke in σ_n *begrepen* σ_{n-2} *is de gemeenschappelijke restfiguur der beide punten, welke door de beide niet in* σ_{n-2} *voorkomende getallen zijn aangeduid.*

---

*) Vgl. mijn opstel „Over vlakke polyedrale configuraties" (*Versl. en Med.*, Deel VI. blz. 8).

8. Uit de $n-2$ lijnen $12\,i$ en de door hen gedragen punten der σ_n kan men blijkbaar $\binom{n-2}{p-2}$ cf. π_p vormen. Vervangt men in de tabel van elke dezer π_p eene of meer lijnen $12\,i$ door evenzoovele lijnen $12\,(i)$, daarbij zorg dragende zoovele punten $i\,k$ door punten $(i\,k)$ te vervangen, dat de voor σ_n geldige notatie der lijnen behouden blijft, dan verkrijgt men telkens eene tot σ_n behoorende π_p. Derhalve komt het punt 12 voor in

$$\binom{n-2}{p-2}\left\{1+(p-2)+\binom{p-2}{2}+\ldots+\binom{p-2}{i}+\ldots+1\right\}=$$
$$=\binom{n-2}{p-2}.\,2^{p-2}$$

cf. π_p. Daar σ_n $n(n-1)$ punten bevat, en elke in haar begrepen π_p $\binom{p}{2}$ maal in rekening wordt gebracht, wanneer men de bovenstaande beschouwing op alle punten der σ_n toepast, wordt het aantal der tot σ_n behoorende π_p $n(n-1)\binom{n-2}{p-2}.\,2^{p-2}:\binom{p}{2}=\binom{n}{p}.\,2^{p-1}$. Hier moet $p>4$ genomen worden, omdat σ_n, zooals boven bleek, ook vierzijden bevat, waarvoor de notatie slechts drie getallen vereischt. Derhalve:

Elke cf. σ_n *bevat* $\binom{n}{p}.\,2^{p-1}$ *cf.* π_p . $(p>4)$.

9. Uit eene π_4 kan door toevoeging van twee willekeurige met een punt der π_4 collineair gelegen punten eene σ_4 geconstrueerd worden. Immers liggen (12) en (13) op eene door het punt 23 getrokken rechte, dan projecteere men uit het snijpunt 1 der lijnen 12. (12) en 13. (13) het punt 14 op de lijn (12). 24, en noeme dit nieuwe punt (14). De σ_4, die door 12, 13, 14, (12), (13), (14) gaat, heeft nu met π_4 de punten 12, 13, 14, 23, 24, dus ook het punt 34 gemeen.

Zijn (12) en (13) willekeurig gekozen op eene rechte, welke door het punt 23 eener met behulp van de getallen

1, 2, 3, 4, 5 voorgestelde π_5 gaat, dan zal, als men het punt (14) als boven en het punt (15) als projectie van 15 op 12. (25) uit het punt 1 construeert, de σ_5, welke uit de punten 1 i en (1 i) kan gevonden worden, de vierzijden 1 2 3 4 en 1 2 3 5, derhalve ook het tiende punt 4 5 der der π_5 bevatten. Algemeen:

Door eene π_n en twee met een van hare punten collineair gelegen willekeurige punten is eene σ_n volkomen bepaald.

§ 3.

10. Elke σ_{2p} bezit groepen van $2p$ onderling gescheiden punten, b. v.

$$12\,,\ 34\,,\ 56\,,\ldots[2i-1]\,[2i],\ldots[2p-1]\,[2p]\,;$$
$$(12),\ (34),\ (56),\ldots([2i-1]\,[2i]),\ldots([2p-1]\,[2p]).$$

Worden de $2p\,(4p-4)$ cf.lijnen, welke in deze punten samenkomen, uit de cf. verwijderd, dan verliezen de overige $2p\,(2p-1)-2p$ punten elk $4p\,(4p-4):2p\,(2p-2)=4$ lijnen, vormen dus met de overblijvende

$$\frac{2}{3}\,.\,2p\,(2p-1)\,(2p-2)-4p\,(2p-2)=\frac{16}{3}\,p\,(p-1)\,(p-2)$$

lijnen eene cf.

$$\left(8\binom{p}{2}_{4(p-2)},\ 32\binom{p}{3}_{3}\right).$$

11. Door het teeken (1 2 3) duid ik de σ_3 aan, welke de getallen 1, 2, 3 voor de notatie harer elementen vereischt. Blijkbaar zijn dan in σ_9 de cf. (1 2 3), (4 5 6), (7 8 9) onderling gescheiden. Elk der 18 tot deze drie cf. behoorende punten is behalve met de beide tot de σ_3 te rekenen lijnen nog met twaalf lijnen incident, dus met 24 punten der σ_9 collineair gelegen. De overige 54 punten van σ_9 dragen dus elk $18 \times 24 : 54 = 8$ der genoemde lijnen, derhalve 6 van de overige lijnen der σ_9. Na de afzondering der 3 cf. σ_3 blijft dus eene $(54_6,\ 108_3)$ over.

Worden de getallen van 1 tot np in p groepen elk van

n getallen gerangschikt, dan zijn de p door deze groepen aangewezen en in σ_{np} begrepen cf. σ_n onderling gescheiden. Elk punt van zulk eene σ_n draagt nu behalve de $2n-4$ tot deze σ_n behoorende lijnen nog $2n(p-1)$ lijnen λ. De $p \,.\, n(n-1) \,.\, 2n(p-1)$ lijnen λ der σ_{np} bevatten elk nog twee punten μ dezer cf.; bijgevolg is elk der $np(np-n)$ punten μ incident met $2p \,.\, n(n-1) \,.\, 2n(p-1) : np(np-n)$ of $4n-4$ lijnen λ, dus met $(2np-4)-(n-4)$ of $2n(p-2)$ lijnen, welke geen punt van eenige σ_n dragen.

Derhalve:

Licht men uit eene cf. σ_{np} de elementen van p cf. σ_n, welke paarsgewijze genomen geen getal hunner notatie gemeen hebben, dan blijft er, na afzondering der lijnen, die naar de punten dier σ_n convergeeren, eene cf.

$$\left(2n^2\binom{p}{2}_{2n(p-2)},\ 4n^3\binom{p}{3}_3\right).$$

In deze uitkomst is blijkbaar voor $n = 2$ het in 10. behandelde bijzondere geval begrepen.

12. Neemt men in aanmerking, dat de beide door (1 2 3 4) en (1 5 6 7) aangewezen σ_4 geen element gemeen hebben, dan kan voor $n = 3m + 1$ elk getal met m drietallen tot evenzoovele onderling gescheiden σ_4 verbonden worden; zal het mogelijk zijn, op deze wijze eene tabel van $\frac{1}{12}n(n-1)$ gescheiden σ_4 te vinden, dan moet $n = 12k + 1$ of $12k + 4$ wezen. De samenstelling van zulk eene tabel geschiedt op de wijze, waarop ik in mijn opstel »Ueber polyedrale Configurationen" (*Math. Ann.* XXXIV, S. 240) zoogenaamde hoofd-σ_4-groepen heb gevormd. Hier volgen twee tabellen voor de beide kleinste waarden, welke n blijkens het bovenstaande kan hebben, dus voor $n = 13$ en 16; de vier getallen van elke σ_4 zijn daarbij onder elkander geplaatst.

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5	10
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6	11
3	5	7	9	6	9	8	8	7	9	9	8	12
10	11	12	13	13	12	11	12	13	11	10	10	13

$\ldots(2)$

$$\left|\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 9 & 10 & 11 & 12 & 10 & 9 & 12 & 11 & 11 & 12 & 9 & 10 & 12 & 11 & 10 & 9 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 13 & 14 & 16 & 15 & 16 & 15 & 13 & 14 & 15 & 16 & 14 & 13 & 14 & 13 & 15 & 16 & 8 & 12 & 16 \end{array}\right| \quad \ldots(3)$$

Wordt uit elke σ_4 eener zoodanige groep eene hoofdvierzijde weggelaten, b. v. uit (1 2 3 4) de hoofdvierzijde 1 2 3, 14 (2), 24 (3), 34 (1), waardoor σ_n in het geheel $\frac{1}{3}\, n\,(n-1)$ onderling gescheiden lijnen verliest, die samen alle punten der cf. dragen, dan ontstaat eene cf. met de indices $2\,n-5$ en 3. Verwijdert men daarentegen *alle* lijnen der verschillende σ_4, zoodat elk punt der σ_n vier lijnen verliest, dan komt eene cf. met de indices $2\,n-8$ en 3 te voorschijn.

Als $n \equiv 1$ of 4 (mod. 12) is, dan bezit σ_n hoofd-σ_n-groepen, d. w. z. groepen van σ_4, welke samen alle punten der σ_n bevatten. Licht men uit elke σ_4 der groep eene hoofdvierzijde, zoo ontstaat eene

$$\left(n\,(n-1)_{2\,n-5},\ \frac{1}{3}\,n\,(n-1)\,(2\,n-5)_3\right);$$

verwijdert men alle lijnen der groep, zoo blijft eene

$$\left(n\,(n-1)_{2\,n-8},\ \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-4)_3\right).$$

De voorgaande beschouwing kan uitgebreid worden tot het geval, dat $n \equiv 1$ (mod. $p-1$). Plaatst men achter elk getal $(n-1):(p-1)$ verschillende groepen van $p-1$ getallen, dan zal eene groep van $n\,(n-1):p\,(p-1)$ onderling gescheiden σ_p kunnen gevormd worden, wanneer $n\,(n-1)$ door $p\,(p-1)$ deelbaar is. Laat men in dit geval van elke σ_p der groep de cf. lijnen weg, dan verliest elk punt van σ_n $2\,p-4$ lijnen, blijft dus incident met $2\,n-2\,p$ der overige $\frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(n-2) - \frac{2}{3}\,n\,(n-1)\,(p-2)$ lijnen.

Voor $n-1$ deelbaar door $p-1$ en $n(n-1)$ deelbaar door $p(p-1)$ bezit σ_n hoofd-σ_p-groepen; door afscheiding van alle lijnen van zulk eene groep komt men tot eene cf.

$$\left(n(n-1)_{2(n-p)}, \frac{2}{3} n(n-1)(n-p)_3\right).$$

§ 4.

13. Beschouwt men in tabel (2) elk getal als de notatie van een punt, dan geven de 13 kolommen de notatie voor de lijnen eener 13_4, die, zooals gemakkelijk blijkt, niet geheel bestaanbaar kan wezen. Immers door afzondering van een harer punten met de vier daar samenkomende lijnen ontstaat eene $(12_3, 9_4)$, de reciproke figuur der buigpunten-cf. van Hesse, welke hoogstens drie bestaanbare punten bevat; laat men uit deze cf. eene lijn en de vier door haar gedragen punten weg, dan komt de bekende, reeds door Cayley (Crelle XXXVIII, 1848) opgemerkte, gedeeltelijk bestaanbare 8_3 te voorschijn.

14. Terloops wensch ik hier aan te toonen, dat er ook geene reëele 14_4 kan gevonden worden. Elk punt eener 14_4 is slechts van een punt der cf. gescheiden; verwijdert men zulk een puntenpaar benevens de acht door hen gedragen lijnen, dan houdt men eene cf. $(12_2, 6_4)$ over, d.w.z. de cf., welke uit de volledige zeszijde $(15_2, 6_5)$ ontstaat door afscheiding van een drietal onderling gescheiden punten. In de $(12_2, 6_4)$ met de lijnen a, b, c, d, e, f, welke de punten $a\,d$, $b\,e$, $c\,f$ niet bevat, is het punt $a\,b$ gescheiden van $c\,d$, $c\,e$, $d\,e$, $d\,f$, $e\,f$, zoodat het drietal $a\,b$, $c\,d$, $e\,f$ met een nieuw punt x, het drietal $a\,b$, $c\,e$, $d\,f$ met een punt y collineair kan gedacht worden. Op deze wijze vindt men vier lijnen door x en vier door y, welke elk met drie punten der $(12_2, 6_4)$ incident zijn en met deze cf. eene 14_4 vormen. Zoodoende komt men tot tabel (4), waar de punten der 14_4 door de getallen van 1 tot 14 zijn aangeduid.

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5	6	11
2	4	6	8	4	5	7	4	7	5	9	7	8	12
3	5	7	9	6	9	8	8	9	6	10	10	10	13
10	11	12	13	13	12	14	12	11	14	14	13	11	14

. .(4)

Nu worden de vier punten 2, 4, 6, 13 uit het punt 1 in de punten 2, 5, 12, 9 en uit het punt 14 in de punten 2, 9, 5, 12 geprojecteerd. Stelt men de dubbelverhouding van 2, 5, 12, 9 door α voor, dan is de dubbelverhouding van 2, 9, 5, 12 gelijk aan $(\alpha-1):\alpha$; daar uit $\alpha=(\alpha-1):\alpha$ volgt dat $\alpha^2-\alpha+1=0$ is, vormen de punten 2, 5, 9, 12 eene equianharmonische groep.

§ 5.

15. Om elke $\sigma_4 \equiv (12_4, 16_3)\,A$ kan eene tweetakkige kromme van den derden graad beschreven worden *); construeert men voor elke tot σ_n behoorende σ_4 de bijbehoorende K_3, dan ontstaat eene figuur, waarin $\binom{n}{4}$ kubische krommen elk twaalf der $n(n-1)$ punten dragen, zoodat elk punt van σ_n met $\binom{n-2}{2}$ dezer krommen incident is, en de zes punten eener in σ_n begrepen, door drie getallen voorgestelde σ_3 op $n-3$ dier krommen liggen. Voor σ_5 vindt men zoodoende de kubische $(20_3, 5_{12})$ van tabel (5).

K_3	Twaalftallen van punten.
V	12, 13, 14, 23, 24, 34, (12),(13),(14),(23),(24),(34).
IV	12, 13, 15, 23, 25, 35, (12),(13),(15),(23),(25),(35).
III	12, 14, 15, 24, 25, 45, (12),(14),(15),(24),(25),(45).
II	13, 14, 15, 34, 35, 45, (13),(14),(15),(34),(35),(45).
I	23, 24, 25, 34, 35, 45, (23),(24),(25),(34),(35),(45).

. .(5)

*) Vgl. mijn opstel „Over vlakke configuraties", (*Versl. en Med.* deel V. bl. 112).

De punten eener σ_n vormen met de tweetakkige kubische krommen, welke door de in de cf. begrepen σ_4 bepaald zijn, eene cf.

$$\left(n(n-1)_{\binom{n-2}{2}}, \binom{n}{4}_{12}\right).$$

16. De punten van elke tot σ_4 behoorende $(9_2, 6_3)\,A$ vormen met drie punten der geassociëerde σ_4 eene nieuwe σ_4 *); twee geassociëerde σ_4 geven dus aanleiding tot 32 cf. van dezelfde soort, die elk negen punten der eene en drie punten der andere cf. bevatten. Behalve de beide tot de oorspronkelijke σ_4 behoorende K_3 zijn er dus nog 32 kubische krommen, welke elk twaalf van de cf. punten dragen. Met behulp van de notatie van het zooeven aangehaalde opstel vindt men voor de cf. der 24 punten en 32 kubische krommen de volgende tabel, waar elke regel de twaalf punten eener K_3 bevat.

$$\left|\begin{array}{lll}
1\,2\,3\,5 & 1'\,3'\,4'\,5' & 1''\,2''\,4''\,5'' \\
1\,2\,3\,5 & 2'\,3'\,4'\,6' & 1''\,2''\,3''\,6'' \\
1\,2\,3\,6 & 1'\,2'\,3'\,6' & 2''\,3''\,4''\,5'' \\
1\,2\,3\,6 & 1'\,2'\,4'\,5' & 1'\,3''\,4''\,6'' \\
1\,2\,4\,5 & 1'\,3'\,4'\,8' & 1''\,2''\,3''\,8'' \\
1\,2\,4\,5 & 2'\,3'\,4'\,7' & 1''\,2''\,4''\,7'' \\
1\,2\,4\,6 & 1'\,2'\,3'\,7' & 1''\,3''\,4''\,8'' \\
1\,2\,4\,6 & 1'\,2'\,4'\,8' & 2''\,3''\,4''\,7'' \\
1\,3\,4\,7 & 1'\,2'\,3'\,7' & 1''\,2''\,4''\,5'' \\
1\,3\,4\,7 & 1'\,2'\,4'\,8' & 1''\,2''\,3''\,6'' \\
1\,3\,4\,8 & 1'\,3'\,4'\,8' & 2''\,3'\,4''\,5'' \\
1\,3\,4\,8 & 2'\,3'\,4'\,7' & 1''\,3''\,4''\,6'' \\
2\,3\,4\,7 & 1'\,2'\,3'\,6' & 1''\,2''\,3''\,8''
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

*) *Acta Math.* XII, S. 72.

2 3 4 7	1' 2' 4' 5'	1'' 2'' 4'' 7''	
2 3 4 8	1' 3' 4' 5'	1'' 3'' 4'' 8''	
2 3 4 8	2' 3' 4' 6'	2'' 3'' 4'' 7''	
1 5 6 7	1' 5' 7' 8'	1'' 5'' 6'' 8''	
1 5 6 7	2' 6' 7' 8'	2'' 5'' 6'' 7''	
1 5 6 8	3' 6' 7' 8'	3' 5'' 6'' 8''	
1 5 6 8	4' 5' 7' 8'	4'' 5'' 6'' 7''	
2 5 6 7	1' 5' 6' 8'	2'' 5'' 7'' 8''	
2 5 6 7	2' 5' 6' 7'	1'' 6'' 7'' 8''	
2 5 6 8	3' 5' 6' 7'	4'' 5'' 7'' 8''	. . . . . (6)
2 5 6 8	4' 5' 6' 8'	3'' 6'' 7'' 8''	
3 5 7 8	3' 5' 6' 7'	1'' 5'' 6'' 8''	
3 5 7 8	4' 5' 6' 8'	2'' 5'' 6'' 7''	
3 6 7 8	1' 5' 6' 8'	3'' 5'' 6'' 8''	
3 6 7 8	2' 5' 6' 7'	4'' 5'' 6'' 7''	
4 6 7 8	1' 5' 7' 8'	4'' 5'' 7'' 8''	
4 6 7 8	2' 6' 7' 8'	3'' 6'' 7'' 8''	
4 5 7 8	3' 6' 7' 8'	2'' 5'' 7'' 8''	
4 5 7 8	4' 5' 7' 8'	1'' 6'' 7'' 8''	

Let men nog op de beide door de twee geassociëerde σ_4 bepaalde kubische krommen, dan volgt:

De punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ *vormen met* 34 *tweetakkige krommen van den derden graad eene cf.* $(24_{17}, 34_{12})$, *waaruit door afzondering van twee bepaalde kubische krommen eene cf.* $(24_{16}, 32_{12})$ *kan ontstaan.*

De boven aangewezen 32 K_3 kunnen blijkens tabel (6) gerangschikt worden in 16 paren, zoodat de beide krommen van elk paar samen alle punten der $(24_3, 18_4)$ dragen. Uit de kubische cf. $(24_{16}, 32_{12})$ kunnen dus eenvoudiger cf. af-

geleid worden door een of meer paren van krommen uit haar weg te laten.

17. In de σ_4 bestaat de restfiguur der rechte $1\,1'\,1''$ uit de lijnen $2\,3'\,4''$, $2\,4'\,3''$, $3\,4'\,2''$, $3\,2'\,4''$, $4\,2'\,3''$, $4\,3'\,2''$ (notatie van het aangehaalde opstel in *Acta Math.*); zij vormen in deze volgorde de zijden van een zeshoek, waarvan de hoofddiagonalen $22'$, $4'4$, $33'$ in het punt $1''$ samenkomen, raken dus eene kegelsnede, welke door het teeken $(1\,1\,1)$ kan aangeduid worden. De 16 lijnen der σ_4 omhullen derhalve in zestallen 16 $\mathfrak{K}^2$, zoodat elke lijn 6 $\mathfrak{K}^2$ aanraakt. Voor de reciproke figuur der σ_4, d. i. de cf. $\Sigma_4 \equiv (16_3,\ 12_4)\,A$ heeft men dus:

De punten eener Σ_4 vormen met zestien kegelsneden eene conische cf. 16_6.

De volgende tabel geldt voor de beide cf. 16_6; de eerste kolom bevat de 16 kegelsneden, de overige òf de lijnen der σ_4 òf de punten der Σ_4.

(1 1 1)	2 3' 4''	2 4' 3''	3 4' 2''	3 2' 4''	4 2' 3''	4 3' 2''
(1 2 2)	2 3' 4''	2 4' 3''	3 1' 3''	3 3' 1''	4 4' 1''	4 1' 4''
(1 3 3)	2 1' 2''	2 2' 1''	3 2' 4''	3 4' 2''	4 4' 1''	4 1' 4''
(1 4 4)	2 1' 2''	2 2' 1''	3 3' 1''	3 1' 3''	4 2' 3''	4 3' 2''
(2 1 2)	1 3' 3''	1 4' 4''	3 2 4''	3 3' 1''	4 2' 3''	4 4' 1''
(2 2 1)	1 3' 3''	1 4' 4''	3 4' 2''	3 1' 3''	4 1' 4''	4 3' 2''
(2 3 4)	1 1' 1''	1 2' 2''	3 4' 2''	3 1' 3''	4 2' 3''	4 4' 1''
(2 4 3)	1 1' 1''	1 2' 2''	3 2' 4''	3 3' 1''	4 3' 2''	4 1' 4''
(3 1 3)	1 2' 2''	1 4' 4''	2 3' 4''	2 2' 1''	4 4' 1''	4 3' 2''
(3 2 4)	1 1' 1''	1 3' 3''	2 4' 3''	2 1' 2''	4 3' 2''	4 4' 1''
(3 3 1)	1 2' 2''	1 4' 4''	2 4' 3''	2 1' 2''	4 2' 3''	4 1' 4''
(3 4 2)	1 1' 1''	1 3' 3''	2 3' 4''	2 2' 1''	4 2' 3''	4 1' 4''
(4 1 4)	1 2' 2''	1 3' 3''	2 4' 3''	2 2' 1''	3 3' 1''	3 4' 2''
(4 2 3)	1 1' 1''	1 4' 4''	2 3' 4''	2 1' 2''	3 3' 1''	3 4' 2''
(4 3 2)	1 1' 1''	1 4' 4''	2 4' 3''	2 2' 1''	3 2' 4''	3 1' 3''
(4 4 1)	1 2' 2''	1 3' 3''	2 3' 4''	2 1' 2''	3 1' 3''	3 2' 4''

. . (7)

Daar elke lijn der σ_n tot $n-3$ cf. σ_4 behoort, zullen de zestientallen van rakende kegelsneden, welke door de $\binom{n}{4}$ cf. σ_4 bepaald zijn, met de $4\binom{n}{3}$ lijnen der σ_n eene cf. vormen, waarin elke kegelsnede door zes lijnen wordt aangeraakt, terwijl elke lijn $6(n-3)$ maal als raaklijn voorkomt. Voor de wederkeerige figuur Σ_n der σ_n geldt dus:

De punten eener Σ_n geven aanleiding tot eene conische cf.

$$\left(4\binom{n}{3}_{6(n-3)},\ 16\binom{n}{4}_6\right).$$

§ 6.

18. Zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6 zes conconische punten der serpentine eener tweetakkige kubische kromme, dan zal de K_2, welke van elk der punten 1, 2, 3, 4, 5 een antitangentiaalpunt bevat, door een der antitangentiaalpunten van 6 gaan, daar immers de tangentiaalpunten van zes conconische punten wederom een conisch zestal vormen; de 24 antitangentiaalpunten liggen dus in zestallen op 4^5 kegelsneden. Behooren de zes conconische punten tot eene eentakkige K_3, zoodat elk hunner slechts twee bestaanbare antitangentiaalpunten bezit, dan zijn er slechts 2^5 kegelsneden. Dus:

De antitangentiaalpunten van zes conconische punten der serpentine eener kubische kromme vormen met 1024 *kegelsneden eene cf.* $(24_{256},\ 1024_6)$.

Behooren de zes punten tot eene eentakkige kubische kromme, dan geven zij aanleiding tot eene conische $(12_{16},\ 32_6)$.

De laatste cf. maakt natuurlijk deel uit van de eerste; immers wanneer men bij de tweetakkige kromme de op het ovaal gelegen raakpunten buiten beschouwing laat, zullen de overige twaalf slechts 32 kegelsneden bepalen; dit zal trouwens ook zoo zijn, als men van een even aantal punten de antitangentiaalpunten op het ovaal, van de overige de antitangentiaalpunten op de serpentine neemt. De boven gevonden cf. ontaarden blijkbaar in twee cf. σ_4

of twee σ_3, zoodra de K_3 der zes punten in twee rechten overgaat.

19. Door gebruik te maken van eene elders door mij bewezen eigenschap, volgens welke de rechte, die eenig punt eener osculatiegroep der n^{de} orde met eenig punt eener gelijksoortige groep verbindt, de kubische kromme in een punt ontmoet, waarvan het n^{de} restpunt met de restpunten der bedoelde groepen collineair ligt *), kan men conische cf. van meer samengestelden aard construeeren.

Zijn (12), (34), (56) de snijpunten van K_3 met de lijnen 12, 34, 56, dan volgt uit de conconische ligging der punten 1 tot 6 de collineaire ligging van (12), (34), (56). Stelt men nu door i_n een n^{de} *antirestpunt* van i voor, d. w. z. een punt van de osculatiegroep der n^{de} orde, waarvan i het restpunt is, dan gaat, volgens de bovenstaande eigenschap, de lijn $1_n\, 2_n$ door een der punten $(12)_n$, $3_n\, 4_n$ door een der punten $(34)_n$; verder de lijn $(12)_n\,(34)_n$ door een der punten $(56)_n$, dus de lijn $5_n\,(56)_n$ door een der punten 6_n, m. a. w. elke kegelsnede, welke van elke der door 1, 2, 3, 4, 5 bepaalde osculatiegroepen een punt bevat, gaat door een n^{de} antirestpunt van 6. Daar dezelfde beschouwing voor *anticentra* geldt, d. w. z. voor punten der centraalgroepen, waarvoor de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6 de centra der m^{de} orde zijn, heeft men algemeen.

Construeert men voor zes conconische punten eener eentakkige kubische kromme de osculatiegroepen der n^{de} orde, dan vormen de punten dezer groepen met een stelsel van kegelsneden eene cf.

$$(6\,(3\,n-1)_{(3n-1)^4},\ (3\,n-1)^5{}_6).$$

Bepaalt men van elk dier zes punten de centraalgroepen der m^{de} orde, dan vindt men eene conische cf.

$$(6\,(3\,m-2)_{(3m-2)^4},\ (3\,m-2)^5{}_6).$$

---

*) „Over vlakke configuraties, welke uit de osculatiegroepen der kubische kromme kunnen gevormd worden" (*Versl. en Med.*, Deel VI, blz. 237)

Deze beschouwingen gelden ook voor zes conconische punten der serpentine van eene tweetakkige kubische kromme, mits men voor oneven waarde van n een even aantal osculatiegroepen op de serpentine kiest; voor even waarden van n kan een even aantal der conconische punten tot het ovaal behooren. (Zie blz. 236 van het laatst aangehaalde opstel.)

20. Wordt, evenals boven, het snijpunt van K_3 met de verbindingslijn der punten i en k door $(i\,k)$ aangewezen, dan volgt uit de conconische ligging der punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, dat de punten $(i\,k)$, $(l\,m)$, $(n\,p)$ collineair liggen, zoodat de 15 punten $(i\,k)$ tot eene cf. 15_3 behooren, welke gelijksoortig is met de atrigonische 15_3 van MARTINETTI *). Deze cf. bezit 6 hoofdvijfzijden, welke ik door a, b, c, d, e, f zal voorstellen. Daar elke cf.lijn tot twee dier hoofdvijfzijden behoort, kunnen de 15 lijnen der cf. door de combinaties twee aan twee der zes boven genoemde letters worden aangeduid. Zoodoende komt men tot de volgende tabel dezer 15_3:

Lijnen	(ab)	(ef)	(cd)	(df)	(ac)	(be)	(ce)	(bf)	(ad)	(bd)	(ae)	(cf)	(af)	(bc)	(de)	
	(12)	(12)	(12)	(13)	(13)	(13)	(14)	(14)	(14)	(15)	(15)	(15)	(16)	(16)	(16)	
Punten	(34)	(35)	(36)	(24)	(25)	(26)	(23)	(25)	(26)	(23)	(24)	(26)	(23)	(24)	(25)	(8)
	(56)	(46)	(45)	(56)	(46)	(45)	(56)	(36)	(35)	(46)	(36)	(34)	(45)	(35)	(34)	

De restfiguur der lijn $(a\,b)$ is eene $(12_2, 8_3)\,A$ met de lijnen $(a\,c)$, $(a\,d)$, $(a\,e)$, $(a\,f)$ en $(b\,c)$, $(b\,d)$, $(b\,e)$, $(b\,f)$. Wordt nu het snijpunt der lijnen $(a\,c)$ en $(b\,c)$ door het teeken $(a\,b)\,c$ aangeduid, dan vormen de genoemde twee viertallen van lijnen de volgende $(16_2, 8_4)\,A$:

$$\left\{\begin{array}{llll} (13) & (25) & (a\,b)\,c & (46) \\ (26) & (14) & (35) & (a\,b)\,d \\ (a\,b)\,e & (36) & (24) & (15) \\ (45) & (a\,b)\,f & (16) & (23) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

*) „Sopra alcune configurazioni piane" (*Annali di Matematica*. XIV. p. 173). De bovengenoemde constructie dezer cf. werd mij in Januari 1889 door Dr. SCHOENFLIES medegedeeld, tegelijk met de constructie eener na te melden 27_3.

(Elke rij en elke kolom in (9) bevat de punten eener cf.lijn).

Daar de punten dezer cf. de basis van een bundel krommen der vierde orde vormen, en twaalf dier punten concubisch zijn, liggen de overige vier in eene rechte, welke ik door $a\,b$ voorstel; men heeft dan

$$a\,b \equiv ((a\,b)\,c,\ \ (a\,b)\,d,\ \ (a\,b)\,e,\ \ (a\,b)\,f).$$

Ten opzichte van deze lijn verkeeren de vierzijden $((a\,c)$, $(a\,d)$, $(a\,e)$, $(a\,f))$ en $((b\,c)$, $(b\,d)$, $(b\,e)$, $(b\,f))$ in lineale ligging; bijgevolg komen de zes verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten drie aan drie in vier nieuwe punten samen. Deze zes verbindingslijnen zijn blijkbaar

$c\,d \equiv ((c\,d)\,a,\ \ (c\,d)\,b)$	$e\,f \equiv ((e\,f)\,a,\ \ (e\,f)\,b)$
$c\,e \equiv ((c\,e)\,a,\ \ (c\,e)\,b)$	$d\,f \equiv ((d\,f)\,a,\ \ (d\,f)\,b)$
$c\,f \equiv ((c\,f)\,a,\ \ (c\,f)\,b)$	$d\,e \equiv ((d\,e)\,a,\ \ (d\,e)\,b)$

De bedoelde vier punten kunnen dan aangeduid worden door $c\,d\,e \equiv (c\,d,\ d\,e,\ e\,c)$ enz. Nu vormen de 60 punten $(a\,b)\,c$ enz. en de 20 punten $a\,b\,c$ enz. met de 15 lijnen $(a\,b)$ enz. en de 15 lijnen $a\,b$ enz. eene cf. $(80_3,\ 30_8)$, waarin $(a\,b)\,c$ de lijnen $a\,b$, $(a\,c)$, $(b\,c)$ en $a\,b\,c$ de lijnen $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$ draagt; deze cf. is dus reciprook verwant met de cf. σ_6.

De 15 *lijnen en* 60 *nevenpunten der atrigonische* 15_3 *behooren tot eene cf.* Σ_6. *De nieuwe* 15 *lijnen en* 20 *punten dezer cf. vormen de reciproke figuur eener* π_6.

21. Zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de snijpunten van eene kromme van den vierden graad met eene kegelsnede, en duidt men door $(i\,k)_1$ en $(i\,k)_2$ de punten aan, welke K_4 nog met de verbindingslijn van i en k gemeen heeft, dan zijn de acht punten

$$(i\,k)_1,\ (l\,m)_1,\ (n\,p)_1,\ (q\,r)_1;\ (i\,k)_2,\ (l\,m)_2,\ (n\,p)_2,\ (q\,r)_2$$

eveneens conconisch. De 28 lijnen $i\,k$ bepalen derhalve $8!:2^4.4! \doteq 105$ kegelsneden, zoodat de 56 punten $(i\,k)$

tot eene conische cf. $(56_{15}, 105_8)$ behooren. Voor eene K_n vindt men op dezelfde wijze:

Is een $2n$-hoek gelijktijdig in eene kromme van den graad n en in eene kegelsnede beschreven, dan bepalen zijne $n(2n-1)$ zijden op de kromme K_n $n(2n-1)(n-2)$ punten, welke met $(2n)!:(2^n . n!)$ krommen van den graad $n-2$ eene cf. vormen, waarvoor de puntenindex $(2n-2)!:(2^{n-1}.(n-1)!)$ en de krommenindex $n(n-2)$ is.

Ontaardt de kegelsnede in twee rechten, dan ontstaat eene cf.

$$(n^2 (n-2)_{(n-1)!}, \; n!_{n(n-2)}).$$

22. Worden de punten eener in K_3 beschreven cf. uit elk van drie collineaire punten 1, 2, 3 dezer kromme op haar geprojecteerd, dan bepalen de negen projecties van elk drietal collineaire cf. punten i, k, l eene atrigonische $(9_2, 6_3)$ met de lijnen:

$(1\,i)\;(2\,k)\;(3\,l)$	$(1\,i)\;(2\,l)\;(3\,k)$	
$(1\,k)\;(2\,l)\;(3\,i)$	$(1\,k)\;(2\,i)\;(3\,l)$	. . (10)
$(1\,l)\;(2\,i)\;(3\,k)$	$(1\,l)\;(2\,k)\;(3\,i)$	

Elk punt eener in K_3 beschreven $(3\,p_x, p\,x_3)$ *) levert dus door projectie drie nieuwe punten, welke elk $2\,x$ nieuwe lijnen dragen; de $9\,p$ projecties vormen derhalve met de $6\,p\,x$ lijnen der $p\,x$ cf. $(9_2, 6_3)$ eene cf. $(9\,p_{2x}, 6\,p\,x_3)$.

Vormen in de oorspronkelijke cf. de punten 4, 5, 6 een cf. driehoek, zoodat de zijden 45, 56, 64 achtereenvolgens de cf.punten 7, 8, 9 bevatten, dan ontstaan door projectie o. a. de drie lijnen (14) (25) (37), (25) (36) (18), (36) (14) (29), d. w. z. (14), (25), (36) zijn de toppen van een cf. driehoek der nieuwe cf. Daar de projectiecentra 1, 2, 3 zes permutaties toelaten, levert elke cf. driehoek der oude cf. zes driehoeken in de nieuwe cf.

Door projectie der punten eener in K_3 beschreven $(3\,p_x, p\,x_3)$

---

*) Hier moet voor p eene breuk genomen worden, wanneer men eene cf. μ_3 bedoelt, en μ geen drievoud is.

uit drie collineaire punten der kromme vindt men eene $(9p_{2x}, 6px_3)$ *met zesmaal zoovele cf. driehoeken en p x atrigonische* $(9_2, 6_3)$ *).

De uitbreiding der voorgaande beschouwing tot krommen van den graad n levert nieuwe cf. van punten en krommen.

Worden de punten eener in K_n *beschreven* $(n\,p_x,\ p\,x_n)$ *uit n collineaire punten der kromme op haar geprojecteerd, dan ontstaat eene uit punten en krommen van den graad* $(n-2)$ *gevormde cf.*

$$(n^2\,(n-2)\,p_{(n-1)!\,x},\quad n!\,p\,x_{n(n-2)}).$$

23. Van eene in K_3 beschreven atrigonische $(9_2,\ 6_3)$ stel ik de punten door de getallen 1 tot 9 voor en de lijnen door 123, 456, 789, 147, 258, 369. Wordt nu het drietal 4, 5, 6 uit de punten 1, 2, 3 op K_3 geprojecteerd, dan valt eene der zes lijnen, welke de negen projecties in drietallen vereenigen, met 789 samen; drie andere bevatten elk een der punten 7, 8, 9; de beide overige bevatten achtereenvolgens de projecties (15), (26), (34) van 5, 6, 4 uit 1, 2, 3 en de projecties (16), (24), (35) van 6, 4, 5 uit 1, 2, 3. Elk der zes paren onderling gescheiden lijnen der $(9_2,\ 6_3)$ levert nu twee gescheiden lijnen, die elk drie van de achttien snijpunten der kromme met de diagonalen der cf. dragen, m. a. w. deze nieuwe punten vormen met twaalf nieuwe lijnen eene $(18_2,\ 12_3)$, welke door de volgende tabel wordt voorgesteld.

$$\left|\begin{matrix}(15)&(15)&(16)&(16)&(18)&(18&(19)&(19&(26)&(29)&(48)&(49)\\(26&(27)&(24)&(37)&(24)&(29)&(27)&(34)&(38)&(35)&(59)&(68\\(34)&(48)&(35)&(49)&(57)&(37)&(38)&(67)&(59)&(68)&(67)&(57)\end{matrix}\right| \quad . \ . \ (11)$$

Tracht men deze cf. te construeeren, dan blijkt, dat zij

---

*) Wordt deze constructie toegepast op eene volledige vierzijde, dan ontstaat eene $(18_4,\ 24_3)$ met zes volledige vierzijden, die de reciproke figuur is der harmonische $(24_3,\ 18_4)$. Vgl. mijn opstel „Over de harmonische $(24_3,\ 18_4)$" (*Versl. en Med.*, Deel V, blz. 210).

het samenstel is van twee geheel gescheiden $(9_2, 6_3)$, welke met behulp van eene bekende notatie door

$$\left\{\begin{matrix}(15)\ (26)\ (34)\\(27)\ (38)\ (19)\\(48)\ (59)\ (67)\end{matrix}\right\} \quad \text{en} \quad \left\{\begin{matrix}(16)\ (24)\ (35)\\(37)\ (18)\ (29)\\(49)\ (57)\ (68)\end{matrix}\right\} \quad \ldots (12)$$

worden voorgesteld; met de oorspronkelijke $(9_2, 6_3)$ behooren zij tot de op bl. 92 aangehaalde 27_3 van SCHOENFLIES, die behalve de 18 lijnen der drie $(9_2, 6_3)$ nog deze lijnen bevat:

$$\left|\begin{matrix}1\\(59)\\(68)\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\(49)\\(67)\end{matrix}\left|\begin{matrix}3\\(48)\\(57)\end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\(29)\\(38)\end{matrix}\left|\begin{matrix}5\\(19)\\(37)\end{matrix}\right|\begin{matrix}6\\(18)\\(27)\end{matrix}\left|\begin{matrix}7\\(26)\\(35)\end{matrix}\right|\begin{matrix}8\\(16)\\(34)\end{matrix}\left|\begin{matrix}9\\(15)\\(24)\end{matrix}\right| \quad \ldots (13)$$

24. Construeert men voor de atrigonische 15_3 de snijpunten van hare 60 diagonalen met K_3, dan levert elke der tien in haar begrepen atrigonische $(9_2, 6_3)$ twee nieuwe soortgelijke cf., welke elk negen van die 60 punten bevatten; elk dezer nieuwe punten behoort derhalve tot drie cf. $(9_2, 6_3)$. Daar nu elke lijn dezer 20 cf. uit twee gescheiden lijnen der 15_3 ontstaat, welke tot geen andere in de 15_3 begrepen $(9_2, 6_3)$ behooren, leveren de genoemde 20 cf. 120 verschillende lijnen, zoodat zij samen eene cf. $(60_6, 120_3)$ vormen.

Deze constructie eener nieuwe cf. uit de snijpunten van K_3 met de diagonalen eener in haar beschreven cf. kan uitgevoerd worden, als de cf. regelmatig is en atrigonische $(9_2, 6_3)$ bevat. Zij kan uitgebreid worden tot cf. in krommen van den n^{den} graad beschreven, welke cf. $(n^2{}_2, 2n_n)$ met twee hoofd-n-zijden bevatten.

Kampen, 25 September 1889.

OBSERVATIONS

SUR QUELQUES

SPHÉROPSIDÉES QUI CROISSENT SUR LES FEUILLES DES ESPÈCES EUROPÉENNES DE DIANTHUS

PAR

C. A. J. A. OUDEMANS.

Les Sphéropsidées qui font l'objet de l'étude suivante, sont les Ascochyta Dianthi, Depazea Dianthi, Dinemasporium Dianthi, Phyllosticta Dianthi et Septoria Dianthi de divers auteurs, qui jusqu'à ce jour n'ont pas échappé à un certain désordre lorsqu'on voulut en tracer la synonymie, et dont la signification varie beaucoup selon les auteurs qu'on croit devoir consulter.

Je commence par la communication que, de tous les noms cités, il n'y a que deux qui ont droit d'existence, savoir l'Ascochyta Dianthi et le Septoria Dianthi, tandisque les autres ne peuvent être employés que comme synonymes de ceux-ci. Les résultats auxquels je suis parvenu se trouvent réunis dans la table suivante, tracée d'après les caractères attribués aux genres par Mr. le prof. SACCARDO dans son Sylloge.

Révision.

1. *Ascochyta Dianthi* LIBERT Pl. crypt. Arduennae n⁰. 158; Berk. Outl. 320; Cooke Brit. Fgi 456; Sacc. Syll. III, 398.

Sicc. Lib. Ard. n⁰. 158.

Synonymes.

1. Sphaeria Dianthi Alb. et Schw. Consp. 47 et Tab. VI, fig. 2; Fr. Syst. Myc. II, 531; Wallr. Fl. Cr. 767.
2. Depazea Dianthi Rab. Kr. Fl. 137.
3. Depazea vagans δ. Dianthi Kickx Louv. 125.
4. Septoria Dianthi West. Herb. Cr. Belge n⁰. 293.
   Sicc. West. Herb. Cr. Belge n⁰. 293.
5. Phyllosticta Dianthi West. Notices II, 20; Kickx Crypt. d. Fl. I, 411; Cooke Grev. XIV, 73; Sacc. Syll. III, 43; Bomm. et Rouss. Flor. Myc. de Brux. 254.
   Sicc. Roumeg. Fgi Gall. n⁰. 1324.
6. Dinemasporium Dianthi Oudem. Bot. Zeit. 1875, p. 591; Sacc. Syll. III, 684.

2. *Septoria Dianthi* Desm. Ann. d. Sc. nat. 3e S., XI, 346; Sacc. Mycol. Veneta 197; Sacc. Michelia I, 187; Sacc. Syll. III, 516.
   Sicc. Rabenh. Fgi Europ. n⁰. 360; Roumeg. Fgi Gallici n⁰. 1431.

Synonymes.

1. Ascochyta Dianthi Lasch in Klotzsch et Rabenh. Herb. Myc. Ed. 1a, n⁰. 863.
   Sicc. Lasch in Kl. et Rab. Herb. Myc. Ed. 1a, n⁰. 863; Fuck. Fgi Rhen. n⁰. 490.
2. Depazea Dianthi Desm. Champ. du Nord de la France, 1e Ed. n⁰. 344.
   Sicc. Desm. Ch. du Nord de la Fr. 1e Ed. n⁰. 344.

L'occasion m'ayant été donnée d'examiner tous les échantillons desséchés dont j'ai fait mention, il me semble que mes communications pourront avoir quelque intérêt pour ceux qui s'occupent d'études systématiques sur le vaste champ de la mycologie.

Qu'il me soit permis de présenter à présent quelques observations, qui pourront servir à faire mieux comprendre la Révision précédente.

I. L'*Ascochyta Dianthi* — le nom du genre pris dans le

sens que lui attribue Mr. SACCARDO dans *Syll.* III, 384 — n'a pas été introduit dans la science par BERKELEY, mais par Mlle LIBERT. Celle-ci, en même temps l'auteur du nom générique, en faisait usage dès l'année 1832 (*Pl. crypt. Arduennae*, 2e Livr. n0. 158), tandisque BERKELEY n'écrivit qu'en 1860 (*Outlines* p. 320). BERKELEY, en plaçant l'initiale B. derrière le nom spécifique, donna lieu à l'opinion qu'il en était l'auteur. ce dont on peut se convaincre en consultant le *Handbook of British Fungi* de Mr. COCKE (p. 456) et le *Sylloge* de Mr. SACCARDO (III, 398). Ces deux savants ont été le dupe de cette initiale, prouvant par là que la collection LIBERT (Quatre Centuries en 4⁰) leur était restée inconnue, justement comme à BERKELEY.

Il existe encore une autre particularité dans les oeuvres de BERKELEY, là où il s'explique sur l'*Ascochyta Dianthi*, que je ne pourrais passer sous silence. En effet, une note ajoutée à ce nom au page 320 de ses *Outlines*, nous apprend qu'une figure des sporules se trouve ajoutée au n0. 104 des champignons d'Angleterre, décrits par lui dans les *Annals of Natural History* (Tome I, p. 207, a0 1838). Là pourtant le champignon porte le nom de: »Sphaeria (Depazea) Dianthi ALB. et SCHWEIN. (*Consp.* p. 47)", de sorte qu'il n'y a pas de doute que BERKELEY crut pouvoir tenir ces deux noms pour synonymes. Quoiqu'il y aurait lieu de conserver quelque doute à cet égard, admettons que l'auteur ait deviné juste. Ce que nous voulions mettre en relief, c'est que le terme »Depazea" ne se trouve nulle part dans le Conspectus cité et que ALBERTINI et SCHWEINITZ se sont contentés du nom »Sphaeria Dianthi", sans rien de plus. Il est évident que BERKELEY ne s'est pas adressé directement à l'ouvrage de ces mycologues, mais qu'il n'y vit point d'embarras à copier FRIES, qui, après avoir introduit le sous-genre Depazea parmi les Sphaeriae foliicolae (*Syst. Myc.* II, 527), fit mention du Sphaeria Depazea Dianthi, non comme si cette nomenclature lui serait personelle, mais comme s'il l'avait empruntée aux auteurs du Conspectus.

Mais il y a plus. En examinant de plus près la figure des *Annals of Natural History* et la légende qui s'y rap-

porte, nous nous apercevons: 1⁰ que les sporules dessinées n'avaient pas été cueillies d'une espèce de Dianthus, comme le voulaient les *Outlines* (»On living pink-leaves"), mais sur l'Agrostemma Githago, et 2⁰ que ces sporules, mesurant 15 millim. de long sur 5 mill. de large, et ayant été grossies 600 fois, avaient eu une longueur et une largeur réelle respectivement de 25 sur $8^1/_3$ microns. Or, ce sont des dimensions beaucoup trop fortes pour l'Ascochyta en question.

En récapitulant tout ceci, trois choses semblent possibles: ou que par erreur l'Agrostemma Githago ait été signalé au lieu d'une espèce de Dianthus — mais alors les mesures seraient fautives; ou bien que le nom d'Agrostemma Githago ait été exact et que les mesures ne laissent rien à désirer — mais alors les figures n'auraient pas du être signalées comme représentant les sporules de l'Ascochyta Dianthi; ou bien enfin que l'Agrostemma Githago et le Dianthus barbatus (ou telle autre espèce de Dianthus) produisent la même espèce d'Ascochyta — mais alors les mesurages n'ont pas été institués avec l'exactitude nécessaire.

Quant à moi, je me confesse à la troisième supposition, parce qu'il ne peut y avoir de doute que les sporules appartiennent à une espèce d'Ascochyta *), et que j'ai quelque peine à soupçonner que Berkeley, en mycologue expérimenté, aurait noté inexactement les plantes attaquées d'un champignon et soumises à son examen, ou ne se serait pas aperçu que les sporules de l'Ascochyta, parasite de l'Agrostemma, étaient beaucoup plus grosses que celles appartenant à l'Ascochyta du Dianthus.

Je n'ai donc pas hésité à regarder le champignon, signalé par Berkeley dans ses *Outlines*, comme identique avec celui, publié sous le n⁰ 158 par Mlle Libert dans ses Pl. cr.

---

*) Quoique les figures de Berkeley ne montrent que des sporules uniloculaires, pourtant sa description, faisant mention de: „Sporidia spathulate, sometimes divided in two parts, as the spores of Dactylium pyriforme Fr. containing a few globose granules" ne laisse exister aucun doute qu'il n'en ait observé des biloculaires.

Arduennae, et cela d'autant moins que Mr. Cooke, dans Grevillea XIV, p. 76, continue à affirmer que l'*Ascochyta Dianthi* se présente également bien sur l'Agrostemma et le Dianthus.

II. La diagnose publiée par feu Mlle Libert à propos de l'*Ascochyta Dianthi*, étant conçue dans ces termes: »Epiphylla. Maculis indeterminatis pallidis; peritheciis minutis fuscis poro apertis; cirrhis albis; ascis ellipsoideis; sporidiis 3 pellucidis", la demande nous est suggérée, dans quel sens doive être accepté le mot »Epiphylla", c'est à dire, si l'auteur l'aurait employée exclusivement pour indiquer que le champignon occupe les feuilles, ou bien qu'il en occupe la face supérieure. Or, la circonstance que sur l'étiquette du n° 164 de la même collection, représentant le Leptothyrium Juglandis, l'on rencontre le mot »Hypophylle", nous force à admettre que Mlle Libert ne fit usage de ces deux mots que dans un sens limité. Cela étant, il nous importe à relever, que l'*Ascochyta Dianthi* nait sur les *deux* faces des feuilles indistinctement, d'où il suit que la diagnose ci-dessus répétée devrait être améliorée en ce sens.

III. La question, si le *Sphaeria Dianthi* d'Albertini et Schweinitz (Conspectus Fungorum Lusatiae superioris, p. 47) soit identique avec l'*Ascochyta Dianthi* Lib. n'est pas facile à résoudre, à cause que ces auteurs ne font aucune mention ni de la forme, ni de la dimension des sporules. Néanmoins il me semble que leurs figures (Tab. VI, f. 2 *a,b,c,d*) ressemblent plus aux taches attaquées par l'*Ascochyta*, qu'à celles portant le *Septoria Dianthi*. Les périthèces de ce dernier m'ont toujours paru moins enflés, plus petits et plus rapprochés l'un de l'autre que ceux qu'on trouve figurés par les auteurs du Conspectus. Ajoutons que Albertini et Schweinitz, quoique (résultat d'observation incomplète) niant l'existence d'une ouverture dans les périthèces de leur espèce, n'oublient pas de nous apprendre que ceux-ci se montrent souvent couronnés d'un fil tordu de glaire raidie d'un blanc-jaunâtre, et que les mycologues qui ont eu l'occasion d'examiner l'*Ascochyta Dianthi* se sont exprimés dans le même sens. Des exemplaires de ce champignon, récemment cueillis au

mois de Novembre de cette année, nous montraient également ces cirrhes avec une netteté remarquable. Certes, les périthèces du *Septoria Dianthi* se trouvent souvent dans le même cas, mais il est juste d'attirer l'attention sur le fait que DESMAZIÈRES (l'auteur de l'espèce) et ses successeurs, dissérant sur ce champignon, ne lui attribuent jamais que des cirrhes parfaitement blancs.

IV. Le *Depazea Dianthi*, mentionné par RABENHORST dans »Deutschlands Kryptogamen-Flora", I, 137, n'est autre chose que le *Sphaeria Depazea Dianthi* FR., mais devenu plus ou moins méconnaissable, par suite que le sous-genre *Depazea* fut élevé au rang de genre par l'auteur allemand. Or, s'il n'est pas douteux que le champignon de FRIES soit identique avec celui d'ALBERTINI et SCHWEINITZ, et que celui-ci ne diffère point de la plante de Mlle LIBERT, il est évident que la place du *Depazea Dianthi* fut nettement indiquée.

V. Le *Depazea vagans δ. Dianthi* KICKX (Flore cryptog. des environs de Louvain, p. 125), lui aussi, est identique — l'auteur lui-même nous en assure — avec l'*Ascochyta Dianthi* LIB., connu d'au topsie, parceque le numéro (158) qu'il occupe dans l'herbier vénal de cette dame, est dûment cité. Tout comme RABENHORST, KICKX s'est permis d'élever au rang de genre le sous-genre de FRIES et d'annoncer l'existence d'un *Depazea vagans* FR., là où le célèbre mycologue d'Upsala ne fit mention que du *Sphaeria Depazea vagans*. C'est à cause de ce procédé que nous n'avons pas hésité de supprimer l'autorité de FRIES après le nom spécifique.

Reste à demander l'attention pour le fait que KICKX, en faisant mention de l'*Ascochyta Dianthi* comme d'une variété du *Depazea vagans*, par cela-même supprima l'espèce nommée *Sphaeria Depazea Dianthi* de FRIES, manière d'agir réprochable, parceque le *Sphaeria Depazea vagans* FR. embrasse la plupart des espèces, rangées aujourd'hui sous les titres de *Phyllosticta* et de *Septoria*, deux genres qu'il faut absolument tenir à quelque distance du genre *Ascochyta*.

VI. Le *Phyllosticta Dianthi* WEST. (*Not.* II, 20; imprimée dans le *Bulletin de l'Acad. royale de Belgique*, XVIII, 5 Juill. 1851 et 8 Nov. 1851), remplaçant le *Septoria Dianthi*

du même auteur, publié dans l'Herbier cryptogamique de Belgique, jadis (*Botan. Zeit.* 1875, p. 591 et SACCARDO *Syll.* III, 684) fut transféré par moi-même dans le genre *Dinemasporium*, à cause que les périthèces m'avaient paru porter des soies brunâtres, en même temps que j'avais cru découvrir aux extrémités des sporules un appendice mucroniforme. Un nouvel examen, entrepris dans ces derniers temps, m'ayant appris que les périthèces hérissées, croissant parmi ceux du *Phyllosticta*, appartenaient à une espèce de *Vermicularia*, trop jeune encore pour avoir pu produire des sporules, je me hâte à redresser ma faute et à supprimer l'espèce, introduite dans la science sous le nom de *Dinemasporium Dianthi*.

Cependant il n'est nullement douteux que le titre de *Phyllosticta Dianthi*, choisi par WESTENDORP pour la forme en question, ne puisse être rétablie, parce que les sporules, bien loin d'être indivises, font voir deux compartiments: caractère échu dans le Sylloge de Mr. SACCARDO, entre autres, au genre *Ascochyta*.

Après avoir comparé les exemplaires authentiques du *Phyllosticta Dianthi* WEST. avec les échantillons de l'*Ascochyta Dianthi*, publiés par feu Mlle LIBERT — examen que je n'avais pu entreprendre en 1875 — je ne pus conserver aucun doute quant à leur identité complète et de la place que le premier aurait dorénavant à occuper dans le système.

VII. La circonstance que Mr. SACCARDO, dans son Sylloge (III, 398), n'a consacré que peu de mots à la description de l'*Ascochyta Dianthi*, nous engage à entrer en quelques détails concernant l'espèce en question.

L'*Ascochyta Dianthi* est amphigène et non pas épiphylle comme le voulut Mlle LIBERT. Les périthèces noirs se trouvent toujours soit éparpillés en nombre plus ou moins grand, soit condensés au milieu de taches d'une étendue différente, blanchies ou coloriées en jaune paille, et se distinguent par un certain reflet. En pleine vigueur on les trouve toujours enflés, et ce n'est qu'après avoir expulsé une certaine quantité de leurs sporules, qu'ils se présentent affaissés et déprimés au milieu. Les sporules rejetées en dehors restent col-

lées ensemble et forment des cirrhes tordues d'un jaune très-pale, mais qui, après un certain laps de temps, perdent leur couleur.

Ce qui nous frappa singulièrement, c'est qu'en beaucoup de cas, les feuilles qui portaient l'*Ascochyta*, étaient en même temps envahies par le *Puccinia Arenariae*, et cela de manière à ce que cette Urédinée occupat les mêmes taches flétries qui servaient de support à l'*Ascochyta*. Rien de plus commun qu'un coussinet de *Puccinia* entouré à quelque distance par un cercle de périthèces d'*Ascochyta*, ou une tache pâlie portant à l'une des surfaces de la feuille un coussinet du *Puccinia* et à l'autre une collection de périthèces de l'*Ascochyta*, justement comme si ces deux formes ne présentassent que les deux stades d'évolution du même champignon. Le seul auteur qui fit quelque mention de cette particularité, fut Kickx (*Fl. crypt. des Fl.* I, 411). Nous-mêmes en trouvions des exemples, non seulement sur des échantillons récemment cueillis à Wageningen, mais aussi sur d'autres de différentes contrées de notre pays, déjà longtemps conservés en portefeuille, puis sur les exemplaires sèches de Mlle Libert, de Westendorp et de Mr. Roumeguère.

Les sporules, nommées peu correctement spatuliformes par Berkeley, Cooke, Saccardo, ont plutôt une forme lancéolée, dont la longueur (14 à 16 μ) surpasse la largeur (3 à $3^1/_3$ μ) de 4 à 5 fois et dont les deux moités, toujours très-distinctes dans des objets murs, sont parfaitement égaux ou bien s'écartent l'une de l'autre par une légère différence en largeur. A la hauteur du cloison on ne trouve jamais le moindre étranglement. De temps en temps on rencontre des sporules dont les deux contours ne présentent pas le même excès de courbure, ou qui semblent être limitées à droite par une ligne courbe et à gauche par une ligne droite. Un protoplasme finement granuleux qui bleuit promptement par la tinture d'aniline, forme leur contenu.

Une observation, regardant ces sporules, mais qui n'a pas été faite par mes prédécesseurs, consiste en ce qu'elles portent à chaque extrémité un appendice court et obtus, le même qui nous engagea, il y a quelques années, à déclarer

que notre *Ascochyta* devrait prendre place parmi les espèces de *Dinemasporium*. Déjà dans le § VI, nous avons retracté cette transposition. Ici il nous importe à insister sur la découverte que ces appendices ne sont que des parties rétrécies de la sporule elle-même, contenant chacune une petite capacité remplie de protoplasme, mais qui reste inapperçue aussi longtemps que l'application de quelque matière colorante a été différée. Ce n'est qu'après avoir administré la tinture d'aniline que nous fûmes surpris par l'existence, au centre des parties rétrécies, d'un globule extrêmement petit, de la même couleur que le protoplasma des deux grands compartiments de la sporule. Cette découverte nous fit connaître les sporules de l'*Ascochyta Dianthi* comme des cellules quadriloculaires, mais divisées d'une manière si différente de toute autre, que l'on pourrait avoir des scrupules à y appliquer la nomenclature usitée, songeant aux précautions nécessaires pour découvrir les capacités polaires, à cause de leur petitesse vraiment si extraordinaire, qu'elles ne semblent plus tomber dans le cadre des caractères, admis jusqu' aujourd'hui comme valables dans la pratique de la classification des Sphéropsidées.

Partant de l'idée que l'*Ascochyta Dianthi* ne pourrait être identifié avec le genre *Dinemasporium*, parce qu'il ne produit pas les périthèces cupuliformes ou patelliformes d'une Excipulacée, non plus que des soies rigides brunâtres à la surface de ces organes, il va sans dire que nous nous sommes posé la question, si notre espèce n'appartiendrait pas plutôt au genre *Robillarda* (Sacc. *Syll.* III, 407), qui lui est extrèmement proche. Pourtant, la considération que le *Robillarda* doit être regardé comme une Sphéroidée aux sporules de *Pestalozzia*, c'est à dire produisant seulement à leur sommet une ou plusieurs poils d'une longueur assez remarquable, nous fit conclure qu'une telle appréciation ne pourrait être permise. Les sporules de l'*Ascochyta Dianthi* ne produisent nullement l'impression d'avoir jamais pu appartenir à un *Pestalozzia*.

Terminons en disant que, quoique la structure des sporules de l'*Ascochyta Dianthi* diffère sensiblement de celle des

sporules de quelques autres espèces que nous avons eu l'occasion d'examiner, nous n'avons pu nous décider à en faire un genre nouveau. Il ne nous semble pas impossible que des 150 espèces à peu près rassemblées par Mr. SACCARDO, quelques unes ne produisent des sporules, semblables à celles de l'*Ascochyta Dianthi*. Si tel serait le résultat d'un examen microscopique, institué à l'aide des expédients de notre temps, la question pourrait être de nouveau mise à l'ordre : s'il serait préférable de distinguer deux Séries d'*Ascochyta* parallèles ou bien de joindre un troisième genre aux deux autres, qui forment la subdivision des Sphéroidées hyalodidymées aux périthèces érostrées maculigènes.

VIII. L'*Ascochyta Dianthi* LASCH, publié dans KLOTZSCH et RABENHORST *Herb. Mycol.* 1e Ed., n° 863 et distribué de nouveau par FUCKEL dans *Fgi Rhenani* n° 490, n'a rien de commun avec l'*Ascochyta Dianthi* LIB., si ce n'est que tous les deux appartiennent aux Sphéropsidées Sphéroidées de Mr. SACCARDO. Mais tandisque le dernier trouve sa place parmi les Hyalodidymées, le premier doit être enrégistré parmi les Scolécosporées, à cause de ses sporules beaucoup plus grêles, mesurant 28 à 42 × $2^1/_3$ à 4 μ, aux extrémités arrondies, exemptes de toute apparence même d'appendices mucroniformes. Ni DESMAZIÈRES, l'auteur du *Septoria Dianthi* (*Ann. Sc. nat.* 3, XI, 346), nom nouveau pour l'*Ascochyta Dianthi* LASCH, ni Mr. SACCARDO (*Syll.* III, 516) ne font mention de la structure interne des sporules mûres, excepté qu'ils leur attribuent 4 nucléoles à peine reconnaissables. Or, nous-mêmes, opérant sur les échantillons authentiques de DESMAZIÈRES (c'est à dire sur le *Depazea Dianthi* DESM., divulgué dans les Champ. du Nord de la France de cet auteur, 1e Ed. n° 344) et de LASCH, puis sur ceux de FUCKEL, de RABENHORST (*Fgi Europaei* n° 360) et de ROUMEGUÈRE (*Fgi Gallici* n° 1431), nous les avons toujours trouvé divisés par une cloison transversale en deux moitiés parfaitement égales, unies entre elles en forme de croissant.

Le *Septoria Dianthi* DESM., amphigène et maculigène comme l'*Ascochyta Dianthi* LIB., produit des périthèces deux fois plus petits que ceux de celui-ci. Ces périthèces sont ternes et don-

nent naissance à des cirrhes blanches. Mais il est impossible de distinguer les deux espèces avec certitude sans l'emploi du microscope. Lorsque, comme nous l'avons fait, l'on identifie le *Sphaeria Dianthi* ALB. et SCHWEIN. et le *Sphaeria Depazea Dianthi* FR. avec l'*Ascochyta Dianthi* LIB., il va sans dire qu'on ne peut approuver l'énumération de ces titres comme synonymes sous le chef du *Septoria Dianthi*. Cette observation s'adresse au texte de DESMAZIÈRES, ayant trait à ce dernier champignon et contenu dans les *Ann. des Sc. nat.* 3e S., XI, 346.

IX. Les périthèces tant de l'*Ascochyta Dianthi* que du *Septoria Dianthi* ne sont à l'abri de l'extérieur que par le seul épiderme de l'organe qui les porte, et dont les cellules, quoique plus ou moins comprimées, n'ont subies aucune altération de couleur. Le parois des périthèces se compose de deux à trois couches de cellules extrêmement tendres et d'une couleur un peu jaunâtre, exceptées celles qui se trouvent approchées du sommet tant soit peu saillant en cône, et au centre duquel se montrera l'ouverture par laquelle s'échapperont les sporules. Les quatre ou cinq cercles de cellules, rangées à l'entour de cette ouverture, ont une couleur olivâtre-foncé, due aux parois et non au contenu des cellules, et présentent en outre une bien plus grande résistance que l'ampoule même du périthèce, enfoncée dans le parenchyme de la feuille et atteignant le réseau des faisceaux vasculaires qui, comme de contume, se trouve à peu près au milieu de l'épaisseur. Le sommet des périthèces de l'*Ascochyta*, notablement plus grands que ceux du *Septoria*, le gagnent en résistance de celui des périthèces du *Septoria*, et se distingue en outre, vu à vue d'oiseau, par un certain éclat. Toute la surface intérieure des périthèces est couverte de stérigmes extrêmement courts et portant les sporules, dont les sommets convergent au centre. Les qualités de ces sporules ont été discutées dans le paragraphe VII.

LEGENDE.

Fig. 1. Quelques sporules de l'*Ascochyta Dianthi* Lib., dessinées en 1875, lorsque, ayant négligé le secours de matières colorantes, je m'étais figuré que les extrémités rétrécies de ces petits corps ne pourraient être que des appendices, tels qu'on en trouve dans le genre *Dinemasporium*.

Fig. 2. Reproduction des figures, publiées par Berkeley dans les *Annals of Natural History*, I, pag. 207 sous le n° 104 et sous le titre de *Sphaeria* (*Depazea*) *Dianthi*.

Fig. 3. Sporule de l'*Ascochyta Dianthi* Lib. grossie 6000 fois, montrant les quatre chambres, dont deux très-grandes, et les deux autres excessivement petites, invisibles tant que leur contenu n'a pas subi l'influence de matières colorantes.

Fig. 4. Sporule du *Septoria Dianthi* Desm. grossie 3000 fois.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 December 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOLS, MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, FORSTER, VAN DORP, ZEEMAN, VAN DER WAALS, VAN DIESEN, KAPTEYN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, SCHOUTE, PLACE, HOOGEWERFF, KORTEWEG, BEIJERINCK, HUBRECHT, LORENTZ, HOEK, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, MICHAËLIS, DE VRIES, BUYS BALLOT, GRINWIS, KOSTER, MOLL, PEKELHARING, WEBER en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— De notulen der vorige bijeenkomst worden gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. E. B. KNOBEL, Secretaris van de royal astronomical Society te Londen, 21 November 1889; 2°. den Secretaris van het Sanitary Institute te Londen, 21 November 1889; 3°. H. WHITE, Secretaris van de Cambridge philosophical Society te Cambridge, 22 November 1889; 4°. J. B. BALFOUR, Secretaris van de botanical Society te Edinburg, 7 December 1889; 5°. den Directeur van het Institut royal gélogique te Budapest, 30 November 1889; 6°. den Secretaris van het

naturwissenschaftlicher Verein te Kiel, 1889; 7°. LAUBMANN, Directeur van de kön. Hof- und Staatsbibliothek te München, 25 November 1889; 8°. H. BRUNS, Bibliothecaris van de astronomische Gesellschaft te Leipzig, 4 December 1889; 9°. A. G. ZIEGLER, Secretaris van het historische Verein van Unterfranken en Aschaffenburg te Würzburg, 21 December 1889; 10°. C. VESSELOFSVI, Secretaris van de Académie impériale des Sciences te St. Petersburg, 29 November 1889; 11°. H. WILD, Directeur van het Observatoire physique centrale te St. Petersburg, 19 December 1889; 12°. A. KARPINSKY, Directeur van het Comité géologique de la Russie te St. Petersburg, 25 November 1889; 13°. ABBATE, Secretaris van de Société khédiviale de Géographie te Cairo, 23 November 1889; 14°. M. MEIIJASAKI, Bibliothecaris van de imperial University of Japan te Tokio, 31 October 1889, aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. den Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 1889; 2°. T. C. MENDENHALL, Directeur van de U. S. Coast and geodetic Survey Office te Washington, 10 December 1889; 3°. J. F. BRIDE, Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 20 Augustus 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren 1° kennisgevingen van de Heeren GUNNING en STOKVIS, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen, en 2° eene missive van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken (9 Dec. 1889) ter begeleiding van een vervolg op de mededeelingen omtrent de aardbeving op Lesbos. Ook dit relaas zal voor het Archief der Akademie worden overgeschreven, daar de Minister het oorspronkelijke stuk terugverlangt.

— De Heeren SCHOUTE en VAN DEN BERG brengen verslag uit over de verhandeling, door den Heer J. C. KLUYVER

aangeboden in de November-vergadering. Het voorstel om haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen wordt aangenomen.

— De Heer DE VRIES deelt de uitkomsten mede van het wetenschappelijk onderzoek der in 1887 te Rotterdam benoemde Crenothrix-Commissie.

Naar aanleiding van enkele klachten, die over onreinheid van het drinkwater in het voorjaar van 1887 gehoord werden, hadden Heeren Burgemeester en Wethouders van Rotterdam in de maand Juli van dat jaar eene Commissie benoemd, »om hen te dienen van advies over het voorkomen van *Crenothrix* in het water der drinkwaterleiding". De bacteriën toch, die onder den naam van *Crenothrix* bekend zijn, en tot de grootste onder de bacteriën behooren, bleken de hoofdmassa uit te maken van het bezinksel, dat het drinkwater in kannen en karaffen afzette. De werkzaamheid der Commissie bepaalde zich tot eene nauwkeurige studie van de oorzaken van vervuiling, waaraan het water op het terrein der drinkwaterleiding kon blootgesteld zijn, vóórdat het door de pompen naar de stad geperst werd. Het onderzoek naar den aard van het vuil moest grootendeels onder het microscoop geschieden. Met dit deel der werkzaamheden waren de Voorzitter der Gezondheidscommissie, Dr. DUPONT, en de spreker belast.

De door de Commissie verkregen technische uitkomsten zijn neêrgelegd in een Rapport aan Heeren Burgemeester en Wethouders, in Februari 1888 uitgebracht. Naar aanleiding van de voorstellen, daarin vervat, zijn sedert door B. en W. de maatregelen deels genomen, deels aan den gemeenteraad voorgesteld, die tot verbetering kunnen leiden.

Het onderzoek der Commissie had betrekking ten 1° op de vervuiling van het water vóór het filtreeren, ten 2° op de verontreiniging van het gefiltreerde water.

Men laat het water uit de Maas eerst in de bezinkingsbassins het medegevoerde slib en vuil afzetten. Doch daar deze bassins voor den tegenwoordigen dienst te klein zijn, kan het water niet lang genoeg in rust blijven en dus niet

voldoende helder worden. Het behoudt een deel van zijne zwevende stoffen, die, langzaam vergaande, de hoeveelheid opgeloste organische stof doen toenemen.

Na het bezinken gaat het water door lange onderaardsche kanalen naar de pompen en van deze naar het laagwaterreservoir en de filters. Sedert jaren had de dienst niet toegestaan, deze kanalen schoon te maken, en er had zich dien tengevolge op hunne muren eene hoogst merkwaardige fauna ontwikkeld. Mosselen, sponzen, mosdieren en hoornpolypen bekleeddden de wanden op de meeste plaatsen met een onafgebroken tapijt, en in hun weefsel wemelde het van allerlei andere organismen. Door de duisternis beveiligd tegen de roofdieren, die zich in de open rivier van deze wezens voeden, ontwikkelden zij zich hier tot een ongekenden bloei. Zoo bedroevend dit gezicht voor den practicus was, zoo treffend en verrassend was het voor den natuuronderzoeker.

Overal op en tusschen deze diersoorten woekerde de Crenothrix in ongelooflijke massa's van bruine vlokken. Het water werd als bezwangerd met hare kiemen. En het leven van al deze wezens vermeerderde het gehalte aan opgeloste organische stoffen in het water des zomers op eene bedenkelijke wijze.

Bij het filtreeren op de zandfilters behooren de zwevende stoffen, een groot deel der opgeloste en de kiemen van bacteriën, dus ook die van *Crenothrix*, achter te blijven. Het gefiltreerde water was echter door plaatselijke omstandigheden bezwangerd zoowel met de sporen als met het voedsel van onzen vijand. Het was dus niet te verwonderen, dat deze zich in de kanalen en kelders van het reine water kon vermenigvuldigen.

In 1887 ging het water, nadat het in de nieuwe filters gereinigd was, door een deel van het oude reinwaterkanaal naar de pompen. De wanden van dit kanaal vonden wij, voorzooverre zij met water bedekt waren, bekleed met een dicht fluweelachtig overtreksel van Crenothrix. Dit kanaal was in 1887 de hoofdoorzaak der vervuiling. Op ons voorstel is dit kanaal in het voorjaar van 1888 buiten gebruik gesteld en door buizen vervangen. Het water in de stads-

buizen was terstond daarna veel zuiverder. Doch daar de Crenothrix zich allengs ook in de nieuwe kanalen vastzette en vermeerderde, was een terugkeer van het euvel te vreezen.

Om dit met blijvend gevolg te bestrijden, waren drie zaken noodig: 1° volledige schoonmaak van de kanalen en bassins van het bezonken water; 2° herstel van de lekken, die gebleken waren in de filters aanwezig te zijn, en 3° de aanleg van een nieuw groot bezinkingsbassin. Aan den eersten eisch is in den loop van het jaar 1889 nagenoeg geheel voldaan, nl. zoover als de dienst toeliet; de aanleg voor een nieuw bassin is toegezegd, voor de verbetering der filters heeft de gemeenteraad de noodige gelden beschikbaar gesteld. De Commissie vertrouwt ten volle, dat na de voltooiing dezer werken de plaag geheel zal ophouden.

Een laatste punt van het onderzoek der Commissie had betrekking op de houtvezeltjes, die van tijd tot tijd in het water der waterleiding werden aangetroffen. Zij bleken afkomstig te zijn van de balkenlaag, waarop, zoowel in de oude als in de nieuwe filters, de filtreerende zandlaag rust. Het bleek ons, dat in het water onder deze balken tallooze zoetwater-pissebedden (*Asellus aquaticus*) leven, die zich met het hout der balken voeden, en wier afval in het water der buizen teruggevonden wordt. In de oude filters waren de balken reeds vrij diep afgeknaagd; diepe voren bedekten hare oppervlakte. In de nieuwe filters vonden wij in 1887 dit euvel nog niet, doch sedert hebben dezelfde diertjes zich ook daar genesteld, en in den zomer van 1889 zagen wij ook hier alle balken op dezelfde wijze, ofschoon nog niet zoo diep, afgeknaagd.

Het eenige middel om deze bron van vervuiling onschadelijk te maken, was, de balken uit de filters weg te nemen en ze door doorboorde cementplaten te vervangen. Dan toch zouden de bedoelde diersoorten, bij gebrek aan voedsel, van zelf uitsterven. Een voorstel in dien geest werd in den zomer van 1889 door H.H. Burgemeester en Wethouders aan den gemeenteraad ingediend, en het is bekend, dat de Raad toen, tegelijk met de gelden voor het herstel der lekken, ook de benoodigde sommen voor het wegnemen van de balken

heeft toegestaan. Reeds is in vier filters deze verbetering voltooid; de overige zullen volgen, zoodra de winter dit toelaat.

Door het benoemen onzer Commissie, hebben Heeren Burgemeester en Wethouders niet alleen de belangen der drinkwaterleiding behartigd, maar tevens aan de wetenschap een belangrijken dienst bewezen, door de gelegenheid te geven tot de studie van verschijnselen, die meestal bij voorkeur met den sluier der geheimhouding bedekt worden.

— De Heer Kapteijn deelt den korten inhoud mede eener verhandeling van zijne hand over de bepaling van de parallaxis van vaste sterren door middel van registreerwaarnemingen. Daarin tracht hij aan te toonen dat het ongunstig oordeel, door Auwers in 1867 over die methode uitgesproken, niet meer van toepassing kan worden geacht als de waarnemingen, met de noodige voorzorgen, aan den meridiaancirkel worden genomen en uitgestrekt over een aanzienlijk getal sterren.

De waarnemingsreeks, waarop deze conclusie gegrond is, werd verricht aan de Sterrewacht te Leiden, in de jaren 1885—1887. Van 15 sterren werd de parallaxis bepaald.

Spreker resumeert de voorzorgen, bij die metingen genomen ter vermijding van systematische fouten, en bespreekt daarna de resultaten uit de waarnemingen getrokken. Om de betrouwbaarheid daarvan, binnen de grenzen der onzekerheid bepaald door de waarschijnlijke fouten te onderzoeken, worden deze resultaten aan de vier volgende proeven onderworpen:

1°. De waarschijnlijke fouten, getrokken uit de behandeling der hoofdsterren met twee symmetrische vergelijkingssterren, worden vergeleken met de waarschijnlijke fouten, afgeleid uit de behandeling met elk der vergelijkingssterren afzonderlijk. Het blijkt dat door het gebruik van twee tamelijk symmetrische vergelijkingssterren de waarschijnlijke fouten niet kleiner worden.

Reeds hierdoor wordt in hooge mate waarschijnlijk gemaakt, dat systematische fouten in de metingen der enkele

rectascensieverschillen niet voorkomen, dus a fortiori niet in de eindwaarden der parallaxen.

2°. Van die sterren van welke oudere meridiaanwaarnemingen bestaan, worden de daaruit getrokken eigenbewegingen vergeleken met die, welke uit de observaties voor parallax worden gevonden. Spreker meent, dat de overeenstemming zoo goed is als met het oog op de onzekerheden der oudere waarnemingen kan worden verwacht.

3°. De relatieve parallaxen der vergelijkingssterren onderling worden vergeleken met de toevallige fouten dezer bepalingen. Het blijkt dat de in eene 1e oplossing gevonden relatieve parallaxen *geheel*, de in eene 2e oplossing gevondene nog vrij voldoende door de toevallige waarnemingsfouten worden verklaard.

4°. Voor de sterren, van welke uit meridiaanwaarnemingen voldoend naauwkeurige waarden der eigenbeweging bekend zijn, worden de waarden der parallaxen, zooals de eerste helft der waarnemingen die geeft, vergeleken met die, welke volgen uit de tweede helft. De overeenstemming dezer twee, geheel onafhankelijke, serieën van waarden, blijkt ten volle zoo groot te zijn, als men naar de waarschijnlijke fouten recht heeft te verwachten.

Nadat op deze wijze de betrouwbaarheid der waarschijnlijke fouten bewezen is, worden ze vergeleken met de analoge waarschijnlijke fouten bij heliometerwaarnemingen. Let men daarbij op den tijd, voor eene volledige waarneming van de beide soorten vereischt, zoo komt men tot het besluit dat: *door middel van registreerwaarnemingen, in denzelfden tijd, ten volle dezelfde nauwkeurigheid wordt bereikt als door heliometerwaarnemingen.*

Ten slotte vergelijkt spreker nog de parallaxen, voor eenige der onderzochte objecten door vroegere waarnemers gevonden, met de door hemzelven afgeleide waarden.

— Voor de Bibliotheek der Akademie worden aangeboden: door den Heer Schols 2 nieuwe afleveringen van Waterbouwkunde door Henket, Telders en Schols; door den Heer J. A. C. Oudemans het 2de deel van Kaiser's Sterren-

hemel, 4de druk; door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN: Verslag der werkzaamheden aan de Sterrenwacht te Leiden verricht van 18 September 1888 tot 17 September 1889.

— De Voorzitter biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer ENGELENBURG: Analyse der getijwaarnemingen te Vlissingen. 1887—1888. De Heeren SCHOLS en VAN DIESEN verklaren zich, op verzoek van den Voorzitter, bereid, daarover in de volgende Vergadering rapport uit te brengen.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

VERSLAG

OMTRENT DE

VERHANDELING VAN **J. C. KLUYVER,**

GETITELD:

„KENMERKENDE GETALLEN DER ALGEBRAÏSCHE RUIMTEKROMME."

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 December 1889).

In de verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER, over welke wij thans verslag uitbrengen, wordt de door DR. H. SCHUBERT tot een zelfstandige leerwijs verheven »meetkunde van het aantal" op ruimtekrommen R^m van willekeurigen graad toegepast.

Deze studie, waarvan we met veel genoegen kennis namen, kan gevoegelijk in drie deelen gesplitst worden. Na in een korte inleiding de door SCHUBERT ingevoerde notatie te hebben verklaard, beperkt de schrijver zich in het eerste gedeelte (art. 1—4) tot het opsporen van reeds bekende uitkomsten langs den door SCHUBERT aangewezen weg. In het tweede gedeelte (art. 5—16) worden voor het meerendeel nieuwe waarheden blootgelegd. En in het derde gedeelte (art. 17—21) worden deze nieuwe resultaten getoetst door ze langs een anderen weg af te leiden bij de eenvoudigste ruimtekromme, die al de beschouwde bijzonderheden vertoonen kan, de ruimtekromme R^6 van den zesden graad.

De onderzoekingen, die in het eerste gedeelte begrepen zijn, leveren ons het aantal λ der raaklijnen van R^m die

deze kromme in een ander punt snijden, het aantal τ der punten waardoor drie elkaar niet opvolgende raaklijnen van R^m gaan en de beide aantallen λ_1 en τ_1 dualistisch tegenovergesteld aan deze. Zij worden uitgedrukt in twee grootheden, den graad m en het geslacht D der ruimtekromme R^m, wat zoo als bekend is alleen dan geschieden kan als de ruimtekromme geen hoogere bijzonderheden vertoont. En dit onderstelt de schrijver uitdrukkelijk. Hoewel deze aantallen λ, τ, λ_1, τ_1 reeds vóór 1870 door CREMONA gevonden zijn, heeft de toepassing der methode van SCHUBERT op dit materiaal onzen onverdeelden bijval. Hier toch kan de aandacht zich geheel bepalen tot de methode, waarvan het gebruik in hoofdzaak tweeërlei moeielijkheid oplevert. Eerstens moet men nl. uit het groote aantal der door SCHUBERT gegevene coïncidentieformules telkens die kiezen, welke met den aard der samenvallende elementen en den graad van oneindigheid der beschouwde stelsels strookt. Ten tweede moeten de verschillende groepen van oneigenlijke coïncidenties niet worden over het hoofd gezien maar behoorlijk, d. w. z. elk met den vereischten graad van menigvuldigheid, in rekening gebracht. En terwijl in de vier voorbeelden verschillende formules en verschillende groepen van oneigenlijke coïncidenties voorkomen, vormen de verkregen uitkomsten den grondslag van het tweede gedeelte.

In het tweede gedeelte onderzoekt de Heer KLUYVER het oppervlak, dat gevormd wordt door de lijnen, die R^m in drie punten snijden, d. i. de meetkundige plaats der drievoudige koorden van R^m. Eerst wordt de graad μ van dit scheeve oppervlak F^μ en de graad van menigvuldigheid δ van R^m op het oppervlak bepaald. Daarna worden achtereenvolgens de bijzondere beschrijvende lijnen en de dubbelkromme van dit oppervlak besproken.

Er zijn op het scheeve oppervlak F^μ twee verschillende groepen van bijzondere beschrijvende lijnen aan te wijzen. Eerstens de beschrijvende lijnen, die door opvolgende beschrijvende lijnen gesneden en door den schrijver kortweg »ribben" worden genoemd. Ten tweede de lijnen, die R^m

in vier punten snijden en dus als »zesvoudige koorden" van R^m en als »viervoudige lijnen" van F^μ te beschouwen zijn. Het aantal lijnen van de laatste groep geeft den schrijver langs eigenaardig eenvoudigen weg het resultaat terug, dat er 27 rechte lijnen liggen op een oppervlak van den derden graad.

Ter bepaling van den graad m' der dubbelkromme R^m van F^μ wordt eerst het geslacht van dit oppervlak gezocht. Dit geslacht wordt gevonden met behulp van een door ZEUTHEN gegeven betrekking tusschen de geslachten van twee ruimtestelsels, die met elkaar in meetkundige verwantschap staan. Uit dit geslacht kan dan verder het aantal dubbelpunten eener vlakke doorsnee van F^μ berekend worden En dit aantal doet, als men de m snijpunten van R^m met het vlak der doorsnee behoorlijk als δ-voudige punten der doorsnee in rekening brengt, den graad m' der dubbelkromme kennen. Verder spoort de schrijver de merkwaardige punten van $R^{m'}$ op. Deze punten laten zich in vier groepen verdeelen. Eerstens gaat de kromme $R^{m'}$ eenmaal door elk der ξ punten X van R^m, waar de raaklijn aan R^m met twee der δ door dit punt gaande drievoudige koorden in een zelfde vlak liggen. Vervolgens gaan er door elk der $4\,l_4$ punten L van R^m, waar deze kromme door haar l_4 zesvoudige koorden gesneden wordt, $\delta-3$ takken van $R^{m'}$. Dus hebben R^m en $R^{m'}$ een equivalent van $\xi + 4\,(\delta-3)\,l_4$ enkelvoudige punten gemeen. Bovendien gaat $R^{m'}$ viermaal door elk van $(\mu-4\,\delta+4)\,l_4$ punten, waarvan er $\mu-4\,\delta+4$ liggen op elk der l_4 zesvoudige koorden van R^m. En eindelijk bezit de kromme $R^{m'}$ nog een aantal μ_3 van drievoudige punten, dat ook berekend wordt. Merkwaardig is, dat de kromme in het algemeen geen gewone dubbelpunten bezit, tenzij δ de waarde vijf heeft, in welk geval de $\delta-3$-voudige punten der tweede groep dubbelpunten worden. Alvorens het aantal μ_3 der punten van de laatste groep bepaald en de waarde $\mu_3 = 740$ voor het bijzondere geval eener R^9, die de volledige doorsnee is van twee oppervlakken F^3, langs anderen weg geverifieerd kan worden, moest eerst de klasse worden opgespoord van elk van drie om F^μ be-

schrevene ontwikkelbare oppervlakken. Vooral de bepaling van de klasse van het ontwikkelbaar oppervlak, dat F^{μ} dubbel omschreven is volgens de dubbelkromme $R^{m'}$, bij welk onderzoek de schrijver voor het eerst met aantallen van kegelsneden rekenen moet, doet de bruikbaarheid der methode van SCHUBERT in het volle licht komen.

Het tweede gedeelte, waarvan we in korte trekken den inhoud kenschetsten, bevat voor het meerendeel nieuwe uitkomsten. Alleen de graden μ en m' van F^{μ} en $R^{m'}$ zijn in 1863 door CAYLEY (*Philosophical Transactions*, vol. 153, p. 453) langs stelkundigen weg afgeleid, terwijl de eerste ondergeteekende in 1878 (*Verslagen en Mededeelingen*, 2de reeks, deel XIV, blz. 282) een meetkundige afleiding gaf van het eerste dier beide aantallen.

In het derde gedeelte controleert de schrijver de boven besprokene nieuwe uitkomsten, door ze langs geheel anderen weg af te leiden voor de vier verschillende ruimtekrommen van den zesden graad, die niet op een oppervlak van den tweeden graad liggen. Daarbij worden al de boven gevonden uitkomsten bevestigd. Bij dit nieuwe onderzoek worden de op een F^2 gelegen ruimtekrommen R^6 uitgesloten; omdat deze, zooals ter geschikter plaatse door den schrijver wordt opgemerkt, zich met betrekking tot het oppervlak F^{μ} en zijn bijzonderheden als uitzonderingen gedragen.

Elke poging om de studie der ruimtekrommen in meetkundige richting voort te zetten ontleent reeds hieraan hooge waarde, dat niet elke ruimtekromme door middel van twee vergelijkingen is voor te stellen en volgens de analytische methode dus somtijds zelfs niets kan worden gedaan. Naar onze meening is de poging van den Heer KLUYVER volkomen geslaagd. Wij aarzelen daarom niet U te adviseeren, zijn verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen te doen opnemen.

Groningen en *Hilversum*,
10 en 19 December 1889.

P. H. SCHOUTE.
F. J. VAN DEN BERG.

KENMERKENDE GETALLEN

DER

ALGEBRAÏSCHE RUIMTEKROMME.

DOOR

J. C. KLUYVER.

Het onderzoek van de talrijke kenmerkende bijzonderheden, die bij de algemeene ruimtekromme en de daaruit afgeleide figuren moeten voorkomen, is aan eigenaardige bezwaren onderhevig. Zoodra het toch geldt de betrekkingen op te sporen, waardoor de meetkundige getallen der ruimtekromme zijn verbonden, een vraagstuk, waarvan de oplossing teruggebracht moet worden tot het bepalen van den graad der resultante van een stelsel algebraïsche vergelijkingen, dan stuit men op de onmogelijkheid om de algemeene ruimtekromme door een of meer vergelijkingen analytisch voor te stellen. Dit is de reden, waarom men bij dergelijke onderzoekingen zich dikwijls genoodzaakt ziet, behalve unicursale krommen alleen diegene te beschouwen, welke de volledige doorsnede van twee oppervlakken kunnen uitmaken. De op deze wijze verkregen uitkomsten worden dan wel met een beroep op het beginsel der continuiteit algemeen geldig verklaard. In veel gevallen kan men die moeielijkheden ontgaan door gebruik te maken van de methoden door Dr. Hermann Schubert in zijn *Kalkül der abzählenden Geometrie* uiteengezet, die, waar zij toepasselijk zijn, steeds een geleidelijke en stelselmatige behandeling veroorlooven. Inzonderheid heeft de toepassing op de theorie der ruimtekrommen het voordeel,

dat men de kromme mag beschouwen als »het enkelvoudig oneindig stelsel van punten, waarvan steeds hetzelfde aantal in een platvlak is gelegen".

Met dit opstel wordt beoogd om de rekening van SCHUBERT aan te wenden tot de bepaling van eenige der eenvoudigste singulariteiten der ruimtekromme. In de eerste plaats wil ik de getallen τ, λ, τ_1 en λ_1 van CREMONA *) afleiden, om de aldus verkregen uitkomsten gedeeltelijk te gebruiken bij de beschouwing van een der belangrijkste uit de kromme afgeleide figuren, nl. het regelvlak beschreven door de drievoudige koorden. Achtereenvolgens wil ik daarvan bepalen den graad, het geslacht, het aantal der viervoudige en andere bijzondere beschrijvende lijnen, den graad van de op het oppervlak voorkomende dubbelkromme met het aantal en het karakter harer bijzondere punten, de klasse van de beide het regelvlak dubbel aanrakende ontwikkelbare oppervlakken, om eindelijk enkele der verkregen resultaten te toetsen aan het bijzondere geval, dat de ruimtekromme is van den zesden graad, een geval, waarbij de meeste der aangegeven singulariteiten moeten voorkomen.

Eenvoudigheidshalve zal worden ondersteld, dat de beschouwde fundamentale kromme R^m van den graad m, den rang r, de klasse n en het geslacht D puntalgemeen is, en alzoo geen werkelijke dubbelpunten of keerpunten bezit, terwijl geen rechte lijn drie opvolgende punten met de kromme gemeen heeft. Ter bekorting geef ik vooraf eenige verklaring van de notatie, die in navolging van SCHUBERT zal worden gebruikt. Moet een of andere figuur aan een bepaalde voorwaarde voldoen, dan stelt SCHUBERT zulk een voorwaarde door een letter symbolisch voor. Maar die letter duidt dan tegelijkertijd het aantal aan der figuren, die de bewuste voorwaarde bevredigen. Is b.v. door de letter z de voorwaarde aangewezen, dat een veranderlijke kromme door een bepaald punt moet gaan, dan beteekent z tevens het aantal der krommen, die aan dien eisch kunnen voldoen.

---

*) CREMONA-CURTZE, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, blz. 81—95.

Door het produkt yz van twee voorwaarden y en z verstaat men de voorwaarde, die verlangt, dat zoowel aan y als aan z wordt voldaan. Deze nieuwe voorwaarde is blijkbaar van hooger afmeting dan de voorwaarden y en z afzonderlijk. Op dezelfde figuur aangewend worden door y, z en yz nooit tegelijkertijd eindige getallen vastgesteld. Ook de som $y + z$ van twee voorwaarden y en z van dezelfde afmeting is het teeken van eene nieuwe voorwaarde. Zij eischt slechts de bevrediging van hetzij y, hetzij z. Het aantal, dat door haar kan worden aangewezen, is dan niet anders dan de som der aantallen, die met y en z afzonderlijk overeenkomen. Men tracht steeds zooveel mogelijk, en daarop grondt zich de eigenaardige symbolische rekening, iedere voorwaarde terug te brengen tot de zoogenaamde grondvoorwaarden, dat zijn de meest eenvoudige eischen, die men aan het punt, de rechte lijn en het platte vlak kan stellen.

Ik geef hier een overzicht van de teekens, waarmede de meest gebruikelijke grondvoorwaarden worden aangeduid.

Wordt een punt p genoemd, dan beteekent:

p de voorwaarde, dat het punt in een gegeven vlak ligt.

Wordt een vlak e genoemd, dan beteekent:

e de voorwaarde, dat het vlak een gegeven punt bevat.

Wordt een lijn g genoemd, dan beteekent:

g de voorwaarde, dat de lijn een gegeven lijn snijdt;

g_p de voorwaarde, dat de lijn door een gegeven punt gaat;

g_e de voorwaarde, dat de lijn in een gegeven vlak ligt.

Deze voorwaarden heeten incidentievoorwaarden. Wordt een elementenpaar beschouwd, bestaande uit gelijksoortige of uit ongelijksoortige elementen, dan wordt steeds door het teeken ε aangeduid, dat de elementen van een paar elkaar onbepaald naderen, dat gelijksoortige dus samenvallen, en waar het ongelijksoortige betreft, dat het punt in de lijn of het vlak, dat de lijn in het vlak valt. In al deze gevallen spreekt men van de coïncidentie der beide elementen.

1. *De ruimtekromme R^m bezit*

$$\lambda = 2(m-2)(m-3) + 2D(m-6)$$

raaklijnen, die haar in een tweede punt snijden; m. a. w. de dubbelkromme op het door R^m bepaalde ontwikkelbare oppervlak vertoont λ keerpunten.

Voor het bewijs beschouwt men het tweevoudig oneindig stelsel van figuren, ieder bestaande uit een punt p van R^m, een raaklijn g, benevens het door die beiden bepaalde vlak e. Er moet hier worden gezocht, hoeveel malen er coïncidentie plaats vindt tusschen p en g. Voor een dergelijk stelsel geldt de volgende betrekking tusschen tweevoudige voorwaarden:

$$e\,\varepsilon = p\,e + g_p \text{ *)}.$$

Het is slechts noodig de getallenwaarden op te sporen, die in dit bijzondere geval door de daarin voorkomende symbolen worden aangeduid. Vooreerst is g_p nul; geen raaklijn g gaat door een aangenomen punt. Voor $p\,e$ moet $m(r-2)$ gesubstitueerd worden, omdat door ieder der m punten van R^m in het vlak der voorwaarde p een aantal van $(r-2)$ †) raakvlakken gaan, die het punt der voorwaarde e bevatten. Aan de voorwaarde $e\,\varepsilon$ is voldaan door de λ raaklijnen g, die de kromme ergens in p snijden. Maar er zijn oneigenlijke coïncidenties, en ik wil er reeds hier op wijzen, dat het bepalen van het aantal daarvan gewoonlijk de grootste moeielijkheid is, die het gebruik der formules van SCHUBERT met zich brengt. Intusschen ziet men spoedig in, wat hier als oneigenlijke coïncidentie moet worden beschouwd. Een osculatievlak, dat men door het gegeven punt der voorwaarde $e\,\varepsilon$ aanbrengt, bevat drie opvolgende punten der kromme A_1, A_2 en A_3. Daar nadert A_1 onbepaald tot de raaklijn $A_2\,A_3$, het punt A_3 op dezelfde wijze tot de raaklijn $A_1\,A_2$, waardoor in elk zoodanig osculatievlak twee, dus in het geheel $2\,n$ oneigenlijke samen-

---

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 83, form. 17.

†) Men raadplege de uitstekende tabel van SALMON op blz. 298 van zijn werk *Geometry of three dimensions.* 4th Ed.

vallingen worden verkregen. Het teeken $e\varepsilon$ heeft derhalve de waarde $\lambda + 2n$. Daarmede is afgeleid de betrekking:

$$\lambda + 2n = m(r-2).$$

Is h het aantal der schijnbare dubbelpunten, dan is volgens de formules van CAYLEY *):

$$D = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - h,$$
$$r = m(m-1) - 2h,$$
$$n = 3(r-m),$$

waaruit na eliminatie van h volgt:

$$r = 2(m-1) + 2D,$$
$$n = 3(m-2) + 6D.$$

Substitueert men deze waarden in de gevonden vergelijking, dan komt er:

$$\lambda = 2(m-2)(m-3) + 2D(m-6).$$

Naar behooren is $\lambda = 0$ zoowel voor $m = 3$ als voor $m = 4$, $D = 1$ (doorsnee van twee oppervlakken van den tweeden graad). Verder geeft:

$$m = 6, \qquad \lambda = 24,$$
$$m = 5, \quad D = 2, \quad \lambda = 8,$$
$$m = 4, \quad D = 0, \quad \lambda = 4,$$

waaruit men kan besluiten: op een oppervlak van den tweeden graad liggen 24, 8 of 4 rechte lijnen, die een oppervlak van den derden graad aanraken, al naarmate de oppervlakken geen lijn, één lijn of twee elkaar kruisende lijnen gemeen hebben. Wat ook gemakkelijk is aan te toonen, zoo men zich bedient van het eigenaardige coördinatenstelsel door CHASLES †) gebruikt bij het onderzoek van kromme lijnen op de hyperboloïde.

---

*) SALMON, t. a. p., blz. 295.

†) *Comptes rendus*, Deel 53, blz. 985.

2. *De ruimtekromme R^m bezit*

$$\lambda_1 = 6(m-3)(m-4) + 18D(m-4) + 12D(D-1)$$

osculatievlakken, die haar in een tweede punt aanraken.

Voor het bewijs van deze stelling voegt men aan ieder dubbelraakvlak e der kromme toe het osculatievlak f in een der beide raakpunten, welke beide vlakken elkaar volgens een raaklijn g der kromme doorsnijden. In het aldus verkregen enkelvoudig oneindig stelsel van vlakkenparen wordt dan met behulp van de formule

$$\varepsilon = e + f - g \text{ *)}$$

het aantal coïncidenties van e en f gezocht. Vooreerst is hierin $e = 2y$, waarin y aangeeft, hoeveel dubbelraakvlakken e door een aangenomen punt gaan. Want aan elk vlak e zijn twee vlakken f toe te voegen. Vervolgens bepaalt de voorwaarde f een aantal van n, de voorwaarde g een aantal van r raaklijnen g, en het is de vraag hoeveel vlakken door een bepaalde raaklijn g kunnen worden gelegd, die de kromme in een tweede punt aanraken. Tot de beantwoording voert de volgende overlegging. De doorsnede van het door de raaklijnen van R^m gevormde ontwikkelbare oppervlak met het osculatievlak in een willekeurig punt A bestaat uit de tweemaal te tellen raaklijn in A benevens een kromme van den graad $(r-2)$, die in A de genoemde raaklijn aanraakt, en haar verder in $(r-4)$ punten snijdt. Iedere raaklijn van R^m wordt dus door $(r-4)$ andere getroffen; door een raaklijn g gaan $(r-4)$ vlakken e, zoodat:

$$f = n(r-4),$$
$$g = r(r-4).$$

Wat de voorwaarde ε betreft, ieder elders rakend osculatievlak levert één coïncidentie. Oneigenlijke samenvallingen

---

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 49, form. 1.

komen voor in de α zoogenaamde »buigpunten" *), waar het osculatievlak vier opvolgende punten der kromme bevat. Zulk een vlak kan beschouwd worden als een dubbelraakvlak e, waarmede twee opvolgende osculatievlakken f samenvallen, terwijl alsdan twee opvolgende raaklijnen de bijbehoorende snijlijnen g voorstellen. Zoo wordt men gevoerd tot de vergelijking:

$$\lambda_1 + 2\alpha = 2y + n(r-4) - r(r-4).$$

Hierin is †)

$$2y = r(r-1) - 3n - m,$$
$$\alpha = 2(n-m).$$

Substitueert men de vroeger gevonden uitdrukkingen voor r en n, dan komt er na eenige herleiding:

$$\lambda_1 = 6(m-3)(m-4) + 18D(m-4) + 12D(D-1).$$

Voor $m = 3$, of $m = 4$ is naar behooren $\lambda_1 = 0$.

3. *De ruimtekromme R^m bezit*

$$\tau = \frac{4}{3}(m-2)(m-3)(m-4) + 4D(m^2-5m+8) +$$
$$4D(D-1)(m-2) + \frac{4}{3}D(D-1)(D-2)$$

drietallen van raaklijnen, die door één punt gaan; m. a. w. de dubbelkromme op het door R^m bepaalde ontwikkelbare oppervlak bezit τ drievoudige punten.

Voor het bewijs voegt men aan een osculatievlak e de daarin gelegen raaklijn g toe, en construeert de punten p,

---

*) Kortheidshalve noem ik de punten, waar het osculatievlak stationair is, »buigpunten", de raaklijnen aldaar »buigraaklijnen". Deze laatste zijn dan wel te onderscheiden van de stationaire lijnen, die drie opvolgende punten met de kromme gemeen hebben. Bij een puntalgemeene kromme komen intusschen deze bijzonderheden niet voor.

†) SALMON, t. a. p., blz. 295.

waar de in de stelling genoemde dubbelkromme dit osculatievlak snijdt. Lag p op g, dan gingen door p drie raaklijnen van R^m, en zoo wordt men er toe gebracht de ε coïncidenties te zoeken van p en g in de enkelvoudig oneindige hoeveelheid van figuren, ieder bestaande uit een osculatievlak e, de daarin gelegen raaklijn g en een der punten p, waar het vlak e de dubbelkromme ontmoet.

Aangewezen is hier de toepassing van een betrekking tusschen enkelvoudige voorwaarden, en wel in het bijzonder van de formule:

$$\varepsilon = p + g - e \text{ *)}.$$

Is de graad der dubbelkromme x, dan bepaalt het vlak der voorwaarde p een aantal van x punten p, die elk $(n-4)$ †) osculatievlakken e met de daarbij behoorende raaklijnen g vaststellen. Derhalve is $p = x(n-4)$. De lijn der voorwaarde g snijdt r raaklijnen g, en in elk der bijbehoorende osculatievlakken e zal men $(x-2r+8)$ †) punten p der dubbelkromme vinden. Te substitueeren is dus $g = r(x-2r+8)$. Geheel op dezelfde wijze bepaalt het punt der voorwaarde e een aantal van $n(x-2r+8)$ drietallen e, g, p. Voor de τ malen, dat drie raaklijnen door één punt gaan, heeft men 3τ coïncidenties aan te nemen, omdat elk der drie de raaklijn g kan zijn.

Het opsporen der oneigenlijke coïncidenties vereischt eenig overleg. Vooreerst worden 2λ samenvallingen geleverd door de λ raaklijnen van R^m, die de kromme opnieuw snijden. Want laat zulk een lijn R^m in A raken en in B snijden, dan zal vooreerst in het osculatievlak in A de aldaar getrokken raaklijn in B twee onmiddellijk opvolgende raaklijnen ontmoeten. Gelijktijdig evenwel komen in het osculatievlak in B op de raaklijn aldaar samen de onmiddellijk opvolgende en de raaklijn in A. Zoo worden twee figuren uit het beschouwde stelsel verkregen, waarbij oneigenlijke

---

*) Schubert, t. a. p., blz. 83, form. 14.

†) Salmon, t. a. p., blz. 298.

coïncidentie optreedt. Maar het is in te zien, dat nog op andere manier twee van de drie door één punt gaande raaklijnen kunnen samenvallen. Namelijk telt voor een punt op een der buigraaklijnen gelegen die raaklijn voor twee, omdat zij in plaats van door $(r-4)$ slechts door $(r-5)$ andere niet opvolgende raaklijnen gesneden wordt. Men overtuigt zich hiervan door de doorsnede te beschouwen van het door alle raaklijnen van R^m gevormde ontwikkelbare oppervlak met een stationair osculatievlak. De doorsnede bestaat behalve uit de driemaal te tellen buigraaklijn uit een kromme van den graad $(r-3)$, die in het buigpunt de buigraaklijn raakt, en haar verder in $(r-5)$ punten snijdt. Zoo worden dan $a(r-5)$ punten opgespoord, waaruit drie raaklijnen van R^m zijn getrokken. Na deze redeneering gaat de formule over in de vergelijking:

$$3\tau + 2\lambda + a(r-5) = x(n-4) + (r-n)(x-2r+8).$$

Hierin is *)

$$2x = r(r-1) - 3m - n.$$

Substitueert men voorts de waarden van λ, d, r en n, dan wordt na eenige herleiding verkregen:

$$\tau = \frac{4}{3}(m-2)(m-3)(m-4) + 4D(m^2-5m+8) +$$
$$+ 4D(D-1)(m-2) + \frac{4}{3}D(D-1)(D-2).$$

Voor $m = 3$ is τ zooals behoort nul. De substitutie $m = 4$, $D = 1$ geeft $\tau = 16$, en die uitkomst was te verwachten. Immers uit elk der vier hoekpunten van het gemeenschappelijk poolviervlak van twee oppervlakken van den tweeden graad gaan vier raaklijnen aan de doorsnijdingskromme, de vier snijlijnen der beide kegels, die de beide oppervlakken uit dit punt projecteeren. Die hoekpunten

*) SALMON, t. a. p., blz. 293.

tellen derhalve viermaal als een der in de stelling bedoelde punten. En dat uit $m = 4$, $D = 0$ volgt $\tau = 0$ is ook te begrijpen. Want de dubbelkromme op het door de raaklijnen van R^m gevormde ontwikkelbare oppervlak, die van den zesden graad moet zijn, bezit reeds volgens art. 1 vier keerpunten, en het optreden van een drievoudig punt zou derhalve die kromme doen uiteenvallen, wat in het algemeen niet gebeurt.

4. *De ruimtekromme R^m bezit*

$$\tau_1 = \frac{4}{3}(m-3)(m-4)(m-5) + 4D(m-4)(m-5) +$$
$$+ 4D(D-1)(m-5) + \frac{4}{3}D(D-1)(D-2)$$

drievoudige raakvlakken.

Men denkt zich ergens een dubbelraakvlak e van R^m aangebracht, dat R^m in $(m-4)$ punten p snijdt, waar de raaklijnen g worden getrokken, en het is dan weder de vraag onder alle drietallen e, g, p, waarvan een enkelvoudige oneindige hoeveelheid voorhanden is, het aantal ε der coïncidenties van g en e op te sporen. De formule

$$\varepsilon = e + g - p,$$

dualistisch overeenkomende met die van art. 3, zal daartoe kunnen dienen. Het is onnoodig stil te staan bij de bepaling van e, g en p. Men behoeft in de getallen van art. 3 slechts m en n, e en p te verwisselen, en tevens x te vervangen door de klasse y van het ontwikkelbare oppervlak, gevormd door de dubbelraakvlakken van R^m. Zoo is dan:

$$e = y\ (m-4),$$
$$g = r\ (y - 2r + 8),$$
$$p = m\,(y - 2r + 8).$$

Onder de ε coïncidenties tellen de τ_1 drievoudige raakvlakken elk driemaal. Ieder der drie raakpunten mag als punt p worden opgevat. En dan is het in te zien, dat de

λ_1 rakende osculatievlakken elk tot twee oneigenlijke coïncidenties aanleiding geven. Immers laat zulk een vlak in A osculeeren en in B raken, dan ligt de raaklijn in B in het vlak, dat door de raaklijn in A en de onmiddellijk daaropvolgende is gebracht, en het punt p valt dan in B. Tegelijk evenwel ligt de raaklijn in A in een vlak, dat behalve de onmiddellijk opvolgende ook de raaklijn in B bevat, waarbij dus het punt p in A is aan te nemen. Daarmede is de vergelijking

$$3\,\tau_1 + 2\,\lambda_1 = y\,(m-4) + (r-m)\,(y-2\,r+8)$$

verkregen. Substitueert men de reeds vroeger aangegeven waarden van λ_1 en y en drukt men ten laatste alles uit in m en D, dan komt er

$$\tau_1 = \frac{4}{3}(m-3)(m-4)(m-5) + 4\,D\,(m-4)(m-5) +$$
$$+ 4\,D\,(D-1)(m-5) + \frac{4}{3}\,D\,(D-1)(D-2).$$

Indien men bedenkt, dat voor $m = 5$, altijd $D \leqq 2$, dan besluit men, dat naar behooren de substituties $m = 3$, 4 of 5 altijd leveren $\tau_1 = 0$. Trouwens de verkregen uitkomsten stemmen overeen met die, welke Cremona langs geheel anderen weg heeft afgeleid.

5. Tusschen de getallen λ, τ, m en de reciproke grootheden λ_1, τ_1, n bestaat een eenvoudige betrekking, die de dualistische overeenkomst in het licht stelt. Rechtstreeksche berekening leert

$$\lambda_1 - \lambda = \quad 4\,(m + 3\,D - 3)(m + D - 5),$$
$$\tau_1 - \tau = -\,4\,(m + 3\,D - 3)(m + D - 4),$$

waaruit volgt:

$$(\lambda_1 + \tau_1) - (\lambda + \tau) = -\,4\,(m + 3\,D - 3).$$

Nu is volgens art. 1:

$$n - m = 2\,(m + 3\,D - 3),$$

zoodat men heeft:

$$(\lambda_1 + \tau_1) - (\lambda + \tau) = -2(n-m),$$

of

$$\lambda + \tau + 2m = \lambda_1 + \tau_1 + 2n.$$

---

6. *De drievoudige koorden van de ruimtekromme R^m vormen een regelvlak F^μ van den graad*

$$\mu = \frac{1}{3}(m-1)(m-2)(m-3) - D(m-2).$$

Gewoonlijk wordt deze bekende stelling alleen bewezen voor het geval, dat R^m de volledige doorsnede is van twee oppervlakken *). Het bewijs geleverd met behulp van de coïncidentieformules van SCHUBERT is van algemeene geldigheid.

Aan iedere koorde g van R^m wordt een punt p der kromme toegevoegd; brengt men nog het vlak e van p en g aan, dan is daarmede een figuur verkregen, waarvan een drievoudig oneindige hoeveelheid voorhanden is. In een eindig aantal van gevallen zal er coïncidentie plaats vinden van p en g, waarbij tegelijkertijd het vlak e door een gegeven lijn gaat. Het aantal van die gevallen wordt bepaald met behulp van de formule

$$e^2 \varepsilon = e^2 p + e g_p \text{ †)}.$$

In deze formule heeft $e^2 p$ blijkbaar de waarde $m.\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$. Want in het vlak der voorwaarde p liggen m

---

*) SALMON, t. a. p., blz. 432.

Door Prof. SCHOUTE is het getal μ bepaald met behulp van een beginsel ontleend aan DE JONQUIÈRES, dat later door SCHUBERT in zijn *Princip der Erhaltung der Anzahl* scherper uitgesproken is. Men vergelijke *Enkele algemeene beschouwingen omtrent ruimtekrommen*, art. 25, *Verslagen en Mededeelingen*, 2de Reeks, Deel 14.

†) SCHUBERT, t. a. p., blz. 84, form. 21.

punten p, die in verband met de gegeven lijn der voorwaarde e^2, even zooveel vlakken e bepalen, waarin $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ koorden g worden aangetroffen. De waarde van $e\,g_p$ hangt af van het aantal h der schijnbare dubbelpunten. Het punt der voorwaarde g_p wijst h koorden g aan, die met het gegeven punt der voorwaarde e een aantal van $(m-2)$ punten van R^m aanwijzen. Derhalve is $e\,g_p = h\,(m-2)$. Eindelijk is aan de voorwaarde $e^2\,\varepsilon$ voldaan door elk der μ drievoudige koorden, welke de lijn door de voorwaarde e^2 gegeven, snijden. En wel voldoet iedere koorde driemaal, omdat het punt p elk van de drie punten van R^m kan voorstellen. Oneigenlijke coïncidenties doen zich voor bij de r raakvlakken e van R^m, die door de lijn der voorwaarde e^2 kunnen worden aangebracht. In zulk een vlak kan men het raakpunt als punt p en de verbindingslijn van het raakpunt met een der $(m-2)$ snijpunten als koorde g beschouwen. Dientengevolge moet voor $e^2\,\varepsilon$ de waarde $3\,\mu + r(m-2)$ worden aangenomen, en men kan μ oplossen uit de vergelijking

$$3\,\mu + r\,(m-2) = \frac{1}{2}\,m\,(m-1)\,(m-2) + h\,(m-2).$$

Substitueert men weder

$$r = 2\,(m-1) + 2\,D,$$

tegelijkertijd

$$h = \frac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2) - D,$$

dan vindt men

$$\mu = \frac{1}{3}\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) - D\,(m-2).$$

Het is onnoodig deze bekende uitkomst te bespreken. Alleen wil ik opmerken, dat een redeneering gelijksoortig met de voorafgaande ook den graad doet kennen van het regelvlak, gevormd door de gemeenschappelijke snijlijnen van drie gegeven krommen, alsmede van het regelvlak, beschreven door die koorden eener kromme, die een tweede gegeven

kromme snijden *). Zelfs zou de bepaling dier getallen met nog geringere bezwaren gepaard gaan. Met de toepassing der stelling op krommen, ontstaan door regelvlakken, en in het bijzonder oppervlakken van den tweeden graad, met andere oppervlakken te doorsnijden, moet men behoedzaam zijn.

Want op een regelvlak van den tweeden graad liggen twee groepen van beschrijvende lijnen, terwijl het verder zou kunnen gebeuren, dat iedere drievoudige koorde meer dan drie punten met de kromme R^n gemeen had.

Voor het volgende is het van belang er aan te herinneren, dat R^m voor F^μ een δ-voudige kromme is, waarbij:

$$\delta = h - m + 2,$$

of

$$\delta = \frac{1}{2}(m-2)(m-3) - D.$$

Dit getal δ toch geeft het aantal dubbelribben van den kegel aan, waardoor R^m uit een harer punten wordt geprojecteerd †).

7. *Het ontwikkelbare oppervlak, dat F^μ aanraakt langs R^m, is van de klasse*

$$k = \frac{1}{2}(m-2)(m-3)(3m-8) + D(m-3)(m-8) - 2D(D-1).$$

In ieder vlak e, dat door een drievoudige koorde gaat, liggen op die koorde drie punten p van R^m, waar men de raaklijn g kan trekken. De figuren, bestaande uit een vlak e, een punt p en een lijn g, vormen een tweevoudig oneindig stelsel, waarin het een zeker aantal malen zal voorkomen, dat g in e valt, terwijl tevens het vlak e door een gegeven punt gaat. Die redeneering voert tot de toepassing van de formule

*) Ook van deze beide regelvlakken bepaalde SALMON (t. a. p., blz. 429—432) den graad en het aantal der bijzondere beschrijvende lijnen. Prof. SCHOUTE (t. a. p., art. 27—28) voegde daaraan toe de afleiding van den graad der dubbelkrommen, die op deze oppervlakken voorkomen.

†) SALMON, t. a. p., blz. 298.

$$e\,\varepsilon = e^2 + g\,e - p\,e\ ^{*)}.$$

Daarin is noodzakelijk $e^2 = 3\,\mu$, omdat op elk der μ beschrijvende lijnen van F^μ, die de lijn der voorwaarde e^2 ontmoeten, drie punten p liggen. Dan is het in te zien, dat $g\,e = r\,\delta$, $p\,e = m\,\delta$.

Want door ieder punt van R^m gaan δ drievoudige koorden, en door de voorwaarde $g\,e$ worden r, door de voorwaarde $p\,e$ worden m punten p op R^m aangewezen. De lijn g valt in e, en aan de coïncidentievoorwaarde $e\,\varepsilon$ is voldaan, ten eerste door de k raakvlakken van het bedoelde ontwikkelbare oppervlak, die door het gegeven punt der voorwaarde $e\,\varepsilon$ gaan. Maar elk der λ raaklijnen, die R^m in een tweede punt snijden, levert blijkbaar één oneigenlijke coïncidentie. Daardoor heeft men dus $e\,\varepsilon = k + \lambda$. Ter bepaling van k is nu de vergelijking verkregen:

$$k + \lambda = 3\,\mu + (r - m)\,\delta.$$

Substitueert men hierin de vroeger vermelde uitdrukkingen voor λ, μ, r en δ, dan komt er na eenige herleiding:

$$k = \frac{1}{2}(m-2)(m-3)(3m-8) + D(m-3)(m-8) - 2D)\,D - 1).$$

Zooals te verwachten was, wordt $k = 0$ voor $m = 3$ en ook voor $m = 4$, $D = 1$. In dit geval toch zijn er geen drievoudige koorden.

8. De voorafgaande bepaling, op zich zelf van niet zooveel belang, was noodig voor de verdere beschouwing van het regelvlak F^μ. Een regelvlak bezit namelijk in het algemeen een eindig aantal beschrijvende lijnen, die door de onmiddellijk voorafgaande worden gesneden. Deze beschrijvende lijnen, die ik kortheidshalve »ribben" †) zal noemen,

---

*) Schubert, t. a. p., blz. 84 (dualistische omkeering van form. 15 van blz. 83).

†) De Franschen noemen het snijpunt van twee opvolgende beschrijvende lijnen van een regelvlak „sommet" en de beschrijvende lijn dan alleen een „arête", als dit punt bovendien in 't oneindige ligt (de la Gournerie, *Géométrie descriptive*, blz. 151). Ik volg hier het voorbeeld

vertoonen de eigenschap, dat het raakvlak in een harer punten in alle punten van de lijn het oppervlak raakt, waarbij dan F^μ in elk dergelijk raakpunt een parabolische indicatrix bezit. Omtrent deze ribben geldt de stelling:

Het regelvlak F^μ bezit een aantal van

$$i = 2(m-2)(m-3)(m-4) + 2D(m-4)(m-6) - 4D(D-1)$$

ribben.

Wanneer een drievoudige koorde R^m in de punten A, B en C ontmoet, zal het in het algemeen nooit voorkomen, dat de drie raaklijnen, in die punten aan R^m getrokken, in een plat vlak liggen. Nooit kan dus een dergelijke koorde buiten R^m door de volgende worden gesneden. Maar wel zal het kunnen gebeuren, dat twee der drie raaklijnen, b. v. die in B en in C, elkaar snijden. Wat dan veroorzaakt, dat door A twee opvolgende beschrijvende lijnen van F^μ gaan, en dat de lijn ABC een ribbe van F^μ wordt.

Het aantal i wordt derhalve gevonden, zoodra bekend is, hoeveel malen het voorkomt, dat het vlak e, gebracht door de drievoudige koorde ABC of g en de raaklijn in B, samenvalt met het vlak f, gelegd door dezelfde koorde en de raaklijn in C. In de overeenkomst tusschen de vlakken e en f wordt met behulp van de formule

$$\varepsilon = e + f - g \text{ *)}$$

het aantal coïncidenties van e en f bepaald. Blijkbaar heeft zoowel e als f de waarde $2k$. Want door het punt der voorwaarde e gaan k vlakken, die een drievoudige koorde g of ABC bevatten en in A aan F^μ raken, waarbij dan elk der beide overige op g gelegen punten van R^m hetzij B, hetzij C kan worden genoemd.

Verder is $g = 6\mu$. Op de drievoudige koorden toch, die

---

van Dr. Chr. Wieker (*Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, II, blz. 416), die elke beschrijvende lijn, welke met hare opvolgende in een plat vlak ligt, een „Kante" noemt.

*) Schubert, t. a. p., blz. 49, form. 1.

de lijn der voorwaarde g snijden, is ieder punt van R^m als punt A, B of C te beschouwen. De coïncidentievoorwaarde ε is bevredigd, vooreerst door de i ribben en wel tweemaal, aangezien de beide raakpunten van R^m zoowel aan de vlakken e en f als aan f en e kunnen worden toegevoegd. Niet vergeten mogen worden de oneigenlijke coïncidenties, waartoe weder de λ bijzondere raaklijnen van art. 1 aanleiding geven. Men moet zich daarbij A in het snijpunt, B en C in het raakpunt denken. Met dit alles is de vergelijking

$$2\,i + \lambda = 4\,k - 6\,\mu$$

verkregen, waaruit na herleiding volgt

$$i = 2\,(m-2)(m-3)(m-4) + 2\,D\,(m-4)(m-6) - 4\,D\,(D-1).$$

Zulke ribben komen niet voor in de gevallen $m = 3$ en $m = 4$, aangezien geen vlak dan vijf punten van R^m bevat. Ook $m = 5$, $D = 2$ geeft $i = 0$. En dat is te verklaren, omdat nu R^5 een aanvullingsdoorsnee uitmaakt van een oppervlak van den derden met een van den tweeden graad. Op laatstgenoemd oppervlak vallen alle drievoudige koorden, en daar zij alle beschrijvende lijnen zijn van dezelfde groep, komen er geen snijdende voor.

9. Maar behalve de besproken bijzondere beschrijvende lijnen van F^μ zijn er, die, omdat zij vier verschillende punten met R^m gemeen hebben, als viervoudige lijnen van F^μ, tegelijk als zesvoudige koorden van R^m moeten worden opgevat.

Hun aantal l_4, dat, waar R^m de volledige doorsnede van twee oppervlakken vormt, ook nog langs algebraïschen weg kan worden afgeleid *), wordt ook in het algemeene geval met behulp van de formules van SCHUBERT op eenvoudige wijze bepaald.

---

*) SALMON, t. a. p., blz. 435.

Het door Prof. SCHOUTE aan DE JONQUIÈRES ontleende beginsel is op zich zelf niet voldoende om tot de bepaling van l_4 te geraken (t. a. p., art. 29).

Men bewijst de stelling: *De ruimtekromme R^m bezit een aantal van*

$$l_4 = \frac{1}{12}(m-2)(m-3)^2(m-4) - \frac{1}{2}D(m-3)(m-4) + \frac{1}{2}D(D-1)$$

zesvoudige koorden; m. a. w. het regelvlak F^μ telt l_4 viervoudige lijnen.

Om dit aan te toonen, voegt men aan iedere lijn g van F^μ een niet op die lijn gelegen punt p van R^m toe, en noemt weder het door g en p bepaalde vlak e. Er is een tweevoudig oneindige hoeveelheid van de aldus geconstrueerde figuren voorhanden. Aan die figuren kunnen dus tweevoudige voorwaarden worden opgelegd. In het bijzonder zal men kunnen eischen, dat p in g valt, terwijl tegelijk het vlak e onbepaald wordt. Zoo komt men er toe de formule

$$e\,\varepsilon = p\,e + g_p \text{ *)}.$$

aan te wenden. En dan blijkt, dat g_p nul is, omdat een gegeven punt niet op F^μ ligt. Het gegeven vlak der voorwaarde $p\,e$ bepaalt m punten p, die met het gegeven punt derzelfde voorwaarde te zamen even zooveel lijnen aangeven, die $(\mu-\delta)$ drievoudige koorden treffen. Daarom is $p\,e = m\,(\mu-\delta)$.

De coïncidentievoorwaarde $e\,\varepsilon$ is bevredigd viermaal door iedere zesvoudige koorde. Bovendien heeft men te bedenken, dat door het gegeven punt der voorwaarde $e\,\varepsilon$ een aantal van k vlakken gaan, die behalve een lijn g ook de raaklijn aan R^m in een harer drie snijpunten met de kromme bevatten. In zulk een vlak e nadert werkelijk een vierde punt p van R^m onbepaald tot de drievoudige koorde g. Daarom is het volledige aantal der coïncidenties te stellen op $4\,l_4 + k$, en de formule gaat over in de vergelijking

$$4\,l_4 + k = m\,(\mu-\delta).$$

Na de noodige herleiding zal men vinden:

---

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 83, form. 17.

$$l_4 = \frac{1}{12}(m-2)(m-3)^2(m-4) - \frac{1}{2}D(m-3)(m-4) + \frac{1}{2}D(D-1).$$

Bij wijze van proef wil ik substitueeren $m = 3p$, en onderstellen, dat R^m de volledige doorsnede is van een oppervlak van den derden met een van den p^{den} graad, in welk geval men heeft te nemen:

$$D = \frac{1}{2}(3p^2 - 3p + 2) \text{ *)}.$$

Men verkrijgt:

$$l_4 = 27 . \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}.$$

Iedere zesvoudige koorde van R^m ligt thans geheel in het oppervlak van den derden graad, en treedt $\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$ malen als zoodanig op. De verkregen uitkomst voor l_4 wijst derhalve naar behooren op de aanwezigheid van 27 rechte lijnen op het oppervlak van den derden graad.

Het is misschien overbodig er weer op te wijzen, dat de stelling niet geldig is voor krommen, die uit doorsnijding van regelvlakken zijn ontstaan.

10. *Het geslacht* Δ *van het regelvlak* F^μ *wordt uitgedrukt door de vergelijking*

$$(\Delta - 1) = \frac{1}{6}(m-2)(m-3)(2m-11) + \frac{1}{2}D(m^2 - 9m + 22) - D(D-1).$$

Uitgesloten zijn hierbij de gevallen $m = 3$ *en* $m = 4$, $D = 1$, *omdat alsdan het regelvlak* F^μ *niet bestaat.*

De bepaling van het geslacht Δ van een enkelvoudig oneindig stelsel geschiedt door middel van de betrekking, welke door Zeuthen is aangegeven, en waarin een overeenkomst tusschen de elementen van twee dergelijke stelsels Σ en Σ' wordt ondersteld. Laat die overeenkomst zoodanig zijn ingericht, dat aan een element van Σ een aantal

*) Cremona-Curtze, t. a. p., blz. 100.

van β' elementen van Σ', en wederkeerig aan een element van Σ' een aantal van β elementen van Σ zijn toegevoegd, laat het vervolgens γ' malen gebeuren, dat twee der β' elementen van Σ', en γ malen, dat twee der β elementen van Σ samenvallen, dan bestaat er tusschen het geslacht D van Σ en Δ van Σ' de betrekking:

$$\gamma - \gamma' = 2\beta'(D-1) - 2\beta(\Delta-1)\ ^{*}.$$

En het ligt hier voor de hand op de beschreven wijze de punten van R^m, beschouwd als stelsel Σ, toe te voegen aan de lijnen van F^μ, beschouwd als stelsel Σ', en wel wordt de overeenkomst op de eenvoudigste wijze tot stand gebracht, indien men ieder punt de daardoor gaande lijn, iedere lijn het daarop liggende punt toewijst.

Bij deze onderstelling is $\beta' = \delta$, omdat volgens art. 6 door een punt van R^m steeds δ lijnen van F^μ gaan. Duidelijk is het, dat met iedere lijn drie punten overeenkomen, vandaar $\beta = 3$. Twee der δ aan een punt toegevoegde stralen vallen slechts dan samen, als dit punt geraakt in een der i punten van R^m, waar twee opvolgende lijnen van F^μ elkaar snijden. En twee der drie aan een lijn toegewezen punten kunnen alleen dan elkaar onbepaald naderen, wanneer de lijn een der in art. 1 besproken raaklijnen van R^m is geworden.

Daaruit mag men derhalve besluiten: $\gamma' = i, \gamma = \lambda$.

De stelling van Zeuthen levert thans de vergelijking

$$6(\Delta-1) = 2\delta(D-1) + i - \lambda,$$

waaruit na substitutie der waarde van δ, i en λ gevonden wordt:

$$(\Delta-1) = \frac{1}{6}(m-2)(m-3)(2m-11) + \frac{1}{2}D(m^2-9m+22) - D(D-1).$$

11. In het voorafgaande is het middel gevonden, om een

---

*) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, I, blz. 459.

der voornaamste bijzonderheden van het regelvlak F^μ te onderzoeken. En daarmede bedoel ik de dubbelkromme $R^{m'}$, die op F^μ moet voorkomen. In de eerste plaats wordt nu haar graad gemakkelijk bepaald. Men behoeft slechts de bijzondere punten na te gaan, die een willekeurige vlakke doorsnede van F^μ vertoonen moet. Die doorsnede van den graad μ en het geslacht Δ bezit vooreerst op R^m eenige δ-voudige punten, ten getale van m, ten tweede l_4 viervoudige punten op de viervoudige beschrijvende lijnen, ten laatste m' dubbelpunten op de dubbelkromme $R^{m'}$. Volgens de bekende formule voor het geslacht is dus:

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2) - m.\frac{1}{2}\delta(\delta-1) - \frac{1}{2}.4.3.l_4 - m'.$$

Worden alle grootheden in m en D uitgedrukt, en lost men m' op, dan komt er:

$$m' = \frac{1}{72}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(4m^2-m-12) -$$
$$-\frac{1}{6}D(m-2)(m-4)(m-5)(2m+3)+\frac{1}{2}D(D-1)m(m-5).$$

Volgens SALMON *) zou deze uitkomst nog niet langs meetkundigen weg zijn verkregen. CAYLEY †) evenwel heeft

---

*) T. a. p., blz. 435.

†) *Philosophical Transactions*, Deel 153, II, blz. 453, „On skew surfaces, otherwise scrolls". Het geheele samenstel der op F^μ voorkomende veelvoudige lijnen duidt CAYLEY aan door $NT(m^3)$ („nodal total"), het deel, dat overeenkomt met de viervoudige lijnen door $NG(m^3)$ („nodal generator"), het deel, dat overeenkomt met R^m door $ND(m^3)$ („nodal director"), en de rest, dat is $R^{m'}$, door $NR(m^3)$ („nodal residue"). Eerst worden $NT(m^3)$, $NG(m^3)$ en $ND(m^3)$ gezocht, en dan $NR(m^3)$ bepaald door de vergelijking

$$NR(m^3) = NT(m^3) - ND(m^3) - NG(m^3).$$

In de hier aangewezen aftrekking is een fout begaan; er wordt gevonden (zie ook *Table of results*)

$$NR(m^3) = \frac{1}{18}[m]^6 + \frac{3}{8}[m]^5 - \frac{1}{2}[m]^4 + 3m + M\left\{\frac{1}{3}[m]^4 - \frac{1}{6}[m]^3 - \frac{5}{2}[m]^2 + 8m - 20\right\} +$$
$$+ M^2\left\{\frac{1}{2}[m]^2 - 2m\right\},$$

met behulp van een indirecte methode het getal m' gevonden. Daarbij wordt eerst aangenomen, dat de kromme R^m uit een samenstel van twee of drie andere krommen bestaat. Zijn deze meer eenvoudige gevallen behandeld, dan kan men met behulp van functionaal-vergelijkingen opklimmen tot het algemeene geval, waarbij R^m niet is ontaard. Voor de bepaling van de constanten, die bij het ontwikkelen dezer functionaal-vergelijkingen worden ingevoerd, moet men zijn toevlucht nemen tot de beschouwing van bijzondere voorbeelden, waarbij men door andere middelen in staat is gesteld, om de waarde van m' aan te geven.

12. Het is wenschelijk eenige gegevens te verzamelen omtrent het verloop van $R^{m'}$ ten opzichte van de fundamentale kromme R^m. En dan doet zich ten eerste de vraag voor, of R^m en $R^{m'}$ ook eenige punten gemeen hebben. Laten de lijnen $A\,B\,C$ en $A\,D\,F$ twee drievoudige koorden van R^m zijn, uit het punt A van R^m getrokken, en onderzoeken wij, of deze beide koorden gedurende hun beweging een tak van $R^{m'}$ in de nabijheid van A kunnen brengen. Zoo men zich niet uit de omgeving van A verwijdert, kan men voor een oogenblik R^m vervangen door het samenstel der raaklijnen a, b, c, d en f in de punten A, B, C, D en F aan R^m getrokken. Het regelvlak F^μ gaat daardoor, wat dit deel der omgeving van A betreft, over in twee hyperboloïden $(a\,b\,c)$ en $(a\,d\,f)$. Deze beide hyperboloïden hebben de lijn a gemeen; zij doorsnijden elkaar verder vol-

---

waarin $M = h - \frac{1}{2}[m]^2$.

In deze uitkomst nu moet de vierde term $+3\,m$ in $-3\,m$ worden veranderd, waarmede dan tegelijk de in anderen vorm door SALMON medegedeelde uitkomst overgaat in

$$\frac{1}{2}h_1^2 m_1(m_1-5) - \frac{1}{6}h_1(m_1^4 - 5m_1^3 + 5m_1^2 - 49m_1 + 120) +$$
$$+ \frac{1}{72}(m_1^6 - 6m_1^5 + 31m_1^4 - 270m_1^3 + 868m_1^2 - 840m_1),$$

die thans naar behooren nul wordt voor $m_1 = 5$, en verder overeenstemt met wat hier is afgeleid.

gens een kromme van den derden graad, die hier als dubbelkromme optreedt. In het algemeen komt die kromme niet in de nabijheid van A; slechts dan zal een tak door A gaan, wanneer de hyperboloïden $(a\,b\,c)$ en $(a\,d\,f)$ elkaar in A aanraken, m. a. w., wanneer de lijnen $A\,B\,C$ en $A\,D\,F$ met a in een plat vlak gelegen zijn. Terugkeerende tot de gegeven kromme R^m, besluit men, dat deze overal dáár door $R^{m'}$ zal worden gesneden, waar twee der δ beschrijvende lijnen van F^μ een raakvlak van R^m bepalen.

En dan volgt weer als van zelf, welke weg kan worden ingeslagen, om het aantal ξ dezer snijpunten te vinden. Men construeert in ieder punt A van R^m de twee drievoudige koorden $A\,B\,C$ en $A\,D\,F$ benevens de raakvlakken e en f van F^μ, die deze koorden met de raaklijn g, in A aan R^m getrokken, bepalen. Zoodra die vlakken e en f samenvallen, zonder dat dit met de koorden $A\,B\,C$ en $A\,D\,F$ plaats vindt, is A een snijpunt van R^m en $R^{m'}$. Om het aantal der coïncidenties van e en f te vinden, heeft men aan te wenden de formule

$$\varepsilon = e + f - g \text{ *)}.$$

Daarin is voor e, en dan ook voor f, te stellen $k(\delta-1)$, terwijl g de waarde $r\,\delta\,(\delta-1)$ verkrijgt. Immers het gegeven punt der voorwaarde e bepaalt k vlakken e, waaraan weder $(\delta-1)$ vlakken f zijn toegevoegd; en de lijn g wijst r raaklijnen g aan, waarbij $\delta\,(\delta-1)$ vlakkenparen e, f zijn te vinden.

Er blijft over de waarde van ε te zoeken. Vallen in de ξ snijpunten van R^m en $R^{m'}$ twee verschillende drievoudige koorden met de raaklijn g in één vlak, dan telt dit voor twee coïncidenties, omdat men aan die koorden de vlakken e en f, maar ook de vlakken f en e kan toevoegen. Naderen evenwel de beide koorden elkaar onbepaald, zooals dit voor iedere ribbe ééns gebeurt, dan is dit een enkelvoudige coïncidentie.

---

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 49, form. 1.

Ligt ten laatste het punt A op een viervoudige beschrijvende lijn, dan vallen daar langs drie der δ drievoudige koorden, welke uit ieder punt van R^m, dus ook uit A, getrokken kunnen worden. Drie raakvlakken, naar willekeu e of f te noemen, vallen daar samen. Wat dan voor zes coïncidenties telt.

Daarmede is derhalve afgeleid de vergelijking

$$2\,\xi + i + 24\,l_4 = (2\,k - r\,\delta)(\delta - 1),$$

waaruit na de noodige herleiding zal gevonden worden:

$$\xi = \frac{1}{4}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(2\,m-3) +$$
$$+ \frac{1}{4}D(m-4)(m-5)(m^2-15m+18) - D(D-1)(m-5)^2 +$$
$$+ D(D-1)(D-2).$$

Voor $m = 3$, 4 of 5 volgt, zooals te verwachten was, $\xi = 0$. Een bijzonder geval, geschikt om de verkregen uitkomst te controleeren, levert de doorsnede R^9 van twee oppervlakken H^3 van den derden graad, die van het geslacht 10 is en blijkbaar geen zesvoudige koorden bezitten kan. De dubbelkromme $R^{m'}$, volgens art. 11 van den graad 255, snijdt een der beide oppervlakken H^3 in 765 punten, waarvan er 135 zijn gelegen in de onderlinge snijpunten der 27 rechte lijnen, die op H^3 voorkomen, terwijl de overige 630 noodzakelijk snijpunten van R^9 met de dubbelkromme moeten zijn. Inderdaad zal men, $m = 9$, $D = 10$ in de gevonden vergelijking substitueerende, $\xi = 630$ vinden.

Het is dienstig er aan te herinneren, dat de besproken snijpunten enkelvoudig zijn voor $R^{m'}$ en δ-voudig voor F^μ. Het aantal bladen van F^μ, dat door zulk een punt gaat, is even groot als in elk willekeurig punt van R^m.

13. Ook in de omgeving der viervoudige lijnen van F^μ zal men bijzondere punten der dubbelkromme $R^{m'}$ aantreffen. Onderstel, dat zulk een viervoudige lijn $A\,B\,C\,D$ in A, B, C en D de kromme R^m ontmoet. Ten opzichte van het punt A moet men die lijn beschouwen, als te zijn ontstaan uit de samenvalling van de drie drievoudige koorden $A\,B\,C$, $A\,B\,D$ en $A\,C\,D$. Laat $A\,F\,G$ een der $(\delta-3)$ overige

zijn, en laat men zich voor een oogenblik R^m vervangen denken door het samenstel der raaklijnen a, b, c, d, f en g in de gelijknamige punten aan R^m getrokken, dan gaat het beschouwde deel van F^μ, voorzoover de omgeving van A betreft, over in een stelsel van vijf hyperboloïden, die men kan aanduiden door de teekens $(a\,b\,c)$, $(a\,b\,d)$, $(a\,c\,d)$, $(b\,c\,d)$, $(a\,f\,g)$. Neemt men in aanmerking, dat er feitelijk $(\delta-3)$ hyperboloïden $(a\,f\,g)$ te construeeren zijn, dan volgt reeds, dat A een $(\delta+1)$-voudig punt van F^μ wordt. Er moet nu worden nagegaan, welk stelsel van dubbelkrommen deze vijf hyperboloïden bepalen. Vooreerst is het in te zien, dat de vier eerste onderling geen eigenlijke dubbelkromme voortbrengen. Zij leveren alleen een tweede zesvoudige koorde, die echter niet in de nabijheid van A komt. Ieder der drie eerste wordt door de laatste gesneden volgens een kromme van den derden graad, die evenmin in de omgeving van A een tak bezit. De laatste twee evenwel snijden elkaar volgens een kromme van den vierden graad, en deze snijdt in A de lijn a. Daaruit mag men besluiten, dat ieder der $(\delta-3)$ beschrijvende lijnen, die naast de viervoudige uit A getrokken kunnen worden, een tak van $R^{m'}$ door A doet gaan. Onderlinge aanraking of aanraking met R^m van deze $(\delta-3)$ takken van $R^{m'}$ zal niet plaats vinden. De tweede groep snijpunten van R^m en $R^{m'}$, gelegen op de l_4 zesvoudige koorden, die in de beschouwing van het vorige artikel de laatste groep van coïncidenties vormde, vertegenwoordigt alzoo

$$\eta = 4\,(\delta-3)\,l_4$$

enkelvoudige punten.

14. Maar de viervoudige lijnen hebben nog andere punten met $R^{m'}$ gemeen. Om dit in te zien, behoeft men slechts na te gaan of een viervoudige lijn nog andere beschrijvende lijnen van F^μ behalve op R^m kan ontmoeten. Daartoe merkt men op, dat een willekeurig vlak door een zesvoudige koorde met F^μ nog een kromme van den graad $(\mu-4)$ gemeen heeft, die de koorde in $(\mu-4)$ punten snijdt. Vier van deze snijpunten zijn raakpunten van het aangebrachte vlak

met F^μ; in de $(\mu-8)$ overige ontmoet de koorde andere beschrijvende lijnen van F^μ. Maar 4 $(\delta-3)$ van dergelijke lijnen treffen de koorde op R^m, derhalve wordt een viervoudige lijn van F^μ buiten R^m door $(\mu-4\,\delta+4)$ andere beschrijvende lijnen gesneden.

Onderstel, dat P het snijpunt is van de viervoudige lijn $A\,B\,C\,D$ en de drievoudige koorde $F\,G\,H$, dan kan men, de reeds meermalen gebruikte redeneering volgende, om de omgeving van P te onderzoeken, R^m vervangen door de raaklijnen a, b, c, d, f, g en h. Daardoor gaat, voorzoover het beschouwde deel van F^μ betreft, dit oppervlak over in een groep van vijf hyperboloïden, die een samenstel van dubbelkrommen opleveren. Daar alle vijf $(a\,b\,c)$, $(a\,b\,d)$, $(a\,c\,d)$, $(b\,c\,d)$ en $(f\,g\,h)$ door P gaan, is dat punt een vijfvoudig punt van F^μ, waarvan de osculatiekegel uit vijf vlakken bestaat. De vier eerste onderling leveren in de nabijheid van P geen dubbelkromme. Maar $(f\,g\,h)$ snijdt elk der vier eerste in een kromme van den vierden graad, en deze krommen gaan alle door P. Het besluit is derhalve gewettigd, dat in de punten P de dubbelkromme $R^{m'}$ vier takken bezit, die noch elkaar, noch de zesvoudige koorde zullen aanraken.

15. Het verdere onderzoek van $R^{m'}$ vereischt de bepaling van de klasse k' van het ontwikkelbare oppervlak, dat langs $R^{m'}$ om F^μ is beschreven. Om daartoe te geraken, construeert men in elk punt p van $R^{m'}$ een der beide beschrijvende lijnen g van F^μ, en bepaalt op g het punt q, waar het raakvlak aan F^μ door een gegeven punt gaat. Blijkbaar is het aantal ε der coïncidenties tusschen p en q gelijk aan de gevraagde klasse k'. De aanwending der formule

$$\varepsilon = p + q - g \text{ *)}$$

is dus hier aangewezen.

Vooreerst heeft men nu in aanmerking te nemen, dat iedere drievoudige koorde

$$\mu-2-3\,(\delta-1) = \mu + 1 - 3\,\delta$$

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 44, form. 1.

malen $R^{m'}$ ontmoet. Want een vlak door de drievoudige koorde heeft met F^{μ} nog verder een kromme van den graad $(\mu-1)$ gemeen, en terwijl één van de $(\mu-1)$ snijpunten van deze kromme met de koorde het raakpunt is van F^{μ} en het aangebrachte vlak, wordt de koorde in de $(\mu-2)$ overige door andere beschrijvende lijnen gesneden. Van deze $(\mu-2)$ punten vallen er telkens $(\delta-1)$ in de drie punten, waar de koorde op R^{m} rust, de overige, ten getale van $\mu-2-3(\delta-1)$, zijn punten van $R^{m'}$.

Verder is het duidelijk, dat iedere lijn g slechts één punt q naast één punt p bevat, terwijl de punten q liggen op een kromme, waarvan de graad door den rang ϱ van het regelvlak wordt aangegeven.

Aannemende, dat de bijzondere punten van een vlakke doorsnede van F^{μ} te zamen δ' gewone dubbelpunten vertegenwoordigen, heeft men ter bepaling van ϱ de vergelijkingen:

$$\varrho = \mu(\mu-1) - 2\delta',$$
$$2\Delta = (\mu-1)(\mu-2) - 2\delta',$$

waaruit volgt:

$$\varrho = 2(\mu-1) + 2\Delta.$$

Voor de symbolen q en g vindt men nu de waarden:

$$q = \varrho(\mu + 1 - 3\delta),$$
$$g = \mu(\mu + 1 - 3\delta),$$

terwijl men heeft $p = 2m'$, omdat door ieder punt van $R^{m'}$ in het vlak der voorwaarde p twee lijnen g gaan. De formule gaat daardoor over in de vergelijking

$$k' = (\varrho-\mu)(\mu + 1 - 3\delta) + 2m'.$$

Zoo men wil, is alles weder in m en D uit te drukken.

16. Het is een eigenaardigheid van de dubbelkromme $R^{m'}$, dat zij buiten de besproken bijzondere punten geen eigenlijke dubbelpunten bezitten zal. Immers ieder punt van $R^{m'}$ is ontstaan door de snijding van twee lijnen uit een enkelvoudig oneindig stelsel. In het algemeen zullen hoog-

stens drie lijnen uit het stelsel tegelijk door één punt gaan, maar dan is zulk een punt onmiddellijk als een drievoudig punt van $R^{m'}$ aan te merken. De fundamentale kromme R^{m} wordt uit zulk een punt op een willekeurig vlak geprojecteerd als een vlakke kromme met drie drievoudige punten. De uitkomsten der voorafgaande artikelen zijn voldoende, om het aantal Φ_3 van deze drievoudige punten van $R^{m'}$ te doen kennen. Men behoeft slechts de volledige doorsnijding op te maken van $R^{m'}$ met het tweede poolvlak van een gegeven punt P, genomen ten opzichte van het regelvlak F^{μ}. Van die doorsnijding, bestaande uit $m'(\mu-2)$ punten, vallen er:

1° één in elk der k' punten van $R^{m'}$, waar een der beide raakvlakken door P gaat, en wel één, omdat deze punten enkelvoudig zijn zoowel voor $R^{m'}$ als voor het tweede poolvlak;

2° drie in elk der Φ_3 drievoudige punten van $R^{m'}$, en wel drie, omdat deze punten drievoudig voor $R^{m'}$ en enkelvoudig voor het tweede poolvlak zijn;

3° $(\delta-2)$ in elk der ξ punten van de eerste groep van doorsnijdingen van R^{m} en $R^{m'}$, en wel $(\delta-2)$, omdat deze punten enkelvoudig voor $R^{m'}$ en $(\delta-2)$-voudig voor het tweede poolvlak zijn;

4° twaalf in elk der $l_4(\mu+4-4\delta)$ punten, waar $R^{m'}$ buiten R^{m} de viervoudige lijnen van F^{μ} ontmoet, en wel twaalf, omdat deze punten viervoudig voor $R^{m'}$, vijfvoudig voor F^{μ} *), dus drievoudig voor het tweede poolvlak zijn;

5° $(\delta-1)(\delta-3)$ in elk der $4\,l_4$ punten, waar de zesvoudige koorden op R^{m} rusten, en wel $(\delta-1)(\delta-3)$, omdat deze punten $(\delta-3)$-voudig voor $R^{m'}$ en $(\delta-1)$-voudig voor het tweede poolvlak zijn.

Uit dit alles te zamen volgt:

$$m'(\mu-2) = k' + 3\,\Phi_3 + \xi(\delta-2) + 12\,l_4(\mu+4-4\delta) + \\ + 4\,l_4(\delta-1)(\delta-3),$$

zoodat

---

*) Vergelijk art. 14.

$$3\,\Phi_3 = m'(\mu-2)-k'-\xi(\delta-2)-12\,l_4(\mu+4-4\,\delta)-$$
$$-\,4\,l_4(\delta-1)(\delta-3),$$

waarin de grootheden van het rechter lid alle uit de vorige artikelen bekend zijn.

Deze uitkomst verliest weder haar geldigheid, wanneer F^μ is een oppervlak van den tweeden graad, waarop twee groepen van beschrijvende lijnen liggen, of wanneer iedere beschrijvende lijn in meer dan drie punten op R^m rust. Zullen drievoudige punten op $R^{m'}$ zich voordoen, dan moet m minstens gelijk zes zijn. De substitutie $m = 6$ levert achtereenvolgens:

$$\mu = 20-4\,D, \qquad \delta = 6-D, \qquad l_4 = \frac{1}{2}(D-3)(D-4),$$
$$m' = (D-3)(3D-14), \qquad \xi = (D-3)(D^2-D-18),$$
$$k' = 2\,(D-3)(D^2+2\,D-26),$$

en eindelijk

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}(D+1)(D-2)(D-3)(D-4).$$

De enkelvoudige kromme R^6 is hoogstens van het geslacht vier, de gevonden uitdrukking voor Φ_3 is derhalve òf nul, òf positief. Dat in de gevallen $D = 2$, 3 of 4 het getal Φ_3 nul is, was te verwachten; in dat geval is toch het aantal der schijnbare dubbelpunten $h < 9$, en drie drievoudige koorden door één punt zouden negen enkelvoudige koorden door dit punt vertegenwoordigen.

Een bijzonder voorbeeld, geschikt om de uitkomst voor Φ_3 te controleeren, levert de doorsnede R^9 van twee oppervlakken van den derden graad G^3, waarvoor het geslacht de waarde tien heeft.

17. Alvorens daartoe over te gaan, is het evenwel noodig, eerst de klasse van de beide F^μ dubbelaanrakende ontwikkelbare oppervlakken O_σ en $O_{\sigma'}$ te zoeken. Het is duidelijk, dat nu op F^μ twee veelvoudige krommen R^m en $R^{m'}$ voorkomen, er ook twee dergelijke ontwikkelbare oppervlakken zijn. Men kan namelijk dubbelraakvlakken aanbrengen, zoowel door een paar drievoudige koorden, die hun snijpunt op

R^m hebben, als door een dergelijk paar, waarvan het snijpunt op $R^{m'}$ valt.

Volgens een bekende stelling van CAYLEY *) is voor een regelvlak de graad der dubbelkromme gelijk aan de klasse van het dubbelaanrakende ontwikkelbare oppervlak; als men dus van O_σ en $O_{\sigma'}$ in volgorde de klasse σ en σ' noemt, is

$$\sigma + \sigma' = \frac{1}{2} m \delta (\delta - 1) + m'.$$

Voor de bepaling van σ en σ' is het derhalve voldoende σ' te berekenen, en daartoe geeft de methode van SCHUBERT weder een eigenaardigen weg aan. Beschouwen wij de kegelsneden, die R^m in zes afzonderlijke punten snijden, en stellen wij die aan de kegelsnee opgelegde voorwaarde door het teeken z voor. In navolging van SCHUBERT beteekent †):

μ_1 de voorwaarde, dat het vlak der kegelsnee een gegeven punt bevat,

ν_1 de voorwaarde, dat de kegelsnee een gegeven lijn snijdt,

ϱ_1 de voorwaarde, dat de kegelsnee een gegeven vlak raakt,

δ_1 de voorwaarde, dat de kegelsnee in twee snijdende lijnen ontaardt, en

η_1 de voorwaarde, dat de kegelsnee in een puntenpaar overgaat.

Voor ieder kegelsneestelsel gelden de vergelijkingen §):

$$2\nu_1 - 2\mu_1 - \varrho_1 = \eta_1,$$
$$\delta_1 = 2\varrho_1 - \nu_1,$$

waaruit men door symbolische vermenigvuldiging afleidt

$$2\nu_1 \delta_1 z - 2\mu_1 \delta_1 z - \varrho_1 \delta_1 z = \eta_1 z (2\varrho_1 - \nu_1).$$

Maar het is onmiddellijk in te zien, dat alle symbo-

---

*) CREMONA-CURTZE, t. a. p., blz. 54.

†) SCHUBERT, t. a. p., blz. 90 en 91. Ten einde geen verwarring te veroorzaken, schrijf ik $\mu_1, \nu_1, \varrho_1, \delta_1, \eta_1$, waar SCHUBERT $\mu, \nu, \rho, \delta, \eta$ gebruikt, welke letters hier reeds in andere beteekenis voorkomen.

§) SCHUBERT, t. a. p., blz. 92.

len, die tegelijk η_1 en z als factor bevatten, nul worden, dus is

$$\mu_1 \delta_1 z = \nu_1 \delta_1 z - \frac{1}{2} \varrho_1 \delta_1 z.$$

Daarin is blijkbaar

$$\mu_1 \delta_1 z = \sigma',$$
$$\nu_1 \delta_1 z = \mu (\mu + 1 - 3 \delta),$$

omdat de gegeven lijn der voorwaarde ν_1 een aantal van u drievoudige koorden treft, die met $(\mu + 1 - 3 \delta)$ dergelijke koorden een ontaarding δ_1 kunnen vormen. Verder is $\varrho_1 \delta_1 z = 2 m'$, omdat, zoodra het vlak der voorwaarde ϱ_1 door het dubbelpunt eener ontaarding δ_1 gaat, dit vlak geacht wordt die kegelsnee tweemaal te raken. Aldus vindt men

$$\sigma' = \mu (\mu + 1 - 3 \delta) - m',$$

en dan tegelijk

$$\sigma = 2 m' + \frac{1}{2} m \delta (\delta - 1) - \mu (\mu + 1 - 3 \delta).$$

Thans is men in staat voor het geval $m = 0$, $D = 10$ langs anderen weg Φ_3 te berekenen. Zoodra toch door een punt P drie niet in één vlak gelegen drievoudige koorden van R^9 gaan, heeft P hetzelfde poolvlak ten opzichte van de beide oppervlakken G^3, wier doorsnede door R^9 wordt gevormd, en iedere nieuwe koorde van R^9 door P getrokken, moet noodzakelijk een drievoudige koorde zijn. De betrekking

$$2 D = (m - 1)(m - 2) - 2 h$$

doet zien, dat R^9 van het geslacht tien 18 schijnbare dubbelpunten bezit. Door een punt P, dat hetzelfde poolvlak heeft ten opzichte van beide oppervlakken G^3, gaan derhalve zes drievoudige koorden; daarom is zulk een punt zesvoudig voor F^μ en vertegenwoordigt $\frac{6.5.4}{1.2.3}$, d. i. 20 drievoudige punten van $R^{m'}$.

Er zijn, zooals bekend is, 32 punten P *), die dan te zamen als 640 drievoudige punten van $R^{m'}$ moeten worden aangemerkt. Maar er zijn drievoudige punten van anderen aard. Elk raakvlak van $O_{\sigma'}$ bevat, volgens een bekende stelling omtrent de ligging der basispunten van een bundel vlakke krommen van den derden graad, een derde drievoudige koorde van R^9, en is daarom een drievoudig raakvlak van F^{μ}.

In het beschouwde geval is:

$$\mu = 42, \quad \delta = 11, \quad m' = 255, \quad \sigma' = 165.$$

Feitelijk is dus de klasse van het oppervlak, waarvan de raakvlakken drie elkaar twee aan twee op $R^{m'}$ snijdende drievoudige koorden bevatten, gelijk aan $\frac{1}{3}.165$ of 55. Het zal nu een eindig aantal malen voorkomen, dat de drie koorden in zulk een vlak door één punt van $R^{m'}$ gaan, zonder dat het snijpunt p hetzelfde poolvlak heeft ten opzichte van de beide oppervlakken G^3. Voeg, om dit getal te vinden, het snijpunt p van twee in het vlak e gelegen koorden toe aan de derde koorde g, en laat men aanwenden de coïncidentieformule

$$\varepsilon = p + g - e \text{ †)},$$

waarin ε als voorwaarde stelt, dat p op g valt.

Daar $m' = 255$, wordt hier $p = 255$, want het vlak der voorwaarde p bepaalt 255 punten p, ieder dergelijk punt één vlak e en één daarin gelegen koorde g. Elke drievoudige koorde, die de gegeven lijn der voorwaarde g ontmoet, wordt op $R^{m'}$ nog door 10 andere gesneden, welke twee aan twee in één vlak gelegen, 5 vlakken e en even zooveel punten p bepalen. Omdat nu F^{μ} wordt van den graad 42, is $g = 42 \times 5 = 210$. En het is ten laatste duidelijk, dat door het punt der voorwaarde e 55 vlakken e gaan, die telkens drie koorden bevatten, waarvan elk de koorde g kan zijn, zoodat $e = 3 \times 55 = 165$. Maar dan komt er

$$\varepsilon = 255 + 210 - 165 = 300.$$

*) Cremona-Curtze, t. a. p., blz. 105.

†) Schubert, t. a. p., blz. 83, form. 14.

Ligt evenwel p op g, dan kan ieder der drie koorden de lijn g voorstellen; er zijn derhalve 100 punten, waardoor drie in één plat vlak gelegen drievoudige koorden van R^9 gaan, en men komt tot het besluit, dat de dubbelkromme $R^{m'}$ in het geheel $640 + 100 = 740$ drievoudige punten vertoont.

Die uitkomst stemt overeen met de formule van art. 16, want de substituties:

$$\mu = 42, \quad \delta = 11, \quad m' = 255, \quad l_4 = 0, \quad \xi = 630, \quad k' = 2310$$

leveren werkelijk $\Phi_3 = 740$.

18. Hieronder volgt een overzicht van de verkregen uitkomsten, waaraan nog een enkele betrekking tusschen de beschouwde meetkundige getallen is toegevoegd.

$$\mu = \frac{1}{3}(m-1)(m-2)(m-3) - D(m-2).$$

$$\delta = \frac{1}{2}(m-2)(m-3) - D.$$

$$6\mu + \lambda = 4m\delta.$$

$$k = \frac{1}{2}(m-2)(m-3)(3m-8) + D(m-3)(m-8) - 2D(D-1).$$

$$2i = 4k - 6\mu - \lambda.$$

$$i = 2(m-2)(m-3)(m-4) + 2D(m-4)(m-6) - 4D(D-1).$$

$$i + 3\lambda = 2r\delta.$$

$$4l_4 = m\mu - 2m\delta - \frac{1}{2}i.$$

$$l_4 = \frac{1}{12}(m-2)(m-3)^2(m-4) - \frac{1}{2}D(m-3)(m-4) + \frac{1}{2}D(D-1).$$

$$(\Delta - 1) = \frac{1}{6}(m-2)(m-3)(2m-11) + \frac{1}{2}D(m^2 - 9m + 22) - D(D-1).$$

$$2(\Delta - 1) = \frac{1}{2}i - \mu.$$

$$\varrho = \mu + \frac{1}{2}i.$$

$$m' = \frac{1}{72}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(4m^2-m-12) -$$
$$-\frac{1}{6}D(m-2)(m-4)(m-5)(2m+3) +$$
$$+\frac{1}{2}D(D-1)m(m-5).$$
$$\xi = \frac{1}{4}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(2m-3) +$$
$$+\frac{1}{4}D(m-4)(m-5)(m^2-15m+18) -$$
$$-D(D-1)(m-5)^2 + D(D-1)(D-2).$$
$$\eta = 4(\delta-3)l_4.$$
$$k' = \frac{1}{2}i(\mu+1-3\delta) + 2m',$$
$$3\Phi_3 = m'(\mu-2) - k' - \xi(\delta-2) - 12l_4(\mu+4-4\delta) -$$
$$-4l_4(\delta-1)(\delta-3).$$
$$\sigma' = \frac{1}{72}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(4m^2-19m+24) -$$
$$-\frac{1}{3}D(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) + D(D-1).$$
$$\sigma = \frac{1}{8}(m-2)(m-3)(m-4)(3m^2-15m+20) -$$
$$-D(m-3)(m-4)(2m-5) + \frac{5}{2}D(D-1)(m-4).$$

---

19. Zijn hiermede de meest voor de hand liggende bijzonderheden van het regelvlak F^μ beschouwd, ik wil thans in het kort de verschillende gevallen bespreken, die zich bij krommen van den zesden graad voordoen, om zoo mogelijk langs anderen weg enkele uitkomsten, door de formules geleverd, te bevestigen.

En dan zonder ik dadelijk die krommen van den zesden graad uit, welke op oppervlakken van den tweeden graad zijn gelegen, omdat daarbij een regelvlak van veelvoudige koorden optreedt, terwijl ik mij bepalen zal bij het onderzoek van de vier meest bekende soorten, krommen, waardoor men minstens één oppervlak van den derden graad kan aanbrengen.

In het onderstaand overzicht zijn de nader te onderzoeken getallen vereenigd. In navolging van CAYLEY zijn daarbij de krommen voorgesteld door teekens, die geen verdere verklaring behoeven.

Kromme.	h	D	μ	δ	l_4	k	m'	ξ	σ'
$3 \times 3 - 3$	7	3	8	3	—	30	—	—	—
$3 \times 3 - 2 - 1$	8	2	12	4	1	44	8	16	4
$3 \times 3 - 1 - 1 - 1$	9	1	16	5	3	54	22	36	10
$3 \times 4 - 3 - 1 - 1 - 1$	10	0	20	6	6	60	42	54	18

20. *De kromme* $R^6 = 3 \times 3 - 3$. Onmiddellijk is het in te zien, dat deze kromme geen zesvoudige koorden bezit. Zulk een koorde zou toch moeten liggen op de beide oppervlakken van den derden graad G^3, wier gedeeltelijke doorsnede door R^6 wordt gevormd. Evenmin kan er een dubbelkromme $R^{m'}$ zijn, want sneden twee drievoudige koorden elkaar buiten R^6, dan zou het vlak dezer koorden de ruimtekromme van den derden graad R^3, die de aanvullingsdoorsnede der beide oppervlakken G^3 uitmaakt, in drie op een rechte lijn gelegen punten moeten treffen. Het ontwikkelbare oppervlak $O_{\sigma'}$ ontbreekt dus evenzeer. De kromme R^6 is op F^μ drievoudig, omdat R^6 uit een harer punten door een kegel van den 5den graad en van het geslacht 3 wordt geprojecteerd. De doorsnede van F^μ en een der oppervlakken G^3 bestaat uit de drievoudige kromme R^6 en die rechte lijnen van G^3, welke in drie punten op R^6 rusten.

Die rechte lijnen zijn, zooals bekend is *), ten getale van zes, omdat R^3 door zes lijnen niet wordt gesneden, derhalve is de bedoelde doorsnede van den graad $3 \times 6 + 6 = 24$, waaruit men besluit, dat F^μ van den graad $\mu = 8$ is, een uitkomst ook door STEINER †) reeds aangegeven. Om ten

*) STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, blz. 205.

†) „Ueber die Flächen dritten Grades", *Gesammelte Werke*, II, blz. 657.

slotte aan te toonen, dat $k = 30$, behoeft men slechts te wijzen op de 30 snijpunten van R^6 met het derde poolvlak van een willekeurig punt P ten opzichte van F^μ. Alleen voor die punten van R^6 toch heeft de verbindingslijn met P vier opeenvolgende punten met F^μ gemeen, alleen in die punten van R^6 bevat dus een der raakvlakken aan F^μ het willekeurig aangenomen punt P.

Terloops wil ik er op opmerkzaam maken, dat men voor dit eenvoudige geval ook gemakkelijk het aantal i der ribben van F^μ kan berekenen. Men kan namelijk R^6 beschouwen als de »kernkromme" van een net van oppervlakken van den tweeden graad. Aan ieder punt P van R^6 is dan ten opzichte van het net een drievoudige koorde g harmonisch toegevoegd, terwijl met de drie punten, waar g de kromme ontmoet, de drie door P gaande drievoudige koorden overeenkomen *). Het is duidelijk, dat, waar twee der drie op g gelegen punten samenvallen, hetzelfde gebeurt met twee koorden door P; m. a. w., men mag besluiten $i = \lambda$. Hoe groot is nu evenwel het getal λ? Dit getal geeft blijkbaar aan, hoeveel lijnen van F^μ raken aan een oppervlak van den derden graad G^3, dat door R^6 is gebracht. De raaklijnen van G^3 vormen een complex van den graad zes, waarvan de rechte lijnen op G^3 viervoudige stralen zijn. Het aantal der enkelvoudige lijnen, die het complex met F^μ gemeen heeft, bedraagt derhalve $6 \times 8 - 6 \times 4 = 24$. Maar is $\lambda = 24$ †), dan is ook $i = 24$, zooals de formule van art. 8 inderdaad aangeeft.

21. *De kromme* $R^6 = 3 \times 3 - 2 - 1$. Voor het onderzoek dezer kromme is het wenschelijk hare ligging ten opzichte van de 27 rechte lijnen van een der twee oppervlakken van den derden graad G^3, die dienen om R^6 te bepalen, wat nader in het oog te vatten. Een volledige doorsnede wordt gevormd door R^6, een kegelsnede C^2 en

---

*) Cremona-Curtze, t. a. p., blz. 177.

†) Het is, zooals Sturm (t. a. p., blz. 226) opmerkt, eigenaardig, dat voor alle krommen R^6, onverschillig van welk geslacht, λ de waarde 24 heeft.

een rechte lijn, welke C^2 niet snijdt. Laat in de gebruikelijke schrijfwijze c_{34} die rechte lijn zijn, en laat het vlak van C^2 nog de lijn c_{12} bevatten. Elke lijn, die met een kromme van den achtsten graad R^8 de volledige doorsnee vormt van twee oppervlakken G^3, snijdt R^8 in vier punten, elke andere lijn van een der oppervlakken, die de eerste niet ontmoet, heeft drie punten met R^8 gemeen *). Van deze stelling gebruik makende, ziet men in, dat c_{34}, die C^2 niet treft, een zesvoudige koorde van R^6 moet zijn. Andere dergelijke koorden bezit R^6 niet, want ze zouden op alle oppervlakken G^3 moeten liggen, die R^6 bevatten. Werkelijk is dus $l_4 = 1$. Wat de drievoudige koorden van R^6 betreft, die op G^3 te vinden zijn, men heeft te zoeken naar de lijnen, welke noch c_{34}, noch C^2 snijden, maar daarentegen c_{12} ontmoeten. Aan die voorwaarden voldoet het achttal:

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_{35},\ c_{36},\ c_{45},\ c_{46}.$$

Deze lijnen bepalen onderling vier snijpunten, die men kan aanduiden door:

$$(a_1\, b_2),\ (a_2\, b_1),\ (c_{35}\, c_{46}),\ (c_{45}\, c_{36}),$$

en daaruit mag men reeds besluiten, dat de dubbelkromme $R^{\mu'}$ vier en niet meer punten met G^3 gemeen heeft, die niet op R^6 gelegen zijn. De graad μ van F^μ wordt gevonden uit den graad $3\,\mu$ van de doorsnee van F^μ en G^3. Deze bestaat uit de viervoudige lijn c_{34}, acht enkelvoudige lijnen en de viervoudige kromme R^6. Deze laatste is viervoudig, omdat de kegel van den vijfden graad, waardoor R^6 uit een harer punten wordt geprojecteerd, van het geslacht 2 is, en derhalve 4 dubbelribben bezit. De bedoelde doorsnede is dus van den graad $4 \times 1 + 8 + 4 \times 6 = 36$, daarom is naar behooren $\mu = 12$. Omtrent de ξ snijpunten van $R^{\mu'}$ en R^6 merkt men op, dat aldaar twee drievoudige koorden een raakvlak van R^6 bepalen, welk vlak R^6, C^2 en

*) STURM, t. a. p., blz. 193.

c_{34} in negen basispunten van een bundel vlakke krommen van den derden graad moet snijden.

Zes van deze basispunten komen daarbij drie aan drie op twee rechte lijnen, het laatste drietal moet dus ook op een rechte lijn liggen. Zulk een raakvlak van R^6 bevat derhalve steeds het snijpunt P van c_{34} met het vlak van C^2, dat is het snijpunt van c_{34} en c_{12}. Omgekeerd is het duidelijk, dat een vlak door P, waarin één drievoudige koorde van R^6 ligt, een tweede dergelijke koorde bevat.

Het vierde poolvlak van een willekeurig punt ten opzichte van F^μ is van den graad 8; het zal de viervoudige kromme R^6, behalve viermaal op c_{34}, in 44 punten snijden, waar een raakvlak aan F^μ door het willekeurige punt gaat. Daarmede is alvast de uitkomst $k = 44$ bevestigd.

Van de 44 vlakken nu, die door P gaan en F^μ op R^6 aanraken, moet men de vier vlakken afnemen, die, door c_{34} gebracht, in een van de vier punten, waar deze lijn op R^6 rust, de raaklijn dezer kromme bevatten. En wel driemaal, want zulk een vlak bevat telkens een raaklijn van R^6 en drie samengevallen drievoudige koorden. In de 32 overige liggen, zooals besproken is, telkens twee drievoudige koorden, en men besluit dat er $\xi = 16$ punten te vinden zijn op R^6, waar de raaklijn en twee beschrijvende lijnen van F^μ in één vlak gelegen zijn. Wat met de vroeger verkregen uitkomst overeenstemt.

De raakkegel uit P aan F^μ vormt, zooals uit het voorafgaande blijkt, hier het ontwikkelbare oppervlak $O_{\sigma'}$. De raakkegel uit een willekeurig punt van de viervoudige lijn aan F^μ is van de klasse $12 - 4 = 8$. Ieder raakvlak door P is evenwel een dubbelraakvlak, zoodat die dubbelraakvlakken een kegel van de klasse $\sigma' = 4$ omhullen.

Ten slotte kost het weinig moeite om m' op te sporen. Men behoeft slechts de snijpunten van $R^{m'}$ met G^3 te tellen. De viervoudige lijn wordt door 4 andere gesneden, zoodat zij de dubbelkromme alleen op R^6 ontmoet, en wel telkens één tak.

Behalve die 4 snijpunten van $R^{m'}$ en G^3, heeft men $\xi = 16$ snijpunten op R^6 en de 4 onderlinge snijpunten van de op

G^3 gelegen drievoudige koorden, wat te zamen 24 snijpunten oplevert. En daaruit volgt naar behooren $m' = 8$.

22. *De kromme* $R^6 = 3 \times 3 - 1 - 1 - 1$. Deze kromme vormt met drie elkaar kruisende rechte lijnen c_{12}, c_{13}, c_{14} de volledige doorsnee van G^3 met een tweede dergelijk oppervlak.

Past men weder de in het vorige artikel aangehaalde stelling van STURM toe, dan volgt onmiddellijk, dat de lijnen c_{12}, c_{13} en c_{14} de kromme R^6 viermaal, en de lijnen

$$a_5, \quad a_6, \quad b_5, \quad b_6, \quad c_{15}, \quad c_{16},$$

die geen van de eerste ontmoeten, die kromme elk driemaal zullen snijden. Laatstgenoemde lijnen wijzen dan door hunne zes onderlinge snijpunten:

$$(a_5\, b_6), \ (a_6\, b_5), \ (a_5\, c_{15}), \ (a_6\, c_{16}), \ (b_5\, c_{15}), \ (b_6\, c_{16})$$

even zooveel snijpunten van G^3 met de dubbelkromme $R^{m'}$ aan.

De volledige doorsnede van F^μ en G^3 bestaat derhalve uit drie viervoudige lijnen, zes enkelvoudige lijnen en de kromme R^6, die, zooals men weder zonder moeite bewijst, thans vijfvoudig op F^μ is. Omdat dus die doorsnede wordt van den graad $4 \times 3 + 6 + 5 \times 6 = 48$, komt men tot het besluit, dat inderdaad $\mu = 16$.

Een vlak, dat in een der ξ snijpunten van R^6 en $R^{m'}$ de raaklijn aan R^6 en twee lijnen van F^μ bevat, moet, zooals men gemakkelijk inziet, de lijnen c_{12}, c_{13} en c_{14} in drie op een rechte lijn gelegen punten snijden, d. i., zulk een vlak zal raken aan de hyperboloïde $(c_{12}\, c_{13}\, c_{14})$. Omgekeerd zal in ieder raakvlak dezer hyperboloïde, in hetwelk één lijn van F^μ ligt, zich een tweede dergelijke lijn bevinden. Het vijfde poolvlak van een willekeurig punt ten opzichte van F^μ is van den graad 11; het zal de vijfvoudige kromme R^6, behalve viermaal op c_{12}, c_{13} en c_{14}, in 54 punten snijden, waar een raakvlak aan F^μ door het aangenomen punt gaat. Daaruit volgt intusschen $k = 54$. Uit dit alles zou men afleiden, dat er 108 raakvlakken van de hyperboloïde waren, die F^μ ergens op R^6 aanraakten. Maar daarvan

moeten weder driemaal de twaalf raakvlakken worden afgenomen, die zoowel de hyperboloïde als F^4 raken in punten op de viervoudige lijnen. De overblijvende 72 gemeenschappelijke raakvlakken vallen, zooals gevonden werd, twee aan twee tot dubbelraakvlakken van F^4 samen, waarmede dan de aanwezigheid van $\xi = 36$ snijpunten van R^6 en $R^{m'}$ opnieuw is aangetoond.

Het ontwikkelbare oppervlak $O_{\sigma'}$ wordt thans door de gemeenschappelijke raakvlakken van F^4 en de hyperboloïde gevormd. De klasse zou dus 32 zijn, indien niet drie viervoudige vlakkenbundels c_{12}, c_{13} en c_{14} zich afscheidden, en verder alle raakvlakken dubbelraakvlakken van F^4 waren. Nu moet het van de klasse $\sigma' = 10$ zijn.

Wederom vindt men m' uit het aantal $3\,m'$ van de snijpunten der dubbelkromme met G^3. Iedere viervoudige lijn wordt door 8 andere gesneden, en ontmoet dus $R^{m'}$ alleen op R^6, en wel telkens twee takken. Behalve de aldus verkregen 24 snijpunten zijn er nog $\xi = 36$ op R^6, en heb ik er 6 aangewezen in de onderlinge snijpunten der drievoudige koorden op G^3. Uit het gezamenlijke aantal 66 volgt opnieuw $m' = 22$.

23. Bij de vorige krommen R^6, die geen negen schijnbare dubbelpunten bezaten, kon de dubbelkromme $R^{m'}$ geen drievoudige punten vertoonen. In het geval $D = 1$, $h = 9$ moeten er, zooals de formule

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}(D+1)(D-2)(D-3)(D-4)$$

van art. 16 aangeeft, vier van die punten voorkomen, wat ik langs anderen weg bevestigen wil.

Onderstel, dat door P drie drievoudige koorden van R^6 gaan, dan kunnen die nooit in één vlak gelegen zijn, waardoor dan P wordt gekenmerkt als een van de punten, die ten opzichte van de beide R^6 bepalende oppervlakken van den derden graad G^3 hetzelfde poolvlak hebben. Iedere lijn door P, die de doorsnede dier oppervlakken in twee punten treft, moet noodzakelijk die doorsnede, bestaande uit R^6 en

de drie lijnen c_{12}, c_{13} en c_{14} in een derde punt ontmoeten. De drie lijnen c_{12}, c_{13} en c_{14} kunnen niet tegelijk door een lijn uit P worden gesneden, want dan zou P liggen op de hyperboloïde $(c_{12}\, c_{13}\, c_{14})$, en in dat geval zouden de drie vlakken, gelegd door ieder tweetal drievoudige koorden uit P naar R^6 getrokken, op die hyperboloïde drie door P gaande beschrijvende lijnen aanwijzen.

Een door P getrokken lijn, die c_{12} en c_{13} snijdt, zal dus rusten op R^6, en daaruit volgt, dat de drievoudige punten van $R^{m'}$ liggen op het oppervlak H^4, meetkundige plaats der lijnen, die tegelijk R^6, c_{12} en c_{13} in drie afzonderlijke punten ontmoeten. Omgekeerd is ieder punt van $R^{m'}$, dat op H^4, maar niet op R^6 ligt, een drievoudig punt dier kromme.

Daaruit is een bepaling van Φ_3 af te leiden. In de eerste plaats ziet men licht in, dat het bedoelde regelvlak H^4 is van den vierden graad, dat het R^6 als enkelvoudige kromme, c_{12} en c_{13} als dubbellijnen bevat *). Van de 88 doorsnijdingen, die $R^{m'}$ met H^4 moet opleveren, vallen er dus 16 op c_{12}, 16 op c_{13}, 8 in de punten, waar c_{14} de kromme R^6 ontmoet, en nog 36 in punten van R^6, die niet op c_{12}, c_{13} en c_{14} liggen. Er blijven derhalve 12 doorsnijdingen over, die niet op R^6 of op de viervoudige lijnen van F^4 gelegen zijn, en deze wijzen naar behooren op de aanwezigheid van $\Phi_3 = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ drievoudige punten van $R^{m'}$.

24. *De kromme* $R^6 = 3 \times 4 - 3 - 1 - 1 - 1$. Deze kromme R^6 is bepaald als gedeeltelijke doorsnede van een oppervlak van den derden graad G^3 met een oppervlak van den vierden graad, welke doorsnede voltooid wordt door een ruimtekromme R^3 van den derden graad en drie harer snijlijnen b_1, b_2, b_3. De ligging van R^6 ten opzichte van de 27 lijnen van G^3 wordt gemakkelijk gevonden, als men eerst vaststelt, hoe die lijnen zich ten opzichte van R^3 verhouden. Deze kromme wordt door een zestal kruisende lijnen twee-

*) SALMON, t. a. p., blz. 429.

maal, door een tweede dergelijk zestal in het geheel niet gesneden, welke beide zestallen te zamen een dubbelzes vormen, terwijl de overige lijnen elk één punt met R^3 gemeen hebben *).

Laten die beide zestallen in volgorde zijn:

$$c_{56},\ c_{46},\ c_{45},\ a_3,\ a_2,\ a_1,$$
$$b_4,\ b_5,\ b_6,\ c_{12},\ c_{13},\ c_{23}.$$

Iedere lijn van G^3 behalve b_1, b_2 en b_3 treft de totale doorsnede in vier punten; drie- en zesvoudige koorden van R^6 zijn dus te zoeken onder de lijnen, die één of geen punt met de aanvullingsdoorsnede gemeen hebben. En dan ziet men onmiddellijk, dat er geen lijn is, die de aanvullingsdoorsnede in één punt snijdt, zoodat op G^3 geen drievoudige koorden van R^6 voorkomen. De lijnen b_4, b_5, b_6 evenwel, die noch R^3, noch b_1, b_2, b_3 ontmoeten, zijn viervoudige lijnen van F^μ. Wat eindelijk de lijnen b_1, b_2 en b_3 der aanvullingsdoorsnede zelve aangaat, zij treffen R^6 en R^3 te zamen in vijf punten, want een oppervlak van den derden en een van den vierden graad, die een rechte lijn gemeen hebben, raken elkaar op die lijn in vijf punten aan †). Daar nu de genoemde lijnen éénmaal R^3 snijden, zijn het zesvoudige koorden van R^6. De zes op G^3 aangewezen viervoudige lijnen van F^μ kruisen elkaar, zoodat men mag besluiten, dat de dubbelkromme $R^{m'}$ buiten R^6 het oppervlak G^3 niet snijden zal.

De doorsnede van G^3 en F^μ bestaat thans uit zes viervoudige lijnen en een kromme R^6, die, zooals men spoedig aantoont, zesvoudig voor F^μ is. Waaruit dan volgt, dat F^μ is van den graad $\mu = \frac{1}{3}(6 \times 6 + 4 \times 6) = 20$.

De volgende redeneering doet het aantal ξ der snijpunten van R^6 en $R^{m'}$ kennen. Een vlak, dat twee elkaar op $R^{m'}$

---

*) Sturm, t. a. p., blz. 188.

†) Cremona, t. a. p., blz. 60, [2]), waar $(\nu + \nu')$ in $(\nu + \nu' - 2)$ is te veranderen.

snijdende koorden bevat, ontmoet R^3 en haar drie snijlijnen b_1, b_2, b_3 in zes op een kegelsnee gelegen punten.

Want voegt men de doorsnede met R^6 er bij, dan moet men een twaalftal punten vinden, waarin een kromme van den vierden graad een kromme van den derden snijden kan. Omgekeerd zal ook ieder vlak, dat aan de genoemde voorwaarde voldoet, twee drievoudige koorden van R^6 bevatten, zoodra men weet, dat er één lijn van F^μ in gelegen is.

De vraag, welke nu eerst dient beantwoord te worden, luidt: Wat is de omhullende der vlakken, die R^3, b_1, b_2 en b_3 in zes punten van een kegelsnee snijden?

Om die vraag te beantwoorden, denkt men zich het net van oppervlakken van den tweeden graad, dat door R^3 kan worden gelegd. Deze oppervlakken, die b_1, b_2 en b_3 ieder in een vast punt van R^3 snijden, bepalen op deze lijnen drie puntreeksen, waartusschen een trilineaire overeenkomst bestaat, d. i. een zoodanige overeenkomst, waarbij een willekeurig punt op b_1, in verband met een aangenomen punt van b_2, één derde punt op b_3 bepaalt. De vlakken, door drie overeenkomstige punten gelegd, vormen de gezochte omhullende. En het kost weinig moeite om zich te overtuigen, dat die omhullende is een oppervlak H_3 van de derde klasse *), waarop niet alleen de lijnen b_1, b_2 en b_3, maar ook b_4, b_5 en b_6 gelegen zijn. Een vlak toch, willekeurig door b_5 aangebracht, snijdt G^3 volgens een kegelsnee, die, daar R^3 de lijn b_5 niet ontmoet, werkelijk naast drie punten op b_1, b_2 en b_3 ook drie punten van R^3 bevatten zal.

Het zesde poolvlak van een willekeurig punt ten opzichte van F^μ is van den graad 14. Op de zesvoudige kromme R^6 zal het $k = 14 \times 6 - 6 \times 4 = 60$ punten aanwijzen, waar een der zes raakvlakken aan F^μ door het aangenomen punt gaat. Er zouden dus $3 \times 60 = 180$ raakvlakken zijn van H^3, die F^μ raken in punten op R^6. Maar daarvan gaan af driemaal de 24 vlakken, die F^μ raken in punten,

*) Deze voortbrenging komt dualistisch overeen met die van het oppervlak van den derden graad volgens August (Sturm, t. a. p., blz. 44).

waar R^6 haar zesvoudige koorden ontmoet. De overblijvende 108 vallen twee aan twee samen, omdat elk gemeenschappelijk raakvlak van H^3 en F^μ volgens het voorafgaande twee drievoudige koorden bevat.

Zoo worden $\xi = 54$ dubbelraakvlakken van F^μ gevonden, die op even zooveel snijpunten van R^6 en de dubbelkromme $R^{m'}$ wijzen. Het oppervlak $O_{\sigma'}$ wordt thans gevormd door de aan H^3 en F^μ gemeenschappelijke raakvlakken. Men zou dus voor de klasse σ' de waarde 60 moeten aannemen, maar, daar feitelijk 6 viervoudige stralenbundels zich afscheiden, en de overige raakvlakken twee aan twee samenvallen, is, zooals de formules opleverden, $\sigma' = \frac{1}{2}(60 - 6 \times 4) = 18$. Telt men ten slotte de snijpunten van $R^{m'}$ met G^3, dan vindt men slechts twee groepen, te weten 54 op R^6, en $6 \times 4 = 24$ snijpunten, driemaal in rekening te brengen, in de punten waar de viervoudige lijnen R^6 ontmoeten. Deze laatste kunnen, daar zij slechts door 12 andere lijnen van F^μ gesneden worden, $R^{m'}$ niet meer treffen. Maar dan snijdt $R^{m'}$ het oppervlak G^3 in $54 + 6 \times 12 = 126$ punten, zoodat noodzakelijk $m' = 42$.

Breda, November 1889.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 25 Januari 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HOOGEWERFF, VAN DER WAALS, WEBER, MARTIN, MAC GILLAVRY, BEHRENS, VAN BEMMELEN, KAMERLINGH ONNES, FORSTER, DE VRIES, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN DIESEN, J. A. C. OUDEMANS, KOSTER, PLACE, SCHOUTE, STOKVIS, KAPTEYN, BIERENS DE HAAN, KORTEWEG, MOLL, PEKELHARING, SCHOLS, A. C. OUDEMANS JR. en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. Den Secretaris van de Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts te Rouaan, 17 Januari 1890; 2°. Sir WILLIAM THOMSON, Glasgow, 1890; 3°. D. A. GRUBER, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B., 2 Januari 1890; 4°. W. BLASIUS, Voorzitter van het Verein für Naturwissenschaft te Brunswijk, 16 Januari 1890; 5°. den Directeur van het Germanisches Nationalmuseum te Neurenberg, 27 December 1889; 6°. F. IMHOOF BLUMER, Winterthur, 16 Januari 1890; 7°. ALPH. DE CANDOLLE, Genève, 1890; 8°. E. DE REGEL, Directeur van den Jardin impérial

de botanique te St. Petersburg, 30 December 1889; 9°. SCHLÜTER, Bibliothecaris van de Universiteit te Dorpat, 11 Januari 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 6 Januari 1890; 2°. A G. VORDERMAN, Batavia, 27 December 1889; 3°. den Secretaris van de Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Alterthümer te Emden, 18 October 1889; 4°. HOFFMANN, Secretaris van het Verein für Nassauische Alterthumskunde und Geschichtsforschung te Wiesbaden, 25 November 1889; 5°. den Secretaris van de mathematische Gesellschaft te Hamburg, December 1889; 6°. WILLIAM KEYSER, Baltimore 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn:

1°. Eene kennisgeving van den Heer RAUWENHOFF, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, de mededeeling behelzend, dat Z.Exc. de beschikking der Afdeeling, waarbij de Heer Dr. F. A. F. C. WENT, leeraar aan het gymnasium te 's Gravenhage, wordt aangewezen om, op kosten van het Buitenzorgfonds en met geldelijke ondersteuning van den Staat, een bezoek te brengen aan het botanisch station te Buitenzorg, wordt goedgekeurd.

3°. Eene uitnoodiging van de physikalisch-ökonomische Gesellschaft te Koningsbergen, ter viering van het 100-jarig bestaan van dit Genootschap op den 22sten Februari e.k.

4°. Eene uitnoodiging van de mathematische Gesellschaft te Hamburg, ter viering van het 200-jarig bestaan van dit Genootschap op den 15den Februari e.k.

De Heer BIERENS DE HAAN stelt voor, het Hamburgsche Genootschap, 'twelk sedert zijne oprichting met Nederlandsche wiskundigen steeds in wetenschappelijk verkeer stond

en de aanleiding was dat hier te lande het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" gesticht werd, een schriftelijken gelukwensch der Afdeeling op den feestdag te doen toekomen.

De Voorzitter, wijzende op de omstandigheid, dat het Hamburgsche Genootschap tot de Akademie in geene betrekking staat, zelfs niet wat den ruil van uitgegeven geschriften betreft, meent, dat het brengen van eene dergelijke hulde, onder de gegeven omstandigheden, in strijd is met de gewoonte, in dit opzicht steeds door de Akademie gevolgd. Hij stelt echter de aanwezigen in de gelegenheid, het voorstel van den Heer Bierens de Haan aan te nemen of te verwerpen. Het wordt met 15 tegen 11 stemmen verworpen.

5°. Een brief van den Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Cyclische veelhoeken op vlakke kubische krommen", 'twelk hij gaarne in de Verslagen en Mededeelingen zag opgenomen. De Heeren Bierens de Haan en van den Berg zullen daarover, zoo mogelijk in de Februari-Vergadering, adviseeren.

— De Heeren Bierens de Haan en van den Berg brengen rapport uit over het opstel, door Dr. Jan de Vries in de November-Vergadering der Afdeeling aangeboden ter plaatsing in de werken der Akademie. Hun oordeel luidt gunstig, en het voorstel om de verhandeling te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen, wordt aangenomen.

— De Heer Hoogewerff spreekt, ook uit naam van het lid van Dorp, over de inwerking van kaliumhypobromiet op succinphenylamide en op cinchoninezuuramide. Uit de oplossing van succinphenylamide in kaliumhypobromiet kan een succinphenylbroomamide worden afgescheiden, dat o. a. door kokenden alcohol in succinparabroomphenylamide en, verwarmd met kali, in het zout van een zuur $C_{10} H_{12} N_2 O_3$ wordt omgezet. Dit zuur moet, blijkens zijne ontledingsproducten en op grond van de synthetische bereiding uit

phenylureum en β amidopropionzuur, als a. b. phenyl. β ureïdopropionzuur $C{=}O\begin{matrix}-N^{C_6H_5}_{H}\\-N^{H}_{CH_2CH_2COOH}\end{matrix}$ worden opgevat. Beide omzettingen van het succinphenylbroomamide zijn in overeenstemming met de beschouwingen, vroeger door hen ontwikkeld aangaande de intramoleculaire omzettingen van verbindingen, die negatieve atomen of radicalen, direct aan stikstof gebonden, bevatten.

Bij de inwerking van kaliumhypobromiet op cinchoninezuuramide is een broomamide verkregen, waaruit gemakkelijk het γ-Py. chinolineamine bereid wordt. De onderzoeking van de nitrocinchoninezuren in gelijke richting is onderhanden. Op de waarschijnlijkheid wordt gewezen, dat genoemd chinolineamine, overeenkomstig SKRAUP's opvatting van de constitutie van het kynurine, in dat oxychinoline zal om te zetten zijn. De verhandeling aangaande de inwerking van kaliumhypobromiet op succinphenylamide wordt voor de Verslagen en Mededeelingen aangeboden.

— De Heer VAN BEMMELEN deelt enkele uitkomsten mede van een onderzoek betreffende de samenstelling van de vulkanische en andere klei, op welke in Deli en Java tabak wordt gekweekt.

De aarde in de kuststreek van Deli is eene vulkanische klei. Haar onverweerd gedeelte bevat geen kwarts, maar bestaat voornamelijk uit dichroitische hornblende (gewone aluinaarde-houdende) met insluitsels van magnetiet, uit veldspaat, waarbij plagioklaas, en uit magnetiet. Deze veldspaat bevat glasinsluitsels en is van jong eruptieven oorsprong (tertiaire eruptiefgesteenten).

Niet in de aarde, maar wel in den magnetiet kon een spoor titanzuur aangewezen worden. De hoeveelheid van het onverweerde gedeelte is op verschillende plaatsen verschillend: in eene roodbruine klei 20 pCt., in eene grijze klei tot 50 pCt.

Het verweerings-silicaat heeft eene eigenaardige samen-

stelling; het verschilt aanmerkelijk van dat van de gewone alluviale klei in zijne gemakkelijke ontleedbaarheid door zoutzuur en door kali, en in zijne zeer basische samenstelling. Naar eene eenvoudige methode is de hoeveelheid kiezelzuur, die bij de ontleding van het silicaat vrij komt, bepaald geworden. In het door zoutzuur ontleedbare verweerings-silicaat van gewone zware alluviale klei, zoowel van Nederland (Zuiderzee), als van Java (bij de rivier de Kening in Rembang), zijn op 1 mol. Al_2O_3 3 mol. SiO_2 gevonden; in eene ligte klei van Nederland 5 mol. SiO_2. In het door zwavelzuur ontleedbare verweerings-silicaat van die kleisoorten werd op 1 mol. Al_2O_3 ongeveer 2 mol. SiO_2 gevonden. Daarentegen gaf het verweerings-silicaat van de vulkanische klei, zoowel van Deli als van Malang (residentie Pasoeroean in de nabijheid van de vulkanen de Kloet, de Smeroe), op 1 mol. Al_2O_3 slechts 1—2 mol. SiO_2.

Het verweerings-silicaat verraadt zijnen oorsprong uit vulkanisch puin ook daardoor:

1° dat het geene koolzure kalk bevat, terwijl de Keningklei (Rembang) en de Nederl. alluviale klei rijk daaraan zijn;

2° dat het ijzergehalte zeer groot, en ook het mangaangehalte grooter is dan in gewone klei;

3° dat het weinig kali, meer magnesia en kalk bevat. De hoeveelheid kali, in het amorphe silicaat absorptief gebonden, bedraagt slechts 0,4—0,6 pCt. (op 100 d. daarvan), en daarentegen ruim 3 pCt. in dat van Nederl. alluv. klei en 2 pCt. in de Keningklei;

4° dat zij veel sterk-gebonden (d. i. in eene droge ruimte nog vastgehouden) water bevat, zoowel in volstrekte hoeveelheid (12 pCt. in de roodbruine Deliklei), als in de betrekkelijke hoeveelheid op het verweerings-silicaat berekend (op elk mol. Al_2O_3 bijna 3 mol. H_2O tegen ongeveer 2 mol. H_2O in gewone klei).

De hoeveelheid van dit water is afgeleid geworden uit het gloeiverlies der aarde in verband met haar humusgehalte.

De aarde in Deli is met bosch bezet geweest, en bevat daardoor een rijkelijk humusgehalte en een dienovereenkomstig hoog stikstofgehalte. In de zoogenaamde roodbruine klei van Medan is 6 pCt. humus met 0.3 pCt. stikstof gevonden.

Het phosphorzuurgehalte is betrekkelijk hoog, bijna 0.2 pCt. in de vulkanische klei van Deli en Java.

Op deze kaliarmere gronden wordt nu de uitmuntende Deli- en Malang-tabak gekweekt, welke juist een hoog kaligehalte bezitten.

Het is evenwel gebleken, dat de kali meest in het humaat en in het gemakkelijkst ontleedbare deel van het verweerings-silicaat der vulkanische klei bevat is, en dat die hoeveelheid niet minder bedraagt dan in het humaat en gemakkelijk ontleedbare verweerings-silicaat der gewone vruchtbare klei.

De vruchtbaarheid van den bodem der gerooide bosschen in Deli, tot het voortbrengen van uitmuntenden tabak, ligt, behalve in de eigenaardige samenstelling van het verweerings-silicaat: 1°. in zijne gesteldheid van pas gewezen boschgrond en 2°. in het gunstige klimaat wat betreft den regenval.

De eerste brengt mede, dat de bodem eene zeer groote mate van losheid heeft tot genoegzame diepte, daarbij humus- en stikstof-rijk is, en dat deze humus, evenals het gemakkelijkst ontleedbare deel van het verweerings-silicaat (in hetwelk dus de chemische beweging en omzetting de sterkste zijn) betrekkelijk hoog verzadigd is met absorptief gebonden alkalische bases.

De tweede gunstige omstandigheid is de regenval. Raadpleegt men de regenkaarten, die door de Delimaatschappij uit de waarnemingen der laatste 15 jaren zijn opgemaakt, dan blijkt het dat ook in den drogen moesson regenbuien nooit lang uitblijven, zooals op Java dikwijls het geval is. Zoo telde men in de Meimaanden 6—21 regendagen, in de Juni- en Julimaanden 5—20 regendagen. Nu vereischt de tabaksplant eene krachtige en snelle stofwisseling, vooral in den tijd na het toppen. In Deli bedraagt die tijd gewoonlijk niet langer dan 30 dagen. Bij ongunstige weêrs-toestanden,

en bij een bodem van minder gunstige physische en chemische samenstelling, hopen zich chloruren en sulfaten (soms veel natron bevattend) op, en vormen zich te weinig kalizouten van organische zuren. Uit de vergelijking van tabak op de Keningklei gekweekt, van slechte qualiteit, met dien van Malang en van Deli, bleek zulks ten duidelijkste. De gunstige toestand van den Delibodem, wat zijne physische en chemische samenstelling, en wat de tijdige regenbuien betreft, bewerkt dat de krachtige ontwikkeling der bladeren tot aan het tijdstip hunner rijpheid — welke gepaard gaat met de vorming van organische kali-kalk-magnesiazouten, en eene goede verhouding tusschen stikstofhoudende en stikstofvrije organische stoffen — in betrekkelijk korten tijd verkregen wordt.

Een vergelijkend onderzoek van verschillende tabaksbladeren leerde, dat de goedbrandbare zeemige bladen alle eene asch leveren, waarin de verhouding tusschen de hoeveelheden chloruur + sulfaat (in chem. aequiv. berekend) en de hoeveelheid kali altijd was als 1 tot > 2.

Wanneer een veld in Deli voor de tweede maal gebruikt wordt, heeft het niet meer een even groot vermogen om een grooten oogst van uitstekende hoedanigheid te geven. De losheid der bovenste humuslaag, de betrekkelijke reinheid des bodems van onkruiden, en wellicht ook de hoeveelheid absorptief gebonden bases in het humaat, zijn afgenomen. De cultuur moet daarom extensief gedreven worden, d. i.: steeds moet nieuwe boschgrond gebruikt en de reeds gebruikte velden weder tot bosch gemaakt worden.*) Dit is geen roofbouw. Het is door de omstandigheden vooreerst aangewezen.

Het zou zeer wenschelijk zijn, dat een wetenschappelijk proefstation onder de leiding van een natuurwetenschappelijk

---

*) Wordt een tabaksveld na den oogst aan de natuur overgelaten, dan bedekt het zich met Alang. Wordt dit niet gebrand maar gemaaid, dan komen er spoedig struiken, die tot boomen opgroeien, en weder door andere verdrongen worden. Alleen de inlandsche namen daarvan zijn bekend, niet tot welke familiën en geslachten zij behooren.

man, die reeds getoond heeft dat hij in staat is wetenschappelijke vraagstukken op te lossen, in Deli opgericht wierde. Daardoor zou het onderzoek bevorderd worden naar de geologische gesteldheid, waarvan wij thans niets, en van de flora, waarvan wij zeer weinig weten. Daar zou eene nauwkeurige studie van de stofwisseling in de tabaksplant kunnen ter hand genomen worden. Zoover bekend, is totnogtoe alleen een enkel onderzoek door KOSUTÁNY gedaan betreffende de stofwisseling in de tabaksplant, op 5 tijdstippen waargenomen; maar deze planten waren niet getopt. Zulk een onderzoek moet der cultuur ten slotte ten goede komen. Ook het onderzoek naar doelmatige bemesting, wanneer de voorraad van nieuwen boschgrond uitgeput is, kan daar plaats hebben, en tevens gewaarschuwd worden tegen de blinde empirie en de kwakzalverij, die op dat gebied heerschen. Kan men nu reeds verklaren, waarom het veld niet bemest mag worden, maar eene kopbemesting vereischt wordt, en waarom bemesting met KCl, K_2SO_4, KNO_3 schadelijk is, waarom guano op den duur schadelijk zal worden — eene keuze van de beste mestsoort moet door wetenschappelijk onderzoek geleid worden. Bovendien is het thans nog niet bekend, aan welke oorzaken de tegenspoed in andere deelen van Sumatra's Oostkust, in Siak bijv., moet toegeschreven worden: aan ongeschiktheid van klimaat en bodem, of aan onkunde en zwendelarij. Door wetenschappelijk onderzoek zal dit ongetwijfeld verklaard kunnen worden.

— De Heer KAMERLINGH ONNES biedt uit naam van Dr. SISSINGH te Delft voor de Verslagen en Mededeelingen een opstel aan, getiteld: »De wet, welke KERR's magneto-optisch verschijnsel bij verschillende invalshoeken volgt, zoo de magnetische evenwijdig aan het vlak is". De Heeren VAN DER WAALS en LORENTZ worden door den Voorzitter uitgenoodigd, daarover in de volgende Vergadering rapport uit te brengen.

— Voor de bibliotheek der Akademie wordt door den Heer BIERENS DE HAAN aangeboden: 1⁰ Deel XVI, Stuk 2

van »Nieuw-Archief voor Wiskunde" en 2° een brochure, getiteld: »Materialien für die Geschichte der mathematischen Gesellschaft-Mitglieder in den Niederlanden", door den Heer Bierens de Haan bij gelegenheid van het 200-jarig bestaan van het wiskundig Genootschap te Hamburg bijeengebracht.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. J. DE VRIES,**

GETITELD:

„NIEUWE EIGENSCHAPPEN DER HARMONISCHE CONFIGURATIËN $(24_3, 18_4)$".

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN F. J. VAN DEN BERG.

Over deze verhandeling, in de November-Vergadering in onze handen gesteld, hebben wij thans de eer verslag uit te brengen.

Schrijver haalt uit zijn opstel »Over vlakke configuratiën" de kromme van den vierden graad K_4 aan, die ontstaat uit de conf. $(12_4, 16_3)\,A$, naderhand door σ_4 voorgesteld, en bewijst, dat de geassocieerde σ_4 tot dezelfde K_4 leidt, zoodat elke harmonische conf. $(24_3, 18_4)$ in eene H_4 is beschreven.

Verder herinnert hij uit zijn opstel, »Over de harmonische configuratie $(24_3, 18_4)$", hoe daaruit twee corresiduale σ_4 worden afgeleid, welke een zelfde bitripel tot restfiguur van hare geassocieerde lijnen hebben. De beide H_3, om deze σ_4 beschreven, snijden eene centrale involutie op de aan de harmonische conf. omschreven H_4 in: deze bevat dus ook de zestien snijpunten (de *complementaire* punten) der paren geassocieerde driepuntige diagonalen der harmonische conf.

De zestien bitripels der eerste σ_4 bepalen nu acht nieuwe lij-

nen, die elk vier complementaire punten dragen, en daarmede de conf. $(16_2, 8_4)\,A$ vormen, aangegeven door tabel 3. Deze, met de beide geassocieerde conf. σ_4 vormen dus eene conf. 40_4 (zie tabel 4), beschreven in de H_4: de lijnen der harmonische conf. zijn daarvan de vierpuntige diagonalen.

Uit eene hoofd-vierzijde der eene σ_4, en eene hoofd-vierzijde der andere σ_4, waarin de geassocieerde zijden niet voorkomen, kan men door toevoeging van nog vier lijnen uit tabel 3, telkens ééne hoofd-tienzijde vormen der 40_4; zoo ontstaan er bijv. de beide hoofd-tienzijden van tabel 5, die nu geene lijn gemeen hebben, en alzoo eene conf. $(40_2, 20_4)$ zamenstellen. Neemt men uit de 40_4 deze beide hoofd-tienzijden weg, dan ontstaat er eene andere conf. $(40_2, 20_4)$, die geene hoofd-tienzijden bevat, en dus met de vorige ongelijksoortig is.

Schrijver leidt nu met behulp der uitkomsten van zijn opstel »Kwadrupel-involuties op bikwadratische krommen" uit deze 40_4 de cubische krommen K_3 af, die twaalf punten dezer conf. bevatten, of anders om de twee geassocieerde σ_4, en om hunne corresidualen kunnen beschreven worden; zij zijn 834 in aantal.

Hij keert daarop tot de σ_4 terug, en leidt de eigenschap af, dat hare 48 nevenpunten in viertallen op twaalf rechten liggen.

En nu gebruikt hij de uitkomsten, verkregen in zijn jongste opstel »Over eene groep van regelmatige vlakke configuratiën, en eenige daarmede samenhangende configuratiën van punten en krommen", om te bewijzen dat die 48 nevenpunten en de zestien conf. lijnen der σ_4 met twaalf nieuwe lijnen en acht nieuwe punten tot eene combinatorische conf. $(56_3, 28_6)$ voeren; alsook dat die 48 nevenpunten der σ_4 zestien conische sextupels vormen; en nog dat die 48 nevenpunten en de zestien complementaire punten, de acht drievoudige snijpunten der nevenpunten lijnen en de twaalf overige snijpunten der complementaire lijnen, met de zestien conf. lijnen, die twaalf nevenpunten-lijnen, en die acht complementaire lijnen eene nieuwe combinatorische conf. $(84_3, 36_7)$ vormen. Uit twee hoofd-vierzijden der σ_4 en de twee daarmede samenhan-

gende hoofd-vierzijden der geassoeieerde σ_4 vormt schrijver nu de conf. $(64_2, 16_8)$ (zie tabel 20). Van deze 64 punten liggen de 24 punten der beide σ_4 en de acht complementaire punten op H_4; de vier nevenpunten der σ_4, de vier nevenpunten der geassocieerde σ_4, en de 24 snijpunten van lijnen der σ_4 met die der geassocieerde liggen op eene bikwadratische kromme S_4. Op die wijze ontstaan er twaalf S_4, die ieder 24 der laatstgenoemde 96 snijpunten bevatten.

Wanneer men dus elke lijn der σ_4 de geassocieerden der lijnen van hare restfiguur laat snijden, dan onstaan er 96 snijpunten: deze vormen met de twaalf bikwadratische krommen S eene conf. $(96_3, 12_{24})$.

De achttien lijnen der harmonische conf. $(24_3, 18_4)$ vormen zes hoofd-zeszijden (zie tabel 21). Uit elke zes paren van deze kan men eene conf. $(36_2, 12_6)$ samenstellen (zie tabel 22), waarvan 24 punten op de H_4 liggen, de overige twaalf op eene kegelsnede. Dus liggen de 72 nevenpunten der harmonische conf. $(24_3, 18_4)$, die geen snijpunten zijn van de kubische krommen K_3, waarin de beide geassocieerde conf. σ_4 beschreven zijn, in twaalftallen op zes kegelsneden.

Dit opstel hangt, zooals wij zagen, nauw zamen met de vroeger door schrijver geleverde opstellen; het getuigt op nieuw van zijn scherpzinnig oordeel en wiskundig talent, en verdient dus zeker in de Verslagen en Mededeelingen te worden opgenomen.

Leiden en *Hilversum*,
Januari 1890.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

NIEUWE EIGENSCHAPPEN

DER

HARMONISCHE CONFIGURATIE $(24_3, 18_4)$,

DOOR

JAN DE VRIES.

§ 1.

De punten van twee geassocieerde cf. $\sigma_4 \equiv (12_4, 16_3)\,A$ vormen met hunne cf. diagonalen eene cf. $(24_3, 18_4)$, welke ik de harmonische $(24_3, 18_4)$ heb genoemd, omdat elke harer lijnen eene harmonische groep draagt, waarin twee punten der eene σ_4 door twee punten der andere σ_4 harmonisch gescheiden worden *). Deze cf. wordt voorgesteld door de tabel (1), waar de punten der eene σ_4 door a_i, b_i, c_i, de punten der andere door α_k, β_k, γ_k, δ_k zijn aangewezen. Het verband tusschen deze beide notaties vindt men in het aangehaalde opstel (blz. 108, N⁰. 5).

$$\begin{array}{c|c|c}
a_1\,a_2\,\beta_2\,\gamma_2 & b_1\,b_2\,\alpha_2\,\gamma_2 & c_1\,c_2\,\alpha_3\,\beta_2 \\
a_3\,a_4\,\alpha_2\,\delta_2 & b_3\,b_4\,\beta_2\,\delta_2 & c_3\,c_4\,\gamma_2\,\delta_2 \\
a_1\,a_3\,\beta_3\,\gamma_3 & b_1\,b_3\,\alpha_3\,\gamma_3 & c_1\,c_3\,\alpha_3\,\beta_3 \\
a_2\,a_4\,\alpha_3\,\delta_3 & b_2\,b_4\,\beta_3\,\delta_3 & c_2\,c_4\,\gamma_3\,\delta_3 \\
a_1\,a_4\,\beta_4\,\gamma_4 & b_1\,b_4\,\alpha_4\,\gamma_4 & c_1\,c_4\,\alpha_4\,\beta_4 \\
a_2\,a_3\,\alpha_4\,\delta_4 & b_2\,b_3\,\beta_4\,\delta_4 & c_2\,c_3\,\gamma_4\,\delta_4
\end{array} \quad \ldots (1)$$

*) „Over vlakke configuraties" (*Verst. en Med.*, Deel V, blz. 110, tabel F).

Wordt de projectiviteit der bundels van kegelsneden, welke achtereenvolgens de bases $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ en $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ bezitten, zoodanig geregeld, dat de ontaarde kegelsneden $(a_1 a_2, a_3 a_4)$ en $(b_1\, b_2, b_3\, b_4)$, $(a_1\, a_3, a_2\, a_4)$ en $(b_1\, b_3, b_2\, b_4)$, $(a_1\, a_4, a_2\, a_3)$ en $(b_1\, b_4, b_2\, b_3)$ overeenkomen, dan bevat de door deze bundels voortgebrachte kromme van den vierden graad, blijkens tabel (1), de twintig punten $a_i\; b_i\; \alpha_i\; \beta_i\; \gamma_i\; \delta_i$. Met de K_4, die op overeenkomstige wijze met behulp van de bundels $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ en $(c_1\, c_2\, c_3\, c_4)$ kan geconstrueerd worden, heeft zij derhalve de zestien punten $a_i\; \alpha_i\; \beta_i\; \gamma_i\; \delta_i$ gemeen, waarvan $\alpha_i\; \beta_i\; \gamma_i\; \delta_i$, als punten eener σ_4, door eene K_3 kunnen verbonden worden *), terwijl $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ niet collineair zijn; de beide K_4 zijn derhalve identiek. De kromme van den vierden graad, die dientengevolge door de 24 punten der beide σ_4 kan gebracht worden, duid ik door het teeken H_4 aan.

1. *Om elke harmonische* $(24_3,\ 18_4)$ *kan eene kromme van den vierden graad beschreven worden.*

In mijn opstel »Over de harmonische cf. $(24_3,\ 18_4)$" †) heb ik aangetoond, dat het bitripel, anders gezegd de $(9_2, 6_3)\,A$

$$\left\{\begin{matrix} a_2 & b_3 & c_4 \\ c_3 & a_4 & b_2 \\ b_4 & c_2 & a_3 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

door de geassocieerde lijnen $a_1\, b_1\, c_1$ en $\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ wordt aangevuld tot twee *corresiduale* σ_4, d. w. z. twee cf. σ_4, welke dit bitripel als restfiguur der lijn $a_1\, b_1\, c_1$ resp. $\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ gemeen hebben. Van den krommenbundel der derde orde, waarvan de basis door de punten van dit bitripel gevormd wordt, snijden twee krommen, n.l. de K_3, welke om de beide corresiduale σ_4 kunnen beschreven worden, de boven gevonden kromme H_4 in de lineaire tripels $a_1\, b_1\, c_1$ en $\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$.

---

*) l. c. blz. 112.

†) *Versl. en Meded.*, Deel V, blz. 211, tabel II.

De genoemde bundel snijdt derhalve op H_4 eene centrale tripelinvolutie in, waarvan het op H_4 gelegen centrum met $a_1\, b_1\, c_1$ en met $\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ collineair is; m. a. w. H_4 kan voortgebracht worden door de projectiviteit van dien bundel (K_3) met den door het punt $111 \equiv (a_1\, b_1\, c_1,\ \delta_2\, \delta_3\, \delta_4)$ aangewezen stralenbundel.

2. *De kromme H_4, welke om de harmonische cf. kan beschreven worden, bevat ook de zestien snijpunten der paren geassocieerde driepuntige diagonalen dezer cf.*

De zestien nieuwe punten noem ik *complementaire* punten; elk hunner wordt aangeduid door het samenstel der indices van de punten a, b, c, waarmede het collineair ligt.

De beide ontaarde K_3

$$(a_2\, b_3\, c_4,\ a_3\, b_4\, c_2,\ a_4\, b_2\, c_3) \quad \text{en} \quad (a_2\, b_4\, c_3,\ a_3\, b_2\, c_4,\ a_4\, b_3\, c_2),$$

welke tot bovengenoemden bundel behooren, snijden H_4 in de tripels (234, 342, 423) en (243, 324, 432) der involutie met centrum 111. De zestien bitripels der $\sigma_4\ (a\, b\, c)$ bepalen derhalve acht *complementaire* lijnen, welke elk vier complementaire punten dragen, en vormen met deze de $(16_3,\ 8_4)\, A$ van tabel (3), waarin elke regel en elke kolom de punten eener cf. lijn bevat, evenals zulks het geval is met het in tabel (2) voor het bitripel gebezigde teeken.

$$\left\{\begin{array}{cccc} 111 & 234 & 342 & 423 \\ 243 & 122 & 414 & 331 \\ 324 & 441 & 133 & 212 \\ 432 & 313 & 221 & 144 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Daar elk complementair punt behalve de beide complementaire lijnen eene lijn der $\sigma_4\ (a\, b\, c)$ en eene lijn der $\sigma_4\ (\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$ draagt, worden de beide geassocieerde σ_4 door het *bikwadrupel* van tabel (3) tot eene in H_4 beschreven cf. 40_4 vereenigd, waarvoor de lijnen der harmonische cf. vierpuntige diagonalen zijn.

Cf. 40_4.

		$a_1\, b_1\, c_1$	111			$\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$	111	
		$a_2\, b_3\, c_4$	234			$\alpha_2\, \beta_3\, \gamma_4$	234	
		$a_3\, b_4\, c_2$	342			$\alpha_3\, \beta_4\, \gamma_2$	342	
		$a_4\, b_2\, c_3$	423			$\alpha_4\, \beta_2\, \gamma_3$	423	
		$a_1\, b_2\, c_2$	122			$\delta_2\, \alpha_3\, \alpha_4$	122	
		$a_2\, b_4\, c_3$	243			$\alpha_2\, \beta_4\, \gamma_3$	243	
		$a_3\, b_3\, c_1$	331			$\delta_3\, \gamma_2\, \gamma_4$	331	
		$a_4\, b_1\, c_4$	414			$\delta_4\, \beta_2\, \beta_3$	414	
		$a_1\, b_3\, c_3$	133			$\delta_3\, \alpha_2\, \alpha_4$	133	. . . . . (4)
		$a_2\, b_1\, c_2$	212			$\delta_2\, \beta_3\, \beta_4$	212	
		$a_3\, b_2\, c_4$	324			$\alpha_3\, \beta_2\, \gamma_4$	324	
		$a_4\, b_4\, c_1$	441			$\delta_4\, \gamma_2\, \gamma_3$	441	
		$a_1\, b_4\, c_4$	144			$\delta_4\, \alpha_2\, \alpha_3$	144	
		$a_2\, b_2\, c_1$	221			$\delta_2\, \gamma_3\, \gamma_4$	221	
		$a_3\, b_1\, c_3$	313			$\delta_3\, \beta_2\, \beta_4$	313	
		$a_4\, b_3\, c_2$	432			$\alpha_4\, \beta_3\, \gamma_2$	432	
111	234	342	423		111	243	324	432
122	243	331	414		122	234	313	441
133	212	324	441		133	221	342	414
144	221	313	432		144	212	331	423.

3. *De punten en lijnen van twee geassocieerde cf.* σ_4 *vormen met de zestien snijpunten hunner geassocieerde lijnen en acht complementaire lijnen eene cf.* 40_4, *om welke eene kromme der vierde orde kan beschreven worden.*

Uit tabel (4) blijkt, dat vier onderling gescheiden lijnen der eene σ_4 geassocieerd zijn met vier onderling gescheiden lijnen der andere σ_4; daardoor wordt het mogelijk uit eene *hoofdvierzijde* der eene σ_4 en eene niet met haar geasso-

cieerde hoofdvierzijde der andere σ_4 door toevoeging van twee lijnen van het bikwadrupel (3) eene *hoofdtienzijde* der 40_4 samen te stellen. Zoo ontstaan de beide volgende hoofdtienzijden, welke geene lijn gemeen hebben, dus eene in de 40_4 begrepen (40_2, 20_4) vormen.

	$a_1\ b_1\ c_1$		111		$a_1\ b_3\ c_3$		133	
	$a_2\ b_3\ c_4$		234		$a_2\ b_1\ c_2$		212	
	$a_3\ b_4\ c_2$		342		$a_3\ b_2\ c_4$		324	
	$a_4\ b_2\ c_3$		423		$a_4\ b_4\ c_1$		441	
	$\delta_2\ \alpha_3\ \alpha_4$		122		$\delta_4\ \alpha_2\ \alpha_3$		144	
	$\alpha_2\ \beta_4\ \gamma_3$		243		$\delta_2\ \gamma_3\ \gamma_4$		221	. . . (5)
	$\delta_3\ \gamma_2\ \gamma_4$		331		$\delta_3\ \beta_2\ \beta_4$		313	
	$\delta_4\ \beta_2\ \beta_3$		414		$\alpha_4\ \beta_3\ \gamma_2$		432	
133	212	324	441	111	234	342	423	
144	221	313	432	122	243	331	414	

De (40_2, 20_4), welke na afscheiding dezer hoofdtienzijden overblijft, bezit geen hoofdtienzijden meer, is dus niet gelijksoortig met de afgezonderde (40_2, 20_4).

Elk bitripel der σ_4 ($a\ b\ c$) is met een bepaald bitripel der andere σ_4 verbonden tot eene (24_2, 12_4), welke behalve de 18 punten dier bitripels 6 complementaire punten bevat.

Voorbeeld:

$a_2\ b_3\ c_4$	234	$a_2\ b_4\ c_3$	243	$\alpha_2\ \beta_3\ \gamma_4$	234	$\alpha_2\ \beta_4\ \gamma_3$	243					
$a_3\ b_4\ c_2$	342	$a_3\ b_2\ c_4$	324	$\alpha_3\ \beta_4\ \gamma_2$	342	$\alpha_3\ \beta_2\ \gamma_4$	324	. . (6)				
$a_4\ b_2\ c_3$	423	$a_4\ b_3\ c_2$	432	$\alpha_4\ \beta_2\ \gamma_3$	423	$\alpha_4\ \beta_3\ \gamma_2$	432					

De cf. 40_4 bezit geen hoofdtienhoek (groep van tien onderling gescheiden punten), daar elk der 16 in de gescheiden punten $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ samenkomende lijnen der σ_4 ($a\ b\ c$) één punt van het complementaire bikwadrupel draagt, zoodat aan de punten $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2$ geen van hen gescheiden punt kan toegevoegd worden.

§ 2.

Van de snijpunten der H_4 met de vier gescheiden lijnen

$$\left.\begin{array}{l}(a_1,\ b_1,\ c_1,\ 111)\\ (\delta_4,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ 144)\\ (a_4,\ b_2,\ c_3,\ 423)\\ (\alpha_1,\ \gamma_2,\ \beta_3,\ 432)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

liggen de punten $b_1\,\alpha_2\,b_2\,\gamma_2$ en evenzoo $c_1\,\alpha_3\,c_3\,\beta_3$ op eene lijn der harmonische cf.; de overige acht kunnen derhalve door eene kegelsnede vereenigd worden. Deze K_2 bevat nu de toppen van den vierhoek 111, 423, 144, 432 en de beide puntenparen $a_1\,a_4$ en $\alpha_4\,\delta_4$, welke op twee geassocieerde lijnen der harmonische cf. liggen. Daar het complementaire bikwadrupel 36 vierhoeken bezit en de 9 geassocieerde lijnenparen der harmonische cf. tot 18 dubbelparen van punten aanleiding geven, bepaalt elk dubbelpaar twee kegelsneden der bedoelde soort. Inderdaad blijkt, dat de punten $a_1\ a_4\ \alpha_4\ \delta_4$ ook conconisch zijn met de punten 122, 414, 133, 441, welke even als 111, 423, 144, 432 een kwadrupel der conische involutie vormen, die corresiduaal is met de door $a_1\,a_4\,\alpha_4\,\delta_4$ bepaalde involutie *); uit tabel (3) toch ziet men terstond, dat de punten 234, 342, 221, 313 met elk der genoemde viertallen complementaire punten conconisch zijn.

4. *De punten der* 40_4 *vormen* 36 *conconische achttallen, welke elk uit* 4 *punten der harmonische cf. en* 4 *complementaire punten bestaan, zoodat elk punt der eerste soort zes, elk punt der tweede soort negen kegelsneden draagt.*

Blijkens tabel (3) snijdt de K_3-bundel met basis

$$\left\{\begin{array}{lll}122 & 414 & 331\\ 441 & 133 & 212\\ 313 & 221 & 144\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

*) Vgl. mijn opstel „Kwadrupelinvolutiés op bikwadratische krommen" (*Versl. en Med.*, Deel IV, blz. 307).

de kromme H_4 volgens eene involutie I_3 met centrum 111. Tot de groepen dezer I_3 behooren ook $a_1\, b_1\, c_1$ en $\delta_2\, \delta_3\, \delta_4$, m. a. w. elk dezer tripels kan met de 9 complementaire punten van (8) door eene K_3 verbonden worden. Er zijn dus 32 krommen K_3, die elk 3 punten der harmonische cf. en 9 punten van het complementaire bikwadrupel bevatten.

Uit het in 40_4 begrepen bikwadrupel

$$\left\{\begin{array}{llll} 111 & 234 & 342 & 423 \\ 243 & a_2 & b_4 & c_3 \\ 324 & c_4 & a_3 & b_2 \\ 432 & b_3 & c_2 & a_4 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (9)$$

volgt op dezelfde wijze, dat de punten van het bitripel

$$\left\{\begin{array}{lll} 243 & a_2 & b_4 \\ 324 & c_4 & a_3 \\ 432 & b_3 & c_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

concubisch zijn met de collineaire punten 331, 212, 144. Deze 12 punten liggen op twee gescheiden lijnen der σ_4 $(a\, b\, c)$ en twee gescheiden lijnen van het complementaire bikwadrupel; uit deze opmerking blijkt, dat er 96 krommen der derde orde zijn, welke elk 6 complementaire punten met 6 punten van eene der beide geassocieerde σ_4 vereenigen.

Het in (9) begrepen bitripel

$$\left\{\begin{array}{lll} 111 & 234 & 342 \\ 243 & a_2 & b_4 \\ 324 & c_4 & a_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

bepaalt eene I_3 met centrum a_4, waarvan de met a_4 op eene lijn der harmonische cf. gelegen punten $\alpha_1\, \beta_4\, \gamma_4$ eene groep vormen; deze zijn derhalve met de punten van (11) concubisch. Het vijftal complementaire punten dezer K_3 ligt nog op eene tweede gelijksoortige K_3, welke bovendien de

zeven punten $\alpha_2, \beta_4, \gamma_4, \alpha_3$; δ_4, a_2, a_3 draagt. Met het oog op de 144 vijftallen vindt men dus 288 krommen K_3, die elk 5 complementaire punten benevens 5 punten der eene en 2 punten der andere σ_4 bevatten.

Bitripel (10) levert verder eene K_3, welke behalve deze negen punten nog $\alpha_4\, \beta_2\, \gamma_3$ draagt, d. w. z. de punten der lijn, welke geassocieerd is met de van $a_2\, b_3\, c_4$ en $a_3\, b_4\, c_2$ gescheiden lijn $a_4\, b_2\, c_3$. Elk der 32 collineaire drietallen van complementaire punten bepaalt blijkbaar drie K_3 met zes punten van $\sigma_4\,(a\, b\, c)$ en drie K_3 met zes punten van $\sigma_4\,(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$, zoodat er in het geheel 192 krommen zijn, welke drie complementaire punten met zes punten der eene en drie punten der andere σ_4 verbinden.

Met behulp van drie lijnen der harmonische cf. kan het niet tot 40_4 behoorende bikwadrupel (12) gevormd worden.

$$\left\{\begin{array}{llll} 111 & 234 & 342 & 423 \\ a_1 & a_2 & \gamma_2 & \beta_2 \\ b_1 & b_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \\ c_1 & c_4 & \beta_4 & \alpha_4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

De beschouwing der I_3 met centrum α_4, welke ook door een K_3-bundel met basis

$$\left\{\begin{array}{lll} 111 & 234 & 342 \\ a_1 & a_2 & \gamma_2 \\ b_1 & b_3 & \alpha_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

op H_4 wordt ingesneden, en de groep α_2, δ_3, 133 bevat, levert eene nieuwe reeks van K_3, met vier complementaire punten en vier punten van elke der beide geassocieerde σ_4. Daar het viertal punten 111, 234, 342, 423 nog tot het volgende, met (12) gelijksoortige, bikwadrupel

$$\left\{\begin{array}{llll} 111 & 234 & 342 & 423 \\ \delta_2 & \alpha_2 & a_3 & a_4 \\ \delta_3 & \beta_3 & b_4 & b_2 \\ \delta_4 & \gamma_4 & c_2 & c_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

aanleiding geeft, en men in (12) en (14) elk punt der harmonische cf. als centrum eener I_3 kan beschouwen, waarvan dan slechts eene groep tot eene K_3 der bedoelde soort leidt, vindt men voor het aantal dier krommen $8 \times 2 \times 12 = 192$.

In de volgende tabel worden alle boven gevonden cubische krommen opgesomd, welke twaalf punten der cf. 40_4 *bevatten, benevens de krommen* K_3, *die om de beide geassocieerde* σ_4 *en om hunne corresiduale cf. kunnen beschreven worden.*

Aantal K_3.	Punten der geassoc. σ_4.	Complementaire punten.	Aantal K_3 door een punt der $(24_2, 18_4)$.	der $(16_2, 8_4)$.	
2	12	—	1	—	
32	9 + 3	—	16	—	
32	3	9	4	18	
96	6	6	24	36	. . (15)
288	5 + 2	5	84	90	
192	4 + 4	4	64	48	
192	6 + 3	3	72	36	

§ 3.

Elke lijn der σ_4 is gescheiden van de lijnen van het bitripel, dat hare restfiguur vormt, behoort dus tot twee hoofdvierzijden; de cf. bezit derhalve acht zoodanige viertallen van onderling gescheiden lijnen. Worden deze acht groepen door 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 voorgesteld, dan kan elke cf. lijn, als behoorende tot twee dier groepen, aangewezen worden door de samenvoeging der beide cijfers, welke die twee groepen aanduiden. Zoodoende komt men tot de volgende tabel voor de lijnen der σ_4, waarin elke regel en elke kolom eene hoofdvierzijde bevat.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
15 & a_1\,b_1\,c_1 & 16 & a_2\,b_3\,c_4 & 17 & a_3\,b_4\,c_2 & 18 & a_4\,b_2\,c_3 \\
25 & a_2\,b_4\,c_3 & 26 & a_1\,b_2\,c_2 & 27 & a_4\,b_1\,c_4 & 28 & a_3\,b_3\,c_1 \\
35 & a_3\,b_2\,c_4 & 36 & a_4\,b_4\,c_1 & 37 & a_1\,b_3\,c_3 & 38 & a_2\,b_1\,c_2 \\
45 & a_4\,b_3\,c_2 & 46 & a_3\,b_1\,c_3 & 47 & a_2\,b_2\,c_1 & 48 & a_1\,b_4\,c_4
\end{array} \quad \ldots (16)$$

Wordt het snijpunt der lijnen $i\,k$ en $i\,l$ door $i\,k\,l$ aangewezen, dan vormen de hoofdvierzijden 1 en 2 de volgende $(16_2,\ 8_4)\,A$:

$$\left\{\begin{array}{cccc}
a_1 & b_1 & c_1 & 125 \\
b_2 & a_4 & 128 & c_3 \\
c_2 & 127 & a_3 & b_4 \\
126 & c_4 & b_3 & a_2
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (17)$$

Daar de punten der σ_4 door eene K_3 worden verbonden, liggen de overige vier punten van (17) in eene rechte, die door het teeken 12 kan voorgesteld worden. Op dezelfde wijze vindt men nog elf nieuwe lijnen 13, 14, 23, 24, 34 en 56, 57, 58, 67, 68, 78, die elk vier snijpunten van gescheiden lijnenparen dragen.

5. *De* 48 *nevenpunten der* σ_4 *liggen in viertallen op* 12 *rechten.*

Daar de driezijde (15, 16, 17) ten opzichte van de bovengevonden lijn 12 perspectief ligt met de driezijde (25, 26, 27), zullen de lijnen (156, 256), (157, 257) en (167, 267), welke de homologe toppen vereenigen, door een punt gaan, dat door het teeken 567 worde aangewezen. Behalve tot dit nieuwe punt komt men tot de zeven punten 568, 578, 678; 123, 124, 134, 234 door de beschouwing der overige uit lijnen van σ_4 samengestelde driezijden, voor zoover zij paarsgewijze perspectief liggen ten opzichte van de 12 nieuwe lijnen. In de figuur heeft men nu 56 punten $i\,k\,l$ ($i = 1$ tot 8, $k = 2$ tot 8, $l = 3$ tot 8) en 28 lijnen $i\,k$ ($i = 1$ tot 8, $k = 2$ tot 8), welke zoodanig tot eene cf. zijn vereenigd, dat het punt $i\,k\,l$ de drie lijnen $i\,k$, $i\,l$, $k\,l$ draagt. Deze $(56_3,\ 28_6)$ is de reciproke figuur der vlakke polyedrale cf.

π_5 (*Versl. en Med.*, Deel VI, blz. 8). Alle cf., welke als de polyedrale en de in mijn opstel »Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties" (*Versl. en Med.*, Deel VI, blz. 45) beschouwde, door de combinaties der k^{de} en $(k+1)^{ste}$ klasse van n getallen kunnen aangewezen worden, vat ik (in het voetspoor van SCHUBERT) samen door de benaming *combinatorische* configuraties.

6. *De* 16 *lijnen en* 48 *nevenpunten der* σ_4 *vormen met* 12 *nieuwe lijnen en* 8 *nieuwe punten eene combinatorische* $(56_3, 28_6)$.

In het algemeen wordt eene combinatorische $(56_3, 28_6)$ bepaald door eene constellatie *) van 10 onafhankelijke punten (geen drie op eene rechte), b.v. door de constellatie:

123, 124, 145, 158, 178, 167, 136, 233, 345, 367.

Deze punten toch bepalen door hunne verbindingslijnen de toppen van 5 op den driestraal 12, 13, 23 rustende driehoeken, waaruit †) de cf. kan geconstrueerd worden. De boven gevonden $(56_3, 28_6)$ is daarentegen met de σ_4 gegeven, welke op haar beurt bepaald is door eene constellatie van zes punten, waarvan er drie collineair liggen §); deze $(56_3, 28_6)$ is dus eene bijzondere cf.

In het zooeven aangehaalde opstel heb ik aangetoond, dat de lijnen van het bitripel 16, 17, 18; 25, 35, 45 eene kegelsnede aanraken (l. c. blz. 89); daaruit volgt, dat de toppen 167, 178, 168 der eerste driezijde met de toppen 235, 245, 345 der tweede driezijde door eene K_2 kunnen verbonden worden. Derhalve:

7. *De* 48 *nevenpunten der* σ_4 *vormen* 16 *conische sextupels.*

Uit het bikwadrupel (17) kan door toevoeging van twee viertallen collineaire complementaire punten en de beide lij-

---

*) d. w. z. eene groep van punten, welke de cf. bepalen, en wier aantal een minimum is.

†) Verg. het laatst aangehaalde opstel, blz. 53.

§) Zie mijn opstel »Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen" (*Versl. en Med.*, Deel VII, blz. 79).

nen, welke hen dragen, het volgende bikwintupel $(25_2, 10_5)$ worden afgeleid.

$$\left\{\begin{array}{lllll} 111 & a_1 & b_1 & c_1 & 125 \\ 423 & b_2 & a_4 & 128 & c_3 \\ 342 & c_2 & 127 & a_3 & b_4 \\ 234 & 126 & c_4 & b_3 & a_2 \\ x & 122 & 414 & 331 & 243 \end{array}\right\} \ldots\ldots (18)$$

Van de 25 basispunten van den door (18) aangewezen krommenbundel der vijfde orde liggen er 20 op H_4; de overige vijf d. z. 125, 126, 127, 128 en x, kunnen derhalve door eene rechte vereenigd worden.

Deze eigenschap kan met eigenschap 6. in nauw verband gebracht worden door de invoering van eene nieuwe notatie voor de complementaire punten en lijnen. De punten 111, 423, 342, 234, welke achtereenvolgens op de lijnen 15, 18, 17, 16 liggen, zullen n.l. door 159, 189, 179, 169 worden aangeduid, terwijl de door hen gedragen lijn het teeken 19 verkrijgt; de punten 122, 414, 331, 243 en hunne verbindingslijn zullen door de teekens 269, 279, 289, 259 en 29 worden aangewezen; het punt x kan dan, als snijpunt van 19, 29 en 12, door 129 worden voorgesteld. Wordt deze handelwijze ook toegepast op de bikwintupels, welke uit de overige elf met (17) gelijksoortige bikwadrupels ontstaan, dan wordt het bikwadrupel (3) der complementaire punten in de nieuwe notatie voorgesteld door

$$\left\{\begin{array}{llll} 159 & 169 & 179 & 189 \\ 259 & 269 & 279 & 289 \\ 359 & 369 & 379 & 389 \\ 459 & 469 & 479 & 489 \end{array}\right\} \ldots\ldots (19)$$

Worden nu de 16 punten en 8 lijnen van (19) benevens de 12 overige snijpunten dezer 8 lijnen, welke elk op eene nevenpuntenlijn der σ_4 bleken te liggen, aan de boven ge-

vonden (56_3, 28_6) toegevoegd, dan ontstaat eene combinatorische (84_3, 36_7), waarvan de punten en lijnen door de combinaties 3 aan 3 resp. 2 aan 2 der getallen van 1 tot 9 worden aangewezen.

8. *Van elke σ_4 vormen de* 48 *nevenpunten en de* 16 *complementaire punten met de* 16 *cf. lijnen, de* 12 *nevenpuntenlijnen, de* 8 *complementaire lijnen benevens de* 8 *drievoudige snijpunten der nevenpuntenlijnen en de* 12 *overige snijpunten der complementaire lijnen eene combinatorische* (84_3, 36_7).

Door $(i\,k)$ worde die lijn van σ_4 $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ aangeduid, welke met de lijn $i\,k$ der σ_4 $(a\,b\,c)$ geassocieerd is, haar dus in in een complementair punt snijdt.

Uit de hoofdvierzijden (15, 16, 17, 18) en (25, 26, 27, 28) van σ_4 $(a\,b\,c)$ en de hoofdvierzijden ((15), (16), (17), (18)) en ((25), (26), (27), (28)) der σ_4 $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ kan de (64_2, 16_8) van tabel (20) gevormd worden.

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
a_1 & b_1 & c_1 & 125 & 159 & 15(16) & 15(17) & 15(18) \\
b_2 & a_4 & 128 & c_3 & 18(15) & 18(16) & 18(17) & 189 \\
c_2 & 127 & a_3 & b_4 & 17(15) & 17(16) & 179 & 17(18) \\
269 & 27(26) & 28(26) & 25(26) & \delta_2 & (126) & \alpha_3 & \alpha_4 \\
26(28) & 27(28) & 289 & 25(28) & \delta_3 & \gamma_4 & \gamma_2 & (128) \\
26(27) & 279 & 28(27) & 25(27) & \delta_4 & \beta_3 & (127) & \beta_2 \\
26(25) & 27(25) & 28(25) & 259 & (125) & \alpha_2 & \beta_4 & \gamma_3 \\
126 & c_4 & b_3 & a_2 & 16(15) & 169 & 16(17) & 16(18)
\end{array}\right\} \ldots (20)$$

Van de 64 punten dezer cf., welke blijkbaar de basis van een K_8-bundel vormen, liggen de 24 punten der beide σ_4 benevens de 8 complementaire punten op H_4: de overige 32 punten, n.l. de nevenpunten 125, 126, 127, 128 der σ_4 $(a\,b\,c)$, de nevenpunten (125), (126), (127), (128) der $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ en de 24 snijpunten van lijnen der eene σ_4 met lijnen der andere σ_4, kunnen derhalve door eene bikwadratische kromme S_4 vereenigd worden. De 24 laatstgenoemde punten worden op elke in (20) begrepen lijn van σ_4 $(a\,b\,c)$ bepaald door de geassocieerden der lijnen, welke haar tot eene hoofdvierzijde aanvullen; daar elke lijn eener σ_4 tot

twee hoofdvierzijden behoort, komen van hare doorsneden met de 16 lijnen der geassocieerde cf. hier dus slechts 6 in aanmerking; voor de lijn 15 b.v. de snijpunten met (16), (17), (18); (25), (35), (45). De 12 nieuwe krommen S_4 dragen dus elk 24 van de 96 in aanmerking komende snijpunten.

9. *De* 96 *punten, welke men verkrijgt, als men elke lijn der* σ_4 *tot doorsnijding brengt met de geassocieerden der lijnen van hare restfiguur, vormen met* 12 *bikwadratische krommen eene cf.* (96_3, 12_{24}).

De 18 lijnen der harmonische cf. geven aanleiding tot 6 hoofdzeszijden. Wordt de lijn $a_i a_k$ door A_{ik}, de lijn $b_i b_k$ door B_{ik} en de lijn $c_i c_k$ door C_{ik} aangeduid, dan bevat de volgende tabel in hare 6 kolommen de bedoelde hoofdzeszijden; hierbij valt op te merken, dat de eerste drie geen lijn gemeen hebben, en hetzelfde voor het tweede drietal geldt.

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\
A_{34} & A_{24} & A_{23} & A_{34} & A_{24} & A_{23} \\
B_{13} & B_{14} & B_{12} & B_{14} & B_{12} & B_{13} \\
B_{24} & B_{23} & B_{34} & B_{23} & B_{34} & B_{24} \\
C_{14} & C_{12} & C_{13} & C_{13} & C_{14} & C_{12} \\
C_{23} & C_{34} & C_{24} & C_{24} & C_{23} & C_{34}
\end{array}\right| \quad \ldots (21)$$

Uit elk der 6 paren van hoofdzeszijden kan eene, met de volgende gelijksoortige, (36_2, 12_6) samengesteld worden.

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & \beta_2 & \gamma_2 & A_{12}B_{23} & A_{12}B_{14} \\
a_3 & a_4 & \alpha_2 & \delta_2 & A_{34}B_{23} & A_{34}B_{14} \\
\beta_3 & \delta_3 & B_{24}C_{12} & B_{24}C_{34} & b_2 & b_4 \\
\gamma_3 & \alpha_3 & B_{13}C_{12} & B_{13}C_{34} & b_3 & b_1 \\
A_{13}C_{14} & A_{24}C_{14} & c_1 & c_4 & \beta_4 & \alpha_4 \\
A_{13}C_{23} & A_{24}C_{23} & c_2 & c_3 & \delta_4 & \gamma_4
\end{array}\right\} \quad \ldots (22)$$

Daar 24 punten dezer cf. door de kromme H_4 vereenigd zijn, liggen de overige 12 in eene kegelsnede. Met het oog op de eigenschap, dat de snijpunten van geassocieerde lijnen der $(24_3, 18_4)$ eene $(9_2, 6_3)\,A$ vormen, welke op de beide omgeschreven K_3 der beide σ_4 ligt (verg. het eerst aangehaalde opstel, blz. 112), heeft men:

10. *De* 72 *nevenpunten der harmonische* $(24_3, 18_4)$, *welke geen snijpunten van de cubische krommen zijn, die om de beide geassocieerde cf.* σ_4 *kunnen beschreven worden, liggen in twaalftallen op zes kegelsneden.*

Kampen, November 1889.

OVER DE INWERKING

VAN

ONDERBROMIGZUUR KALIUM OP SUCCINPHENYLAMIDE.

DOOR

S. HOOGEWERFF EN W. A. VAN DORP.

INLEIDING.

Wij hebben reeds vroeger *) er op gewezen, dat halogeenatomen, hydroxyl- en nitrosogroepen, met stikstof verbonden, eene groote mate van beweeglijkheid bezitten. Bij verbindingen, in welke deze groepeering voorhanden is, vindt dikwerf gemakkelijk eene intramoleculaire atoomverschuiving plaats, door welke het negatieve bestanddeel door een meer positief vervangen wordt.

Wanneer Cl, HO of NO door de letter X voorgesteld wordt, dan vindt, gelijk wij aantoonden, dikwijls een overgang plaats van

$$\begin{array}{l} -\mathrm{N}-\mathrm{X} \\ \quad | \\ =\mathrm{C}-(\mathrm{C}_m\mathrm{H}_{n+1}) \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{l} -\mathrm{N}-\mathrm{H} \\ \quad | \\ =\mathrm{C}-(\mathrm{C}_m\mathrm{H}_n\mathrm{X}) \end{array}$$

of van

$$\begin{array}{l} -\mathrm{N}-\mathrm{X} \\ \quad | \\ =\mathrm{C}-(\mathrm{C}_m\mathrm{H}_{n+1}) \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{l} -\mathrm{N}-(\mathrm{C}_m\mathrm{H}_{n+1}) \\ \quad | \\ =\mathrm{C}-\mathrm{X} \end{array}$$

*) *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas.* VIII. p. 173.

Laatstgenoemde omzetting hebben wij ook als eerste phase der reactie aangenomen, welke de broomamiden van eenbasische organische zuren in alkalische oplossing ondergaan *).

Wij waren van oordeel, dat het van belang kon zijn ook de broomamiden van meerbasische zuren te bereiden en aan de inwerking van alkaliën te onderwerpen; wij koesterden de hoop zoodoende nieuwe omzettingen te leeren kennen, aan welke onze opvatting getoetst zou kunnen worden. De gemakkelijke bereidingswijze der amiden van het barnsteenzuur heeft ons er toe geleid het eerst de broomamiden van dat zuur te onderzoeken; daar voorts eenige voorloopige proeven met succinamide ons deden vermoeden, dat het niet gemakkelijk zou vallen de reactie in dit geval in hare verschillende phasen te vervolgen, hebben wij het kaliumhypobromiet op het succinphenylamide $C_4H_4O_2 < \begin{matrix} NH_2 \\ NH.C_6H_5 \end{matrix}$ doen inwerken. Wij deelen in deze verhandeling de resultaten van ons onderzoek mede, die, naar wij meenen, geheel in overeenstemming zijn met onze theorie.

Alvorens echter onze proeven te beschrijven, achten wij het gewenscht een kort overzicht te geven der daarbij verkregen resultaten.

Succinphenylamide lost in eene alkalische oplossing van onderbromigzuur kalium op, wanneer men het zout en het amide in verhouding hunner moleculairgewichten op elkander laat inwerken. Door toevoeging van azijnzuur bij de vloeistof wordt een broomhoudend lichaam geprecipiteerd. Het is ons niet gelukt dit te zuiveren; zijne eigenschappen en omzettingen stellen echter buiten twijfel, dat het een broomamide is, aan hetwelk de formule:

$$\begin{matrix} CH_2-CO-NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2-CO-NHBr \end{matrix}$$

moet toegeschreven worden, wanneer men, gelijk zulks gewoonlijk geschiedt, het succinphenylamide als

*) l. c.

$$\begin{array}{l} CH_2-CO-NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2-CO-NH_2 \end{array}$$

opvat.

Dat in het broomamide het broom met het stikstofatoom van de amidogroep en niet met dat van de phenylamidogroep is verbonden, is daaruit af te leiden, dat onderbromigzuur kalium op succinanilide $C_4H_4O_2 < \begin{matrix} NH.C_6H_5 \\ NH.C_6H_5 \end{matrix}$, in hetwelk zich twee phenylamidogroepen bevinden, bijna niet inwerkt. Ook de oplosbaarheid van het broomamide in kaliloog pleit voor het voorhanden zijn der atoomgroepeering $-NHBr$.

Het succinphenylbroomamide ondergaat in alkalische oplossing eene zeer merkwaardige verandering. Het wordt, wanneer men de vloeistof eenigen tijd zacht verwarmt, in een broomvrij zuur omgezet, dat de empirische formule $C_{10}H_{12}N_2O_3$ heeft; bij deze reactie wordt het broomatoom door de hydroxylgroep vervangen. Hierbij heeft echter niet alleen substitutie plaats, maar bij de vorming van het zuur ondergaat het molecuul diep ingrijpende veranderingen.

Bij de onderzoeking van het uit het broomamide bereide zuur vonden wij o. a. het volgende, dat voor de bepaling zijner samenstelling van gewicht is. Wanneer men zoutzuurgas door zijne alcoholische oplossing leidt of zwavelzuur bij deze voegt, wordt een ester gevormd; deze wordt gemakkelijk door alkaliën ontleed. Hieruit kan met groote waarschijnlijkheid afgeleid worden, dat het zuur eene carboxylgroep bevat *). Bij verhitting met acetylchloride treedt een molecuul water uit het zuur; het lichaam, dat ontstaat,

*) Terwijl men vroeger van meening was, dat door de vorming van een ester bij oplossing van een lichaam, dat zure eigenschappen toont, in met zoutzuur verzadigden alcohol, het voorhanden zijn eener carboxylgroep in dat lichaam met zekerheid aangetoond wordt, zijn in den laatsten tijd eenige gevallen bekend geworden, in welke uit phenolen op die wijze aethers zijn verkregen (verg. *Ber. d. Deutschen Chem. Ges.* 21, p. 1900). De gemakkelijkheid, waarmede de ester, waarvan in den tekst sprake is, door kali ontleed wordt, bewijst echter, dat hier van geen phenolaether sprake kan zijn.

is zonder ontleding in water oplosbaar, ook verdunde zuren ontleden het niet, door alkaliën wordt echter weder het zuur gevormd, waarvan men is uitgegaan. Smelt men dit laatste voorzichtig met kalihydraat, zoo wordt eerst aniline en bij sterkere verwarming ammoniak vrij. Men kan uit de alkalische massa, wanneer men met verhitten ophoudt eer de ammoniakontwikkeling begint, na toevoeging van eene overmaat van zoutzuur, β amidopropionznur afscheiden. Wij hebben dit als het platinadubbelzout van den zoutzuren aethylester geïsoleerd en vergeleken met het overeenkomstige zout uit een β amidopropionzuur, dat door inwerking van ammoniak op β joodpropionzuur was verkregen.

Terwijl dus door de inwerking van kali op succinphenylbroomamide in de eerste plaats een zuur ontstaat, dat de formule $C_{10}H_{12}N_2O_3$ heeft, wordt bij grootere concentratie van het alkali dit zuur weder ontleed; onder de ontledingsproducten werd β amidopropionzuur gevonden. Uit het broomamide zou, wanneer men van de straks gegeven formule voor dit lichaam uitgaat, het laatstgenoemde zuur kunnen ontstaan volgens de vergelijkingen

$$\text{I}^a.\ \begin{array}{l} CH_2\text{-}CO\text{-}NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2\text{-}CO\text{-}NHBr \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CH_2\text{-}CO\text{-}NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2\text{-}NH_2 \end{array} + CO_2 + HBr$$

$$\text{I}^b.\ \begin{array}{l} CH_2\text{-}CO\text{-}NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2\text{-}NH_2 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CH_2COOH \\ | \\ CH_2\text{-}NH_2 \end{array} + C_6H_5.NH_2.$$

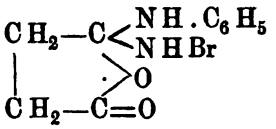
In de reactie, welke door de eerste dezer beide vergelijkingen wordt wedergegeven, ontstaat β amidopropionzuuranilide. De vorming van dit product zou dan op dezelfde wijze plaats hebben als die van aminen uit de broomamiden van eenbasische zuren. De eenvoudigste wijze, waarop deze door A. W. Hofmann *) gevonden omzetting kan worden uitgedrukt, is

$$\text{II.}\ C_nH_n.CO.NHBr + H_2O = C_nH_n.NH_2 + CO_2 + HBr.$$

*) *Ber. d. Deutschen Chem. Ges.* 15, p. 762.

Het eenige verschil tusschen de reacties I^a en II zou dan hierin gelegen zijn, dat bij I^a de vorming van het eindproduct niet zoo gemakkelijk plaats heeft als bij II, waardoor het mogelijk werd het zuur, dat de formule $C_{10}H_{12}N_2O_3$ heeft, te isoleeren.

Wanneer het β amidopropionzuur volgens bovenstaande vergelijkingen ontstaat, is het echter niet wel mogelijk voor het zuur, dat als tusschenproduct optreedt, eene structuurformule af te leiden, welke met zijne eigenschappen in overeenstemming is. Men komt daarentegen tot eene formule voor het tusschenproduct, welke deze eigenschappen in allen deele verklaart, wanneer men aan het succinphenylamide de onsymmetrische formule toekent, *) en verder in het molecuul van het broomamide



in de alkalische oplossing eene atoomverschuiving aanneemt, overeenkomende met die, welke volgens onze opvatting bij de inwerking van alkaliën op de broomamiden van eenbasische zuren plaats vindt. Voegen wij hier dadelijk bij, dat de op deze wijze afgeleide formule door de synthese van het zuur bevestigd wordt.

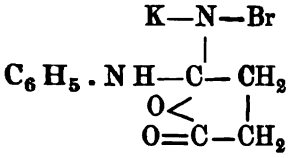
Wij hebben aangenomen †), dat bij de ontleding, welke de broomamiden der eenbasische zuren in alkalische oplossing ondergaan, als eerste phase der reactie uit

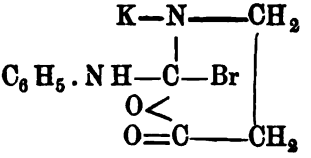
ontstaat. Op analoge wijze moet uit het kaliumzout van het succinphenylbroomamide

---

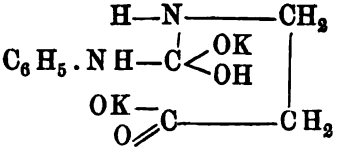
*) Het onsymmetrische succinamide is bereid. AUGER, *Bulletin de la Soc. Chim.*, 49, p. 345.

†) Zie p. 193.

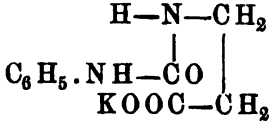




gevormd worden. De veranderingen, welke deze laatste verbinding in de alkalische vloeistof zal ondergaan, zijn gemakkelijk te voorzien. Het atoom broom wordt door de groep OK vervangen en het met stikstof verbonden atoom kalium door waterstof; eindelijk wordt nog een molecuul kaliumhydroxyde opgenomen, waardoor de verbinding tusschen twee koolstofatomen, welke door een zuurstofatoom plaats vond, verbroken wordt. Het zout, dat ontstaat,



verliest een molecuul kaliumhydroxyde, onder vorming van



of anders geschreven

$$CO<\begin{matrix}NH.C_6H_5\\NH-CH_2-CH_2-COOK,\end{matrix}$$

het kaliumzout van het *a. b.* phenyl-β-ureïdopropionzuur *) (phenyl-β-lactuurzuur).

Wij wenschen er nog ter loops op te wijzen, dat in dit geval de atoomverschuiving, welke onze theorie aanneemt,

---

*) De Heer FRANCHIMONT heeft in eene der secties van het internationale chemische congres, dat onlangs te Parijs is gehouden, voorgesteld om de stikstofatomen van het ureum door de letters *a* en *b* te onderscheiden. Wij volgen deze nomenclatuur, door welke de structuur van lichamen als het in den tekst besprokene duidelijk bepaald wordt.

noodzakelijk intramoleculair moet zijn; bij de broomamiden der eenbasische zuren zou men des noods kunnen aannemen, dat zij intermoleculair is.

De straks medegedeelde eigenschappen van het als phenylureïdopropionzuur opgevatte zuur zijn zoodanige, als men van eene verbinding van die structuur kan verwachten. De vorming van β-amidopropionzuur bij smelting met kalihydraat vindt op de volgende wijze plaats; onder afscheiding van aniline ontstaat in de eerste plaats het zout

$$CO<\begin{matrix}OK\\NH-CH_2-CH_2-COOK\end{matrix};$$

bij toevoeging van zoutzuur wordt het zuur

$$CO<\begin{matrix}OH\\NH-CH_2-CH_2-COOH\end{matrix}$$

vrijgemaakt, dat als gesubstitueerd carbaminzuur niet bestendig is en zich ontleedt in koolzuur en β-amidopropionzuur. Volgens deze opvatting is dus het laatstgenoemde lichaam niet het directe product der inwerking van kalihydraat op het zuur, dat uit succinphenylbroomamide werd bereid, maar ontstaat eerst zoodra de vloeistof eene zure reactie aanneemt. De verbinding, die uit phenylureïdopropionzuur bij inwerking van acetylchloride wordt verkregen, is het ureïd van dat zuur $CO<\begin{matrix}N(C_6H_5)-CO\\NH\text{———}CH_2\end{matrix}>CH_2$, dat zeer gemakkelijk bij tegenwoordigheid van kali weder een molecuul water opneemt en het ureïdozuur vormt.

Wij hebben getracht door synthese de juistheid onzer stelling te bewijzen, dat het uit succinphenylbroomamide bereide zuur phenylureïdopropionzuur is. Wij meenden, dat dit zuur waarschijnlijk door verhitting van een mengsel van phenylureum en β-amidopropionzuur zou kunnen bereid worden, dat deze beide stoffen in verhouding hunner moleculairgewichten bevat. Het kwam ons waarschijnlijk voor, dat eene reactie plaats zou grijpen, welke door de vergelijking

$$C_6H_5.NH-CO-NH_2 + NH_2-CH_2-CH_2-COOH = NH_3 + C_6H_5.NH-CO-NH-CH_2-CH_2-COOH$$

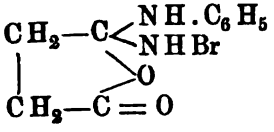
kan wedergegeven worden, gelijk hydantoïnzuur ontstaat, wanneer men ureum en glycocol verhit:

$$NH_2-CO-NH_2 + NH_2-CH_2-COOH = NH_3 + NH_2-CO-NH-CH_2-COOH.$$

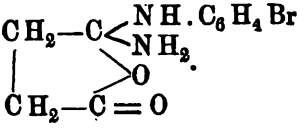
Inderdaad wordt bij verhitting van phenylureum en β-amidopropionzuur nevens andere stoffen een zuur gevormd, welks samenstelling beantwoordt aan de formule $C_{10}H_{12}N_2O_3$, terwijl ook zijne eigenschappen in allen deele met die van het uit succinphenylamide bereide zuur overeenstemmen.

Terwijl dus het succinphenylbroomamide in alkalische oplossing overgaat in phenylureïdopropionzuur, wordt het bij verhitting met alcohol omgezet in succinparabroomphenylamide. Dit lichaam ontstaat ook, wanneer men het broomamide korten tijd bij ongeveer 200° verhit.

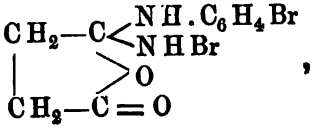
De moleculaire atoomverschuiving, die hierbij plaats vindt, behoort tot de op blz. 192 besprokene gevallen, bij welke een atoom broom en een atoom waterstof van plaats verwisselen;



wordt



Eene alkalische oplossing van onderbromigzuur kalium lost het succinparabroomphenylamide op; door toevoeging van azijnzuur wordt eene verbinding geprecipiteerd, die de reacties der broomamiden toont. Zij is ongetwijfeld het succinparabroomphenylbroomamide



dat wij evenmin als het succinphenylbroomamide, waarvan straks sprake was, hebben kunnen zuiveren. Terwijl dit laatste in alkalische oplossing overgaat in *a. b.* phenyl-β-ureïdopropionzuur, wordt het nieuwe broomamide onder hetzelfde omstandigheden omgezet in het *a. b.* parabroomphenyl-β-ureïdopropionzuur $CO<\begin{matrix}NH.C_6H_4Br\\NH-CH_2-CH_2-COOH\end{matrix}$.

Wij hebben dit niet zoo uitvoerig onderzocht als het niet gebroomde zuur, daar het niet te verwachten was, dat het onderzoek nieuwe gezichtspunten zou opleveren en de bereiding bovendien met eenige moeilijkheden verbonden is.

Door kaliumhypobromiet worden het phenylureïdopropionzuur en zijn broomderivaat in zuren omgezet, welke meer dan een atoom broom bevatten; wij konden een dien een tribroomphenylureïdoprodionzuur isoleeren.

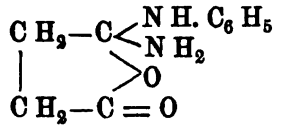
In het bibroomphenylureïdopropionzuur bevinden zich de beide broomatomen in den phenylkern in de ortho- en paraplaats ten opzichte van het stikstofatoom. Bij distillatie van het zuur met kalihydraat wordt namelijk *o. p.* bibroomaniline gevormd.

Van de gebroomde phenylureïdopropionzuren kan dat, hetwelk drie atomen broom bevat, het gemakkelijkst bereid worden. Wanneer men het met kalihydraat verhit distilleert het tribroomaniline, welks drie broomatomen symmetrisch in den phenylkern verdeeld zijn, zoodat ook omtrent de constitutie van dit zuur geen twijfel bestaan kan.

Wij verdeelen deze verhandeling in drie hoofdstukken. In het eerste worden de bereiding en de eigenschappen van succinphenylbroomamide, van succinparabroomphenylamide en van succinparabroomphenylamidozuur medegedeeld; het tweede behandelt het phenylureïdopropionzuur en zijne derivaten, terwijl in het derde hoofdstuk de gebroomde phenylureïdopropionzuren beschreven worden.

I. SUCCINPHENYLBROOMAMIDE, SUCCINPARABROOMPHENYLAMIDE EN SUCCINPARABROOMPHENYLAMIDOZUUR.

Wij hebben ons het succinphenylamide *)



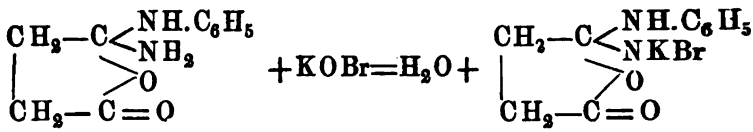
dat wij voor onze onderzoekingen noodig hadden, op de door MENSCHUTKIN †) aangegevene wijze verschaft. Door distillatie van barnsteenzuur met aniline werd succinphenylimide bereid; dit werd met eene sterke alcoholische oplossing van ammoniak in toegesmolten dikwandige glazen kolven ongeveer 12 uren lang in het waterbad verhit. Het imide zet zich daarbij om in succinphenylamide, dat na filtratie en uitwasschen met water gedroogd en in dien toestand voor de verdere proeven gebezigd werd.

Eene waterige, vrij alkali bevattende oplossing van onderbromigzuur kalium (1 mol.) lost fijn gepoederd succinphenylamide (1 mol.) bij gewone temperatuur gemakkelijk op. Eene overmaat van azijnzuur slaat uit deze alkalische oplossing een wit precipitaat neder, dat uit kleine naaldjes bestaat. Het verdient de voorkeur met niet te geconcentreerde vloeistoffen te werken; men lost 15 gr. succinphenylamide op in eene loog, welke op 300 gr. water 18 gr. kalihydraat en 12 gr. broom bevat, verdunt met 600 gr. water, precipiteert met azijnzuur, filtreert en wascht het neerslag goed met water uit. Het is ons niet gelukt dit lichaam in zuiveren toestand te bereiden, daar wij geen oplossingsmiddel konden vinden, waaruit het zich onveranderd weder afzet. Zijne eigenschappen en omzettingen doen echter zien, dat het succinphenylbroomamide is. Het onderbromigzure zout werkt op het succinphenylamide op

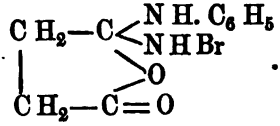
*) Zie p. 5.

†) *Ann. der Chemie u. Pharm.* 162 p. 182.

dezelfde wijze in als op de amiden van eenbasische zuren *); volgens de vergelijking



wordt in de alkalische vloeistof het kaliumzout van het broomamide gevormd, dat door azijnzuur ontleed wordt onder afscheiding van het succinphenylbroomamide



In ruwen toestand bevat dit ongeveer de door de theorie gevorderde hoeveelheid broom; wij vonden 30,3 en 33,5 pCt., terwijl de formule 29,5 pCt. verlangt.

De broomamiden lossen in alkaliën op; wanneer men joodkalium en eene overmaat van zoutzuur bij deze vloeistof voegt, vindt eene afscheiding van jood plaats †). Ook het broomamide, waarvan hier sprake is, wordt door kali opgelost (de veranderingen, welke deze vloeistof kan ondergaan, worden in het tweede hoofdstuk beschreven) en ontleedt joodwaterstof onder afscheiding van jood. Door phenol wordt zijne alkalische oplossing eveneens gereduceerd; na eenigen tijd kristalliseert succinphenylamide uit, terwijl gebroomde derivaten van het phenol in oplossing blijven.

Er is reeds met een enkel woord op gewezen, dat wij geene vloeistof konden vinden, in welke het succinphenylbroomamide onveranderd oplost; steeds vindt daarbij omzetting plaats in succinparabroomphenylamide. Deze reactie bestaat in eene atoomverschuiving, waarbij een broom- en een waterstofatoom van plaats verwisselen.

Daar kokend water slechts geringe hoeveelheden broom-

---

*) *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas.* VI, p. 374.

†) l. c. VI, p. 378.

amide opneemt, doet men beter de omzetting door verwarming met alcohol (men kan ook aceton aanwenden) te doen plaats hebben. Men bevrijdt het uit 30 gr. succinphenylamide bereide broomamide met behulp der waterluchtpomp zooveel mogelijk van water en lost het daarna op in 300 gr. kokenden spiritus; uit de vloeistof kristalliseeren dan bij bekoeling ongeveer 30 gr. succinparabroomphenylamide.

Ook door verhitting wordt het luchtdrooge phenylbroomamide omgezet in parabroomphenylamide. Deze reactie vindt bij ongeveer 200° onder smelting plaats; het product is echter niet zoo zuiver als dat, hetwelk met behulp van alcohol bereid is.

Het succinparabroomphenylamide lost in aether, benzol en koud water zeer weinig op; iets meer in kokend water. Bij verwarming met aceton of alcohol is het gemakkelijker oplosbaar; bij bekoeling valt het in blaadjes of naalden uit, die bij 213°—215° onder ontleding smelten. Voor de analyse werd het uit alcohol gekristalliseerd en bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,3332 gr. gaven 0,5389 gr. CO_2 en 0,1234 gr. H_2O
II. 0,2600 » » 0,4254 » » » 0,0961 » »
III. 0,3453 » » 31½ c.c. stikstof bij 18° en een barometerstand van 752 m.m.
IV. 0,3209 gr. gaven 0,1941 gr. Ag Br en 0,0153 gr. Ag *)
V. 0,3226 » » 0,2136 » » » 0,0059 » » .

Berekend voor $C_{10}H_{11}BrN_2O_2$:		Gevonden: I.	II.	III.	IV.	V.
C	44,3	44,1	44,6	—	—	—
H	4,1	4,1	4,1	—	—	—
N	10,3	—	—	10,4	—	—
Br	29,5	—	—	—	29,3	29,5.

Voor de analyses I, III en IV werd een amide gebezigd, dat door koking van het broomamide met alcohol bereid

*) De broombepalingen, die in deze verhandeling worden medegedeeld, zijn volgens de methode van CARIUS gemaakt.

was, terwijl voor de analyses II en V de stof door verhitting was verkregen.

Het succinparabroomphenylamide lost, gelijk het succinphenylamide, in eene alkalische oplossing van onderbromigzuur kalium op; door zuren wordt ook in dit geval een broomamide nedergeslagen. De verandering, welke dit in alkalische oplossing ondergaat, worden in hoofdstuk III beschreven.

Dat het onder den naam van succinparabroomphenylamide beschreven lichaam werkelijk deze samenstelling heeft, volgt uit de ontledingsproducten, welke bij verwarming met kali ontstaan. Bij koking met verdunde kaliloog lost het broomphenylamide op; terwijl ammoniak ontwijkt, wordt in de eerste plaats succinparabroomphenylamidozuur kalium gevormd volgens de vergelijking

$$\begin{array}{l} CH_2-C\begin{cases} NH.C_6H_4Br \\ NH_2 \end{cases} \\ | \qquad\quad > O \\ CH_2-C=O \end{array} + KHO = \begin{array}{l} CH_2-CO-NH.C_6H_4Br \\ | \\ CH_2-COOK \end{array} + NH_3.$$

Bij voortgezet koken der vloeistof, die eene overmaat van alkali moet bevatten, wordt het distillaat troebel; de olie, die overgaat en weldra vast wordt, is parabroomaniline, terwijl de terugblijvende alkalische loog barnsteenzuur bevat. Het succinparabroomphenylaminzure kalium ontleedt zich volgens de vergelijking

$$\begin{array}{l} CH_2-CO-NH.C_6H_4Br \\ | \\ CH_2-COOK \end{array} + KHO = \begin{array}{l} CH_2-COOK \\ | \\ CH_2-COOK \end{array} + C_6H_4Br\ NH_2.$$

Wij hebben de genoemde ontledingsproducten nader onderzocht en laten de resultaten van dat onderzoek nu volgen.

Het barnsteenzuur werd op die wijze geïsoleerd, dat bij de alkalische loog, welke na distillatie van het ammoniak en het broomaniline terugblijft, zoutzuur in groote overmaat werd gevoegd en de vloeistof daarna herhaaldelijk met veel aether werd uitgeschud. De vaste stof, die na verjaging van den aether achterbleef, werd met aether gewasschen en in weinig alcohol opgelost; met aether werd daarop een zuur

geprecipiteerd, dat bij 182°—184° smolt en de reacties gaf, welke voor het barnsteenzuur kenmerkend zijn. Bij de analyse werden de volgende resultaten verkregen.

0,3260 gr. gaven 0,4817 gr. CO_2 *).

Berekend voor $C_4H_6O_4$	Gevonden:
C = 40,7	40,3
H = 5,1	—

Ten einde het optreden van ammoniak buiten twijfel te stellen, werd het dubbelzout van salmiak en platinachloride bereid, dat in de karakteristieke kristallen zich afscheidde en bij de analyse 43,6 pCt. platina gaf, in plaats van 43,8 pCt., gelijk de theorie verlangt.

Het parabroomaniline kristalliseerde uit de warme, waterige oplossing in kleine octaëders, die bij 58°—60° smolten. Wij hebben uit de base het sulfaat bereid, dat uit water zich in blaadjes afscheidde, die bij 230°—235° onder blauwkleuring en gasontwikkeling smolten. De analyse toonde, dat het zout zuiver was.

I. 0,3128 gr. bij 90°—100° gedroogd gaven 0,1632 gr. $BaSO_4$.
II. 0,2987 » » » » » » 0,2465 » AgBr en 0,0052 gr. Ag.

Berekend voor $(C_6H_4Br.NH_2)_2H_2SO_4$		Gevonden: I.	II.
H_2SO_4	22,2	21,9	—
Br	36,1	—	36,4.

Het parabroomanilinesulfaat is reeds door Huebner †) beschreven. Daar volgens zijn beweren het zout in koud water gemakkelijker oplosbaar is dan in warm, terwijl bij ons praeparaat het omgekeerde het geval was, hebben wij uit acetanilide naar zijn voorschrift parabroomaniline, dat bij 58°—61° smolt en vervolgens het sulfaat bereid. Dit laatste

*) De waterbepaling ging verloren.

†) *Annalen der Chemie* 209, p. 355.

smolt bij 226°—228°, waarbij het gelijk het zoo even beschreven zout onder blauwkleuring en gasontwikkeling zich ontleedde. Het was in warm water gemakkelijker oplosbaar dan in koud, zoodat HUEBNER's tegenovergestelde mededeeling op eene vergissing berust.

Bij de ontleding van succinparabroomphenylamide door kali ontstaat, gelijk wij straks zeiden, als tusschenproduct succinparabroomphenylamidozuur

$$\begin{array}{l} CH_2—CO—NH.C_6H_4Br \\ | \\ CH_2—COOH \end{array},$$

dat door eene overmaat van zoutzuur uit de alkalische vloeistof werd geprecipiteerd. Wij kristalliseeerden het eenige malen uit veel water om; in zuiveren toestand zette het zich in den vorm van naalden af, die bij 186°—187° smolten, terwijl het onzuivere zuur uit naalden en plaatjes bestond. De resultaten der analyses van de bij 90°—100° gedroogde verbinding zijn in overeenstemming met de theorie.

I. 0,3102 gr. gaven 0,5017 gr. CO_2 en 0,1137 gr. H_2O.
II. 0,5584 » » 24½ c.c. N bij 15° en een barometerstand van 766 m.m.
III. 0,3000 gr. gaven 0,2037 gr. Ag Br en 0,0032 gr. Ag.
IV. 0,3144 » » 0,5093 gr. CO_2 en 0,1063 gr. H_2O.
V. 0,3450 » » 0,2281 gr. Ag Br en 0,0061 gr. Ag.

Berekend voor $C_{10}H_{10}NBrO_3$		Gevonden: I.	II.	III.	IV.	V.
C	44,2	44,1	—	—	44,2	—
H	3,7	4,1	—	—	3,8	—
N	5,2	—	5,2	—	—	—
Br	29,4	—	—	29,7	—	29,4.

Het succinparabroomphenylamidozuur is moeilijk in benzol, aether en koud water, iets meer in warm water oplosbaar. In aceton lost het gemakkelijk op, ook in warmen alcohol.

Uit eene neutraal reageerende oplossing van het zuur in verdund ammoniak valt bij toevoeging van salpeterzuur

zilver een zout neder, dat na drooging bij 90°—100° geanalyseerd werd.

0,3479 gr. gaven 0,1607 gr. AgBr en 0,0056 gr, Ag, nadat het zout gedurende 3 uren met rookend salpeterzuur in eene toegesmolten glazen buis bij 275° verhit was.

Berekend voor $C_{10}H_8NBrO_3Ag$.	Gevonden:
Ag Br = 49,5	49,—.

Uit de verdunde oplossing van het succinparabroomphenylamidozure ammonium worden door chloorbaryum plaatjes en naalden, door chloorcalcium plaatjes geprecipiteerd. Azijnzuur koper geeft een lichtblauw, sublimaat een wit, onduidelijk gekristalliseerd neerslag.

Men kan het gebroomde succinphenylamidozuur ook nog op andere wijze bereiden. Lost men succinphenylamidozuur *) op in eene alkalische oplossing van kaliumhypobromiet, dan heeft eene reactie plaats, welke door de volgende vergelijking wordt weder gegeven:

$$\begin{array}{l} CH_2—CO—NH.C_6H_5 \\ | \\ CH_2—COOH \end{array} + KOBr = H_2O + \begin{array}{l} CH_2—CO—NH.C_6H_4Br \\ | \\ CH_2—COOK \end{array}.$$

Uit de oplossing van het kaliumzout kan het zuur gemakkelijk afgescheiden worden. Voor de analyse IV op p. 206 is een zuur gebezigd, dat op deze wijze verkregen was.

Succinphenylamidozuur wordt volgens het voorschrift van Menschutkin †) bereid door koken van succinphenylimide met kaliloog. De bereiding van het gebroomde succinphenylamidozuur kan nog vereenvoudigd worden door het

*) Menschutkin zegt (*Annalen der Chemie* 162 p. 179), dat het zuivere succinphenylaminzuur zich in den vorm van naalden afzet. Wij hebben slechts plaatjes waargenomen; herhaald omkristalliseeren veranderde hieraan niets. Ook toen, gelijk zulks Menschutkin deed, het calciumzout bereid en hieruit het zuur weder afgescheiden werd, vielen slechts plaatjes uit. Wij hebben ons door de analyse overtuigd, dat wij zuiver zuur in handen hadden.

†) l. c.

succinphenylimide te brengen in de oplossing van het onderbromigzure zout, waaraan eene voldoende hoeveelheid vrij alkali is toegevoegd; hierbij wordt het imide omgezet in succinparabroomphenylaminzuur kalium. Het zuur, dat voor analyse V diende, is op deze wijze bereid.

II. *a. b.* PHENYL-β-UREÏDOPROPIONZUUR EN ZIJNE DERIVATEN.

In het vorige hoofdstuk hebben wij de omzetting van succinphenylbroomamide in succinparabroomphenylamide beschreven. Eene reactie van geheel anderen aard heeft plaats, wanneer men de oplossing van het broomamide in kaliloog eenigen tijd zacht verwarmt. Het broomatoom wordt dan door de hydroxylgroep gesubstitueerd, terwijl gelijktijdig eene merkwaardige atoomverschuiving plaats vindt en een zuur zich vormt, hetwelk de formule $C_{10} H_{12} N_2 O_3$ bezit; men kan het uit de alkalische vloeistof door middel van zoutzuur afscheiden.

Eene reeks van proeven heeft ons getoond, dat de beste uitkomsten worden verkregen, wanneer men op de volgende wijze te werk gaat. Het uit 10 gr. succinphenylamide bereide broomamide wordt in een mengsel van 34 c.c. water en 6 gr. kalihydraat opgelost *). Vervolgens verwarmt men de vloeistof na toevoeging van 50 c.c. kaliloog (1 : 1) gedurende 2½ uur op 55°—60° en precipiteert dan door middel van eene overmaat van zoutzuur het gevormde organische zuur. Dit is nog vrij donker van kleur; het wordt weder in kaliloog opgelost en door zoutzuur in veel zuiverder toestand afgescheiden. 10 gr. amide leverden op deze wijze verwerkt gemiddeld 8 gr. van dit zuur op, of 74 pCt. van de hoeveelheid, welke volgens de vergelijkingen

---

*) Het verdient aanbeveling de kaliloog langzaam en onder voortdurend omroeren in aanraking te brengen met het broomamide. Ook de toevoeging van het geconcentreerde kali moet zeer voorzichtig geschieden.

$C_{10}H_{12}N_2O_2 + KOBr = C_{10}H_{11}BrN_2O_2 + KHO$
succinphenylamide succinphenylbroomamide
$C_{10}H_{11}BrN_2O_2 + KHO = C_{10}H_{12}N_2O_3 + KBr$

kan ontstaan.

Dit zuur is nog broomhoudend. Ter verdere zuivering reduceert men het in alkalische oplossing met natriumamalgama. Ook is het ons somwijlen gelukt het in dier voege te reinigen, dat wij het calcium- of zilverzout bereidden en dit weder ontleedden.

Voor de analyses werd het zuur herhaaldelijk uit water gekristalliseerd en vervolgens bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,3059 gr. gaven 0,6485 gr. CO_2 en 0,1601 gr. H_2O.
II. 0,1848 » werden volgens de methode KJELDAHL-WILFARTH ontleed. Ter neutralisatie van het distillaat werden verbruikt 17½ c.c. $^1/_{10}$ norm. zwavelzuur.
III. 0,2537 gr. gaven 28½ c.c. N bij 5° en een barometerstand van 746 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_{12}N_2O_3$.		Gevonden: I.	II	III.
C	57,7	57,8	—	—
H	5,8	5,8	—	—
N	13,5	—	13,3	13,5.

Uit proeven, welke aan het einde van dit hoofdstuk worden medegedeeld, blijkt, dat het zuur langs synthetischen weg kan bereid worden en dat het als *a. b.* phenyl-β-ureïdopropionzuur *) $CO<\begin{matrix}NH.C_6H_5\\NH-CH_2-CH_2-COOH\end{matrix}$ moet opgevat worden; onze verdere resultaten zijn geheel in overeenstemming met deze opvatting. Onze verklaring van het verloop der reactie, door welke uit het succinphenylbroomamide dit zuur ontstaat, hebben wij reeds in de inleiding medegedeeld, zoodat wij hier er mede kunnen volstaan naar dat gedeelte onzer verhandeling te verwijzen.

Het phenylureïdopropionzuur is gemakkelijk in warmen,

*) Zie de noot op p. 197.

vrij gemakkelijk in kouden alcohol oplosbaar; het lost gemakkelijk op in aceton, warm water en warmen ijsazijn, moeilijk daarentegen in kouden ijsazijn, koud water en aether, zeer moeilijk in chloroform, benzol en petroleumaether. Het zuur wordt door bijtende en door koolzure alkaliën opgelost; wanneer van deze geene groote overmaat is genomen, wordt het door eene voldoende hoeveelheid azijnzuur weder geprecipiteerd; in het tegenovergestelde geval moet een sterker zuur gebruikt worden.

Het phenylureïdopropionzuur smelt in volkomen zuiveren toestand bij 171°—172° onder gasontwikkeling (zie blz. 212); gewoonlijk wordt het smeltpunt een paar graden lager gevonden. Het kristalliseert in plaatjes en naalden. Door kaliumhypobromiet wordt het in broomhoudende zuren omgezet (zie hoofdstuk III).

Wij hebben van het phenylureïdopropionzuur het calcium- en zilverzout benevens den aethylester onderzocht.

Het calciumzout werd bereid door chloorcalcium te voegen bij de waterige oplossing van het zuur, die met ammoniak geneutraliseerd was. Het zout zet zich in naalden af, die meestal concentrisch gegroepeerd zijn en ongeveer gelijke oplosbaarheid in koud en in warm water bezitten. Voor de analyse werd het bij 90°—100° gedroogd; het is dan watervrij.

I. 0,3081 gr. gaven 31½ c.c. N bij 7° en een barometerstand van 750 m.m.
II. 0,3791 » » 0,0474 gr. CaO.

Berekend voor $(C_{10}H_{11}N_2O_3)_2Ca$.	Gevonden: I.	II.
N = 12,3	12,2	—
Ca = 8,8	—	8,9.

Het zilverzout is wit, tamelijk lichtbestendig en naar het schijnt amorph; het wordt door salpeterzuur zilver uit de oplossing van het ammoniumzout in water geprecipiteerd. Het werd voor de analyse bij 90°—100° gedroogd, waarbij het zich op sommige plaatsen begon te kleuren.

I. 0,3368 gr. gaven 0,4632 gr. CO_2 en 0,1102 gr. H_2O
II. 0,3945 » » 0,1351 gr. Ag.

Berekend voor $C_{10}H_{11}N_2O_3Ag$.		Gevonden. I.	II.
C	38,1	37,5	—
H	3,5	3,6	—
Ag	34,2	—	34,2.

Door inleiden van zoutzuurgas in de oplossing van het zuur in absoluten aethylalcohol ontstond een ester, die moeilijk van geringe hoeveelheden chloor kon bevrijd worden. Wij hebben dezen daarom op andere wijze bereid en wel door toevoeging van zwavelzuur bij de oplossing van het zuur in watervrijen alcohol. Wij losten 4 gr. phenylureïdopropionzuur op in 20 gr. alcohol en voegden bij de op het waterbad verwarmde vloeistof 20 gr. geconcentreerd zwavelzuur. Na eenig staan werd met soda geneutraliseerd en het neerslag uit water gekristalliseerd onder toevoeging van eenige druppels sodaoplossing. De ester zette zich in den vorm van naalden af, die ter analyse in het luchtledige boven zwavelzuur gedroogd werden.

I. 0,2571 gr. gaven 0,5724 gr. CO_2 en 0,1597 gr. H_2O.
II. 0,2902 » » 29½ c.c. N bij 16° en een barometerstand van 764 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_{11}N_2O_3.C_2H_5$		Gevonden. I.	II.
C	61,—	60,7	—
H	6,8	6,9	—
N	11,9	—	11,9.

De ester smelt bij 84°—85°. Hij lost bij gewone temperatuur gemakkelijk op in alcohol, aceton, aether en benzol, moeilijk in petroleumaether. Ook in water is hij bij verwarming gemakkelijk oplosbaar. Na koking der alcoholische oplossing met kaliloog wordt door toevoeging van zoutzuur phenylureïdopropionzuur geprecipiteerd.

Wanneer men het phenylureïdopropionzuur met water in toegesmolten glazen buizen eenige uren op 140° verhit,

heeft eene oogenschijnlijk tamelijk ingewikkelde reactie plaats. Bij opening der buizen ontwijkt koolzuur, terwijl zich in vrij aanzienlijke hoeveelheid kristallen in de vloeistof bevinden. In de laatste konden wij aniline aantoonen; het vaste lichaam was carbanilide, dat uit verdunden alcohol omgekristalliseerd werd en bij 231°—234° smolt. Door de analyse werd aangetoond, dat wij werkelijk deze stof in handen hadden. Ook bij smelting van het phenylureïdopropionzuur ontwijkt koolzuur; uit hetgeen terugblijft kan eveneens carbanilide door kristallisatie uit verdunden alcohol geïsoleerd worden. Wij hebben de wijze, waarop in deze beide reacties het diphenylureum ontstaat, niet nader onderzocht.

Bij verhitting van phenylureïdopropionzuur met ongeveer de dubbele hoeveelheid kali en even zooveel water distilleert aniline. Dit is vrij van ammoniak, wanneer men door herhaald toevoegen van geringe hoeveelheden water er zorg voor draagt, dat de concentratie van het alkali niet te groot wordt. Het kookte bij 180°—185° *), gaf de reacties, welke het aniline kenmerken, terwijl bij de analyse van het platinadubbelzout het door de formule

$$\{C_6 H_5 . N H_2 . H Cl\}_2 Pt Cl_4$$

gevorderde platinagehalte gevonden werd. Zet men de verhitting voort, nadat de zoo even genoemde base is gedistilleerd, dan ontwijkt ammoniak; uit hetgeen daarna terug blijft kan een vluchtig zuur geïsoleerd worden, welks zilverzout een metaalgehalte bezat, dat ongeveer met dat van azijnzuur zilver overeenstemde (berekend 64,6 pCt. gevonden 63,4 pCt). Wij hebben dit zuur niet verder onderzocht; daarentegen hebben wij uit de alkalische massa, welke terugblijft, nadat het aniline is vervluchtigd en eer het ammoniak zich begint te ontwikkelen, na toevoeging van eene overmaat van zoutzuur een zuur afgescheiden, dat bij

*) Een zeer klein gedeelte had een hooger kookpunt. Waarschijnlijk bestond dit uit broomaniline, daar voor deze proeven ruw, broomhoudend phenylureïdopropionzuur gebezigd werd.

de verdere onderzoeking β-amidopropionzuur bleek te zijn. De vorming van dit zuur en van het aniline kan door de volgende vergelijkingen worden weêrgegeven:

$$CO\left\langle\begin{matrix}NH.C_6H_5\\NH-CH_2-CH_2-COOK\end{matrix}\right.+KHO=C_6H_5.NH_2+CO\left\langle\begin{matrix}OK\\NH-CH_2-CH_2-COOK\end{matrix}\right.$$

$$CO\left\langle\begin{matrix}OK\\NH-CH_2-CH_2-COOK\end{matrix}\right.+2HCl=2KCl+CO_2+NH_2.CH_2.CH_2.COOH.$$

Het zal wel niet bevreemden, dat uit het zout

$$CO\left\langle\begin{matrix}OK\\NH-CH_2-CH_2COOK\end{matrix}\right.$$

het vrije zuur niet kan geïsoleerd worden, maar dat dit laatste oogenblikkelijk zich ontleedt in koolzuur en β-amidopropionzuur. Het was gemakkelijk aan te toonen, dat werkelijk koolzuur ontwijkt zoodra de vloeistof zure reactie aanneemt.

Uit het β-amidopropionzuur hebben wij op de door Curtius *) aangegeven wijze den zoutzuren aethylester en van dezen het platinadubbelzout bereid. Tot dat doeleinde werd eene overmaat van zoutzuur bij de massa gevoegd, die na smelting van het phenylureïdopropionzuur met kali terugblijft, en nadat alles was opgelost, de vloeistof verdampt. Het terugblijvende mengsel van chloorkalium en β-amidopropionzuur werd met watervrijen alkohol overgoten en daarin zoutzuurgas geleid; het amidozuur wordt zoodoende in het chloorhydraat van den ester omgezet en opgelost. De vloeistof werd na eenige rust van het chloorkalium afgegoten en daarop door verwarming de alkohol en het zoutzuur verjaagd; het stroopachtige, nog onzuivere en hygroscopische chloorhydraat van den β-amidopropionzuren aethylester werd vervolgens boven zwavelzuur geplaatst, waarop het spoedig vast werd. Het vormt een zeer karakteristiek platinadubbelzout, dat in alkohol moeilijk oplosbaar is, gemakkelijk in zuiveren toestand kan bereid worden en waaruit

*) *Journ. für prakt. Chemie N. F.* 37, p. 159.

het zuivere chloorhydraat van den aethylester kan worden afgescheiden.

De verbinding van het chloorhydraat van den β-amidopropionzuren aethylester met platinachloride zet zich af, wanneer men bij eene oplossing van het esterchloorhydraat in spiritus alcoholisch platinachloride (1 : 1) voegt. Wij hebben het zout uit een warm mengsel van 100 gr. spiritus en 6 gr. eener oplossing van platinachloride in water (1 : 10) laten kristalliseeren. Deze bewerking werd herhaald, ten einde eene geringe hoeveelheid eener vaste stof af te scheiden, welke bij het filtreeren der oplossing aanvankelijk niet werd teruggehouden. Op deze wijze bereid vormt het platinadubbelzout gele naalden, die kristalwater bevatten. Uit absoluten alkohol zet het zout zich geheel of gedeeltelijk in den vorm van gele plaatjes af, welke waarschijnlijk het watervrije zout zijn.

De aan de lucht gedroogde naalden verliezen hun kristalwater, bij gewone temperatuur, boven zwavelzuur grootendeels; het bij 90°—100° gedroogde zout is watervrij. Bij verschillende bereidingen werd een verschillend gehalte aan kristalwater gevonden; waarschijnlijk wordt dit onder gunstige omstandigheden bij droging aan de lucht reeds gedeeltelijk afgegeven.

Bij de analyse van het watervrije zout vonden wij het volgende.

I. 0,5965 gr. gaven 0,4014 gr. CO_2 en 0,1956 gr. H_2O
II. 0,6291 » » 23 c.c. N bij 10° en een barometerstand van 753 m.m.
III. 0,3456 gr. gaven 0,1048 gr. Pt.
IV. 0,2995 » » 0,3956 gr. AgCl en 0,0031 gr. Ag *).
V. 0,2549 » » 0,0770 gr. Pt.
VI. 0,3613 » » 0,4725 gr. AgCl en 0,0072 gr. Ag.

---

*) Het chloorgehalte in het platinadubbelzout werd op de volgende wijze gevonden. Bij de oplossing dezer verbinding in water werd chloorvrij natriumamalgama gevoegd; nadat het platina was geprecipiteerd, werd gefiltreerd en in het filtraat op de gewone wijze het chloor bepaald.

Berekend voor $\left\{\begin{matrix} CH_2.NH_2.HCl \\ \vert \\ CH_2.COOC_2H_5 \end{matrix}\right\}_2 + PtCl_4$		Gevonden. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
C	18,7	18,4	—	—	—	—	—
H	3,7	3,6	—	—	—	—	—
N	4,4	—	4,3	—	—	—	—
Pt	30,2	—	—	30,3	—	30,2	—
Cl	33,—	—	—	—	33,—	—	33,—.

De verbinding van het chloorhydraat van den β-amidopropionzuren aethylester met platinachloride is gemakkelijk oplosbaar in water, moeilijker in alcohol. Deze oplossingen ontleden zich vrij gemakkelijk, zoodat men het moet vermijden deze langer dan noodig te laten staan; ook verwarming is nadeelig. Wanneer men het dubbelzout in een capillair buisje verhit, smelt het bij 193° onder gasontwikkeling, nadat het reeds bij lagere temperatuur begonnen is zich te kleuren.

Het chloorhydraat van den amidopropionzuren aethylester werd uit bovengenoemde verbinding op volgende wijze afgescheiden. Uit de oplossing dezer laatste in water werd het platina met zwavelwaterstof geprecipiteerd; de vloeistof werd vervolgens na filtratie verdampt. De zoutzure ester werd daarop ter zuivering in aceton opgelost; bij toevoeging van alcohol- en watervrijen aether zet hij zich in den vorm van hygroscopische, kleine kristallen af. Eene herhaling dezer bewerking bleek meestal noodzakelijk, ter verwijdering van anorganische bijmengingen. Voor de analyse werd het lichaam boven zwavelzuur gedroogd.

I. 0,3462 gr. gaven 0,4938 gr. CO_2 en 0,2579 gr. H_2O
II. 0,3103 » » 0,2872 gr. AgCl en 0,0037 gr. Ag.

Berekend voor $\begin{matrix} CH_2.NH_2.HCl \\ \vert \\ CH_2.COOC_2H_5 \end{matrix}$		Gevonden. I.	II.
C	39,1	38,9	—
H	7,8	8,3	—
Cl	23,1	—	23,3.

Ter vergelijking hebben wij ook uit β-amidopropionzuur, dat volgens de methode van den Heer E. MULDER *) uit β-joodpropionzuur verkregen was, den zoutzuren aethylester en de verbinding van dezen met platinachloride bereid. Door de analyse (voor n⁰. V en VI op blz. 215 werd dit zout gebezigd, nadat het bij 90⁰—100⁰ gedroogd was) werd aangetoond, dat het dubbelzout zuiver was. Het kristalliseerde, gelijk dat, hetwelk straks beschreven werd, uit verdunden spiritus in gele naalden, die kristalwater bevatten, terwijl het zich uit absoluten alcohol in den vorm van plaatjes afzette. Het smolt onder gasontwikkeling, nadat het reeds bij lagere temperatuur begonnen was zich te kleuren, bij 195⁰—196⁰, dus 2⁰ hooger dan het andere zout. Aan dit geringe verschil is echter geen gewicht te hechten, daar de verbinding, eer zij smelt, reeds ten deele ontleed en de mate van ontleding van verschillende omstandigheden afhankelijk is †).

---

*) *Ber. d. Deutschen Chem. Ges.* 9, p. 1903.

†) Men kan het β-amidopropionzuur ook nog op andere wijze bereiden. Bij vermenging der oplossingen van een succinaminzuur zout — wij namen de calciumverbinding — en van onderbromigzuur kalium in verhouding hunner moleculairgewichten onder toevoeging van zooveel kali, dat de vloeistof steeds alkalische reactie behoudt, wordt -amidopropionzuur gevormd volgens de vergelijking

$$\left(\begin{matrix} CH_2-CO.NH_2 \\ | \\ CH_2-COO \end{matrix}\right)_2 Ca + 2KOBr + 4KHO = 2\left(\begin{matrix} CH_2-NH_2 \\ | \\ CH_2-COOK \end{matrix}\right) + CaCO_3 + 2KBr + K_2CO_3 + 2H_2O.$$

Deze reactie is volkomen analoog aan die, welke bij de vorming van aminen uit de amiden van eenbasische zuren plaats heeft.

Het is zelfs niet noodig het succinaminzure zout uit het succinimid te bereiden; wordt 1 molecuul van dit laatste overgoten met eene oplossing van 1 molecuul kaliumhypobromiet, welke zooveel kali bevat, dat de reactie der vloeistof voortdurend alkalisch blijft, zoo heeft bij verwarming op 55⁰—60⁰ vorming plaats van β-amidopropionzuur, waarschijnlijk volgens de vergelijkingen

$$\begin{matrix} CH_2-C \\ | \quad\quad > O \\ CH_2-C=O \end{matrix}\!\!\!

Bij verhitting van phenylureïdopropionzuur met acetylchloride wordt een lichaam gevormd, dat geene zure eigenschappen meer bezit. Zijne formule is $C_{10}H_{10}N_2O_2$; het is uit het zuur door onttrekking van twee atomen waterstof en een atoom zuurstof ontstaan. Het werd op de volgende wijze bereid. Het phenylureïdopropionzuur werd met het tweederde gedeelte van zijn gewicht aan acetylchloride gedurende een uur in eene toegesmolten glazen buis in het waterbad verhit. Daarop werd de inhoud der buis eenigen tijd verwarmd ter verwijdering van een gedeelte van het zoutzuur en na bekoeling met aceton gewasschen. Geheel zuiver wordt het product eerst bij herhaalde kristallisatie uit water; het zet zich dan uit verdunde oplossingen in den vorm van naalden af, terwijl het in minder zuiveren toestand een mengsel van naalden en plaatjes vormt. Voor de analyse werd het lichaam bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,2709 gr. gaven 0,6298 gr. CO_2 en 0,1372 gr. H_2O
II. 0,2252 » » $28^5/_8$ c.c. N bij 14° en een barometerstand van 754 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_{10}N_2O_2$	Gevonden. I.	II.
C 63,2	63,4	—
H 5,3	5,6	—
N 14,7	—	14,8.

---

en

$$\begin{array}{l} CH_3—CO—NKBr \\ | \\ CH_2—COOK \end{array} + 2KHO = \begin{array}{l} CH_2—NH_2 \\ | \\ CH_2—COOK \end{array} + K_2CO_3 + KBr.$$

Wij hopen later op deze bereidingswijze van β amidopropionzuur terug te komen en zullen tevens nagaan, op welke wijze het hypobromiet op andere imiden inwerkt. Voor zoo ver ons bekend bevat de chemische literatuur slechts eene waarneming over dit onderwerp. BOERNSTEIN (*Zeitschrift f. anal. Chemie* 1888, p. 165) heeft Saccharine $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix}CO\\SO_2\end{smallmatrix}\rangle NH$ of $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix}C\\SO_2\end{smallmatrix}\rangle\!\!\begin{smallmatrix}NH\\ /\!/\\ O\end{smallmatrix}$ met eene alkalische oplossing van onderbromigzuur kalium behandeld; eene gele, broom- en kaliumhoudende verbinding scheidde zich af, die bij koking met water broom ontwikkelde. Waarschijnlijk is hier een lichaam $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix}CO—NKBr\\SO_2.OK\end{smallmatrix}$ of $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix}COOK\\SO_2NKBr\end{smallmatrix}$ ontstaan.

In een capillair buisje verhit smelt deze verbinding bij 231°—234°; zij is niet onontleed vluchtig. Zij is oplosbaar in zwavelkoolstof en chloroform, lost daarentegen moeilijk op in alcohol en in benzol, zeer moeilijk in aether en petroleumaether. Bij verwarming wordt zij door aceton en warm water opgelost; bij bekoeling zet zij zich uit deze vloeistoffen weder in kristallen af; de oplossing in water reageert neutraal. Tegenover zwak zure vloeistoffen schijnt het lichaam tamelijk bestendig te zijn; door alkaliën wordt het daarentegen zeer gemakkelijk veranderd. Verdunde kaliloog lost het bij gewone temperatuur op onder vorming van phenylureïdopropionzuur kalium. Wanneer daartoe eene bepaalde hoeveelheid eener oplossing van kaliumhydroxyde van bekende sterkte wordt gebezigd, kan men zich door terugtitreeren van het overtollige alkali overtuigen, dat de hoeveelheid kali verbruikt is, welke door de vergelijking

$$C_{10}H_{10}N_2O_2 + KHO = C_{10}H_{11}N_2O_3K$$

verlangd wordt.

Wij hebben het moleculairgewicht der verbinding volgens de methode van RAOULT bepaald *), waarbij wij ijsazijn als oplossingsmiddel bezigden.

IJsazijn.	Verbinding.	Depressie.	Gevonden molec. gew.	Berekend moloc. gew.
13,1352 gr.	0,3872 gr.	0,58°	198	190
13,4100 »	0,3775 »	0,55°	200	
12,5845 »	0,4157 »	0,61°	211	

De gevonden depressie toont ten duidelijkste, dat de formule van het lichaam werkelijk door $C_{10}H_{10}N_2O_2$ wordt uitgedrukt.

Het product $C_{10}H_{10}N_2O_2$ staat in dezelfde verhouding tot het phenylureïdopropionzuur $C_{10}H_{12}N_2O_3$, als het hydantoïne $CO<\begin{matrix}NH-CO\\|\\NH-CH_2\end{matrix}$ tot het hydantoïnzuur $CO<\begin{matrix}NH_2\\NH-CH_2-COOH\end{matrix}$'

*) Hiertoe werd het toestelletje gebruikt, dat door den Heer EIJKMAN beschreven is (*Zeitschr. f. physik. Chemie* II, p. 964).

of als het α-lactylureum $CO<\begin{matrix}NH-CO\\ |\\ NH-CH(CH_3)\end{matrix}$ tot het α-ureïdopropionzuur $CO<\begin{matrix}NH_2\\ NH-CH(CH_3)-COOH\end{matrix}$. Het is het β-lactylphenylureum, dat op de volgende wijze ontstaat:

$$CO<\begin{matrix}NH(C_6H_5)\\ NH-CH_2\end{matrix}>\overset{COOH}{\overset{|}{C}}H_2 = H_2O + CO<\begin{matrix}N(C_6H_5)-CO\\ NH\text{———}CH_2\end{matrix}>CH_2.$$

Dit ureïd, waaraan men den meer rationeelen naam van a.phenyl-hydrouracil *), of ook volgens de nomenclatuur van WIDMAN †) dien van a. phenyl-diacidihydromiazine kan geven, heeft zwak basische eigenschappen. Bij verwarming met het dubbele gewicht acetylchloride op 100° gedurende drie uren wordt het langzaam opgelost en zet zich dan om in de acetylverbinding. Men kan deze gemakkelijker op die wijze bereiden, dat men phenylureïdopropionzuur gedurende drie uren op 100° met eene grootere hoeveelheid acetylchloride verhit (1 deel zuur op 3 deelen chloride), dan voor de vorming van het phenylhydrouracil noodzakelijk is, waarbij dit laatste waarschijnlijk als tusschenproduct ontstaat. De inhoud der buis, die gewoonlijk geene vaste stof heeft afgezet, wordt van het zoutzuur en het overtollige acetylchloride door verwarming gedeeltelijk bevrijd; het lichaam, dat terugblijft, wordt in aceton opgelost en met aether geprecipiteerd. Het neerslag moet dan nog ter zuivering eenige malen uit water gekristalliseerd worden, waaruit het zich in naalden afzet. Voor de analyse werden deze bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,2531 gr. gaven 0,5775 gr. CO_2 en 0,1243 gr. H_2O.
II. 0,3668 » » $37^7/_8$ c.c. N bij 15° en een barometerstand van 770 m.m.

---

*) Zie de noot op blz. 197.

†) *Journ. f. prakt. Chemie* N. F. 38, p. 185. Ook hier geldt, wat betreft het gebruik van de letter *a*, hetgeen in de noot op blz. 197 gezegd is.

Berekend voor $C_{12}H_{12}N_2O_3$	Gevonden. I.	II.
C 62,1	62,2	—
H 5,2	5,5	—
N 12,1	—	12,3.

Het *a. b.* phenyl-acetyl-hydrouracil smelt bij 135°—138°. Zijne oplossing in water reageert neutraal; voegt men daaraan kali toe en verwarmt, zoo wordt zij snel ontleed. Daarbij heeft de volgende reactie plaats:

$$C_{10}H_9N_2O_2(C_2H_3O) + 2KHO = C_{10}H_{11}N_2O_3K + C_2H_3O_2K.$$

De juistheid dezer vergelijking werd langs maatanalytischen weg aangetoond. Wij hebben ook het azijnzuur, dat gevormd wordt, na toevoeging van overtollig zwavelzuur door distillatie afgezonderd; de hoeveelheid kwam overeen met de theorie.

In de voorgaande bladzijden hebben wij het zuur, dat uit succinphenylbroomamide bereid werd en dat de formule $C_{10}H_{12}N_2O_3$ heeft, als *a. b.* phenyl-β-ureïdopropionzuur opgevat, zonder voor die meening tot dusverre afdoende bewijzen bij te brengen. Wel waren de reacties van het zuur en zijne ontledingsproducten, voor zoover zij onderzocht zijn, met de aangenomen constitutieformule in overeenstemming, bewezen was deze daarmede echter nog niet. Dit bewijs meenen wij gevonden te hebben in de synthetische bereiding van het zuur uit phenylureum en β-amidopropionzuur *), waarbij het volgens de vergelijking

$$CO{<}^{NH.C_6H_5}_{NH_2} + NH_2-CH_2-CH_2-COOH =$$
$$= CO{<}^{NH.C_6H_5}_{NH-CH_2-CH_2-COOH} + NH_3$$

ontstaat.

*) Grootendeels werd daartoe een zuur gebezigd, dat volgens de methode van den heer MULDER bereid was. Even goed kan daartoe echter ook het mengsel van β-amidopropionzuur, chloor- en broomkalium genomen worden, dat verkregen wordt, wanneer men na toevoeging van eene overmaat van zoutzuur de broomkalium en vrij alkali houdende oplossing van het amidozuur verdampt, welke bij de behandeling van succinimid met het onderbromigzure zout ontstaat (zie de noot op p. 216).

Wij zijn daartoe op de volgende wijze te werk gegaan. Een mengsel der beide stoffen in verhouding hunner moleculairgewichten werd in eene reageerbuis in een bad van zwavelzuur op 135°—140° verwarmd. Eerst smolt het mengsel; nadat het weder vast was geworden, werd het nog ongeveer 15 minuten lang verhit. Gedurende de verwarming vond ontwikkeling van een gas plaats, dat ten minste gedeeltelijk uit ammoniak bestond, terwijl oliedruppels (aniline?) aan den wand der buis zichtbaar waren. Na bekoeling werd het product bij gewone temperatuur met verdunde kaliloog gedigereerd; daarop werd gefiltreerd en door toevoeging van zoutzuur bij het filtraat het phenylureïdopropionzuur geprecipiteerd. Voor de analyse werd het eenige malen uit water gekristalliseerd en bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,3060 gr. gaven 0,6482 gr. CO_2 en 0,1678 gr. H_2O.
II. 0,2583 » » 28¾ c.c. N bij 5½° en een barometerstand van 759 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_{12}N_2O_3$	Gevonden. I.	II.
C 57,7	57,8	—
H 5,8	6,1	—
N 13,5	—	13,6

Het zuur smolt onder gasontwikkeling bij 167°; het kristalliseerde in naalden. De opbrengst liet veel te wenschen over.

Wij hebben uit dit zuur door verwarming met acetylchloride het phenylhydrouracil (zie p. 216) bereid, dat, nadat het herhaaldelijk uit water was gekristalliseerd, bij 230°—233° smolt. Door de analyse werd aangetoond, dat de verbinding zuiver was.

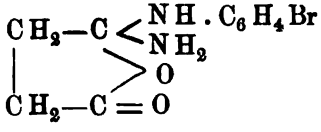
0,1905 gr. bij 90°—100° gedroogd gaven 0,4394 gr. CO_2 en 0,0987 gr. H_2O.

Berekend voor $C_{10}H_{10}N_2O_2$.	Gevonden.
C = 63,2	62.9
H = 5,3	5,8

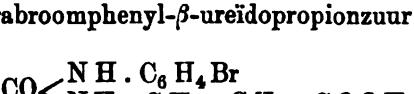
De verbinding was oplosbaar in verdunde kaliloog. Door zoutzuur werd uit de vloeistof een zuur geprecipiteerd, dat hetzelfde smeltpunt als het phenylureïdopropionzuur bezat.

III. *a. b.* MONO-, DI- EN TRIBROOMPHENYL-β-UREÏDOPROPIONZUUR.

Op dezelfde wijze als succinphenylamide in *a. b.* phenyl-β-ureïdopropionzuur wordt omgezet, kan uit het succinparabroomphenylamide (zie p. 203)



het *a. b.* parabroomphenyl-β-ureïdopropionzuur

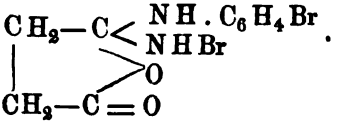


bereid worden.

Wij hebben de beste uitkomsten verkregen, wanneer ter bereiding van het laatstgenoemde zuur op de volgende wijze te werk werd gegaan *). 2,5 gr. succinbroomphenylamide (1 mol.) werd bij gewone temperatuur opgelost in eene vloeistof, welke op 1,5 gr. broom (1 mol.) 2 gr. kalihydraat (4 mol.) en ongeveer 50 gr. water bevatte; daarop werd bij deze eene overmaat van azijnzuur gevoegd, het neerslag afgefiltreerd en met water uitgewasschen. Dit precipitaat is, daar bij toevoeging van joodkalium en dan van zoutzuur bij de alkalische oplossing jood in vrijheid wordt gesteld, een bromamide en wel zonder twijfel succinbroomphenylbroomamide

---

*) Het is zeer wel mogelijk, dat de wijze van bereiding van dit zuur verbeterd kan worden, daar wij de omzetting van het succinbroomphenylbroomamide in alkalische oplossing onderzochten, toen wij nog slechts weinig bekend waren met deze categorie van broomamiden.



Daar dit al even weinig bestendig is als het succinphenylbroomamide, hebben wij het niet in zuiveren toestand afgescheiden. Ter omzetting in broomphenylureïdopropionzuur werd het uit 2,5 gr. succinbroomphenylamide bereide succinbroomphenylbroomamide opgelost in een mengsel van 50 c.c. water en 5 c.c. eener kaliloog van 40 pCt.; bij de vloeistof werden vervolgens gevoegd 60 c.c. eener kalinmhydroxydoplossing van 50 pCt. en deze oplossing werd gedurende $1^1/_2$ uur op 25^0—30^0 verwarmd. Daarop werd door eene overmaat van zoutzuur het broomphenylureïdopropionzuur geprecipiteerd. Gewoonlijk werd aan ruw zuur ongeveer 50 pCt. van de hoeveelheid verkregen, welke volgens de vergelijking

$$C_{10}H_{10}Br_2N_2O_2 + KHO = KBr + C_{10}H_{11}BrN_2O_3,$$

had kunnen ontstaan.

Gewoonlijk bevat het ruwe broomphenylureïdopropionzuur zuren met hooger broomgehalte. Door herhaald kristalliseeren uit verdunden alcohol wordt het van deze bijmengingen bevrijd. Voor de analyse werd de verbinding bij 90^0—100^0 gedroogd.

I. 0,3114 gr. gaven 0,4750 gr. CO_2 en 0,1207 gr. H_2O.
II. 0,3473 » » 0,2197 » AgBr en 0,0052 gr. Ag.
III. 0,3065 » » $24^3/_4$ c.c. N bij 6^0 en een barometerstand van 761 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_{11}BrN_2O_3$		Gevonden. I.	II.	III.
C	41,8	41,6	—	—
H	3,8	4,3	—	—
Br	27,8	—	28.—	—
N	9,8	—	—	9,9

Het parabroomphenylureïdopropionzuur lost in warmen alcohol tamelijk gemakkelijk op; het kristalliseert daaruit bij bekoeling in naalden, die veelal afgeplat zijn. Het is

zeer moeilijk oplosbaar in aether en benzol, vrij moeilijk oplosbaar in kokend water, waaruit het zich in plaatjes afzet. In ijsazijn lost het bij verwarming tamelijk gemakkelijk op. Wanneer men het zuur in een capillair buisje verhit, begint het bij 229° zich onder gasontwikkeling te ontleden, nadat het reeds bij lagere temperatuur week is geworden. Bij verhitting van het zuur met zeer geconcentreerde kaliloog distilleert eene olie, die spoedig vast wordt; nadat deze verbinding in zoutzuur opgelost en met ammoniak was geprecipiteerd, lag haar smeltpunt bij 59°—63°; zij is blijkbaar parabroomaniline. Door natriumamalgama wordt het zuur in alkalische oplossing tot phenylureïdopropionzuur gereduceerd. Deze reacties en de wijze van bereiding stellen de structuurformule $CO < \begin{matrix} NH.C_6H_4Br \\ NH-CH_2-CH_2-COOH \end{matrix}$ voor het zuur, waarvan thans sprake is, buiten twijfel.

Van de zouten van het parabroomphenylureïdopropionzuur werden het calcium- en het zilverzout onderzocht.

Het zeer volumineuze calciumzout wordt door chloorcalcium uit de met ammoniak geneutraliseerde oplossing van het zuur geprecipiteerd. Bij 100° is het watervrij.

I. 0,2720 gr. gaven 0,1586 gr. AgBr en 0,0054 gr. Ag
II. 0,4278 » » 0,0941 gr. $CaSO_4$.

Berekend voor $(C_{10}H_9BrN_2O_3)_2Ca$		Gevonden. I.	II.
Br	26,1	26,3	—
Ca	6,5	—	6.5.

Het zilverzout wordt uit de oplossing van het ammoniumzout door zilvernitraat in vlokken afgescheiden. Voor de analyse werd het bij 90°—100° gedroogd; het bevat dan geen kristalwater.

I. 0,4720 gr. gaven 0,5249 gr. CO_2 *) en 0,1152 gr. H_2O.
II. 0,3442 » » 0,1518 gr. AgBr en 0,0055 gr. Ag, nadat het zout gedurende 3 uren met rookend salpeterzuur in eene toegesmolten glazen buis bij 275° verhit was.

*) De stof werd voor de verbranding met kalium bichromaat gemengd.

Berekend voor $C_{10}H_{10}BrN_2O_3Ag$		Gevonden. I.	II.
C	30,5	30,3	—
H	2,5	2,7	—
Br	20,3 } 47,7	—	46,9
Ag	27,4 }		

Wanneer men kaliumhypobromiet en phenylureïdopropionzuur in verhouding hunner moleculairgewichten in alkalische oplossing op elkander laat inwerken, ontstaat een monobroomphenylureïdopropionzuur waarschijnlijk slechts in geringe hoeveelheid; wij hebben het ten minste niet uit het mengsel van zuren, dat gevormd wordt, kunnen afscheiden. Daarentegen konden wij onder die omstandigheden in betrekkelijk kleine hoeveelheid een zuur isoleeren, dat twee atomen broom bevat. Wij zijn daartoe op de volgende wijze te werk gegaan. Na vermenging van het hypobromiet en het phenylureïdopropionzuur kalium werd door eene overmaat van zoutzuur een mengsel van zuren geprecipiteerd, dat eerst eenige malen uit alcohol gekristalliseerd en vervolgens met kleine hoeveelheden water uitgekookt werd; het terugblijvende loste in veel kokend water op en zette zich bij bekoeling in naalden af, die bij 201°—202° onder ontleding smelten. Voor de analyse werden deze bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,4359 gr. gaven 0,5243 gr. CO_2 *).
II. 0,4185 » » 26 c c. N bij $6^1/_2$° en een barometerstand van 771 m.m.
III. 0,2301 gr. gaven 0,2238 gr. AgBr en 0,0076 gr. Ag.

Berekend voor $C_{10}H_{10}Br_2N_2O_3$		Gevonden I.	II.	III.
C	32,8	32,8	—	—
H	2,7	—	—	—
Br	43,7	—	—	43,8
N	7,7	—	7,6	—

*) De waterbepaling ging verloren.

Bij verhitting van het bibroomphenylureïdopropionzuur met kalihydraat (1 deel zuur op 2 deelen alkali) distilleert een bibroomaniline. Daar het zuur niet gemakkelijk te bereiden is, werd het voor deze proeven in niet geheel zuiveren toestand gebruikt en moesten wij er op bedacht zijn, dat het bibroomaniline geringe hoeveelheden mono- en tribroomaniline kon bevatten. Het werd hiervan op de volgende wijze bevrijd *). Door oplossen in verwarmd, tamelijk geconcentreerd zoutzuur werd het van het tribroomaniline gescheiden, dat terugblijft. De vloeistof werd vervolgens verdampt en warm water bij het residuum gevoegd. Het bibroomaniline verloor zoodoende zijn zoutzuur en werd onoplosbaar, terwijl het chloorhydraat van het monobroomaniline in oplossing ging. Ten slotte werd het bibroomaniline nog eenige malen uit verdunden alcohol gekristalliseerd; het zette zich uit dat oplossingsmiddel in naalden af, die voor de analyse boven zwavelzuur gedroogd werden.

0,2055 gr. gaven 0,2681 gr. Ag Br en 0,0216 gr. Ag.

Berekend voor $C_6 H_3 Br_2 . NH_2$.	Gevonden.
Br = 63.7	63,3

Het bibroomaniline smolt bij 78°—81°. Uit dit smeltpunt en de eigenschappen der verbinding volgt, dat deze als o.p.bibroomaniline moet opgevat worden en dat dus het straks beschreven zuur het a.b.orthoparabibroomphenyl-β-ureïdopropionzuur is.

Wanneer men 1 molecuul phenylureïdopropionzuur in alkali oplost en 3 moleculen kaliumhypobromiet toevoegt, ontstaat het a.b.sym.tribroomphenyl-β-ureïdopropionzuur, dat door zuren uit de alkalische vloeistof wordt geprecipiteerd. Vermindert men de hoeveelheid van het onderbromigzure zout tot op 2 moleculen, zoo wordt toch hetzelfde zuur gevormd. Dit is daaraan toe te schrijven, dat het hypobromiet des te gemakkelijker op de phenylureïdopropion-

*) Verg. GRIESS, *Ann. der Chemie u. Pharm.* 121, p. 267.

zuren inwerkt, welke reeds beschreven werden, naarmate zij rijker zijn aan broom. Wij hebben gedurende den loop van ons onderzoek dezen regel herhaaldelijk bevestigd gezien. Ook uit het broom en uit het bibroomphenylureïdopropionzuur kan het tribroomzuur door inwerking van het onderbromigzure zout bereid worden; de het allereerst genoemde wijze van bereiding is echter verreweg de verkieselijkste. Wij hebben het tribroomzuur door kristallisatie uit ijsazijn gezuiverd. Voor de analyse werd het bij 90°—100° gedroogd.

I. 0,3941 gr. gaven 0,3926 gr. CO_2 en 0,0774 gr. H_2O.
II. 0,2937 » » 0,3568 » Ag Br en 0,0067 gr. Ag.
III. 0,5163 » » 28 c. c. N bij 12° en een barometerstand van 754 m.m.

Berekend voor $C_{10}H_9Br_3N_2O_2$.		Gevonden. I.	II.	III.
C	27,—	27.2	—	—
H	2,—	2,2	—	—
Br	53,9	—	53,4	—
N	6,3	—	—	6,4.

Bij langzame verhitting in een capillair buisje in een bad van zwavelzuur smelt dit zuur bij 219°—220° onder ontleding; wanneer men sneller verwarmt kan het smeltpunt eenige graden hooger gevonden worden. Het zuur is ook bij verwarming moeilijk oplosbaar in water en in benzol, evenzoo in aether. Alcohol en ijsazijn lossen het bij koking gemakkelijker op; bij bekoeling zet het zich in naaldjes af. Natriumamalgama reduceert het tribroomzuur tot phenylureïdopropionzuur.

Dat werkelijk in het tribroomzuur de drie broomatomen in den phenylkern symmetrisch ten opzichte van elkander geplaatst zijn, hebben wij door het onderzoek van het tribroomaniline trachten aan te toonen, dat bij distillatie van het zuur met het dubbele gewicht kalihydraat ontstaat. De vluchtige vaste stof werd, nadat zij met zoutzuurhoudend water gewasschen was, eenige malen uit verdunden spiritus

gekristalliseerd, waaruit zij zich in naalden afzette. Zij werd na droging bij 90°—100° geanalyseerd.

I. 0,1906 gr. gaven 0,3200 gr. AgBr en 0,0041 gr. Ag.
II. 0,5348 » » 19 c.c. N bij 10° en een barometerstand van 758 m.m.

Berekend voor $C_6H_2Br_3.NH_2$.		Gevonden I	II,
Br	72,7	73,—	—
N	4,3	—	4,2.

Het lichaam smelt bij 122°—124°. Dit smeltpunt ligt eenige graden hooger dan dat, hetwelk voor sym. tribroomaniline gevonden is, dat op andere wijze bereid werd *); wij zijn van meening, dat aan dit verschil weinig waarde te hechten is en vatten onze verbinding als sym. tribroomaniline op.

Het experimenteele gedeelte van deze onderzoeking is grootendeels het werk van den Heer M. van Breukeleveen. Wij betuigen hem voor zijnen ijver en zijne toewijding onzen welgemeenden dank.

Amsterdam, Januari 1890.

---

*) Volgens Fittig en Buechner (*Ann. der Chem. u. Pharm.* 188 p. 26) smelt het sym. triboomaniline bij 119°—120°.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 22 Februari 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, BEIJERINCK, ZAAIJER, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VERLOREN, KAMERLINGH ONNES, BAEHR, HUBRECHT, FORSTER, MICHAËLIS, GUNNING, VAN DER WAALS, VAN DIESEN, SCHOLS, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, KORTEWEG, PLACE, STOKVIS, BIERENS DE HAAN, SCHOUTE, VAN BEMMELEN, DE VRIES, VAN 'T HOFF, MAC GILLAVRY, BEHRENS, KAPTEYN, PEKELHARING, KOSTER, LORENTZ, VAN DORP, MARTIN, HOOGEWERFF en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris. Van de Letterkundige Afdeeling de Heeren: BOOT EN BEETS.

— Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. F. WESTERMAN, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap Natura Artis Magistra te Amsterdam, 15 Februari 1890; 2°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 12 Februari 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van TEIJLER's Stichting te Haarlem, 19 Februari 1890; 4°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 10 Fe-

bruari 1890; 5°. TREUB, Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, 21 December 1889; 6°. den Directeur der Ecole polytechnique te Delft, 30 October 1889; 7°. M. BERTHELOT, Parijs, 1890; 8°. E. BESIER, Vice-President van de Société d'Agriculture, Sciences et Arts te Valenciennes, 31 October 1889; 9°. J. H. GRAF, Bibliothecaris van de Société helvétique des sciences naturelles te Bern, 22 Januari 1890; 10°. den Secretaris van de Accademia delle Scienze fisiche e matematiche te Napels, Februari 1890; 11°. F. MALMBERG, Directeur van het Nautisk-meteorologiska Byran te Stockholm, 24 Januari 1890; 12°. den Directeur van het meteorological Office te Calcutta, 10 Januari 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 28, 30 Januari, 4 Februari 1890; 2°. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 8 Februari 1890; 3°. H. LEEMANS, Directeur van de Service de la Statistique générale de Belgique te Brussel, 8 Februari 1890; 4°. den Secretaris van het Institut de France te Parijs, 5 September 1889; 5°. DE MILLOUÉ, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 1889; 6°. RICHARD, Secretaris van S. A. S. le Prince de Monaco te Parijs, 23 Januari 1890; 7°. den Bibliothecaris van de Académie des Sciences et Lettres te Montpellier, 1889; 8°. A. ARRHENIUS, Bibliothecaris van de Societas pro Fauna et Flora fennica te Helsingfors, 4 December 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Brieven van de Heeren MOLL en A. C. OUDEMANS JR., dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen.

2°. Een antwoord van den Hoogleeraar Dr. E. SELENKA te Erlangen, naar aanleiding van zijne benoeming tot correspondeerend lid der Afdeeling (23 Januari 1890). Hij betuigt daarvoor zijne erkentelijkheid.

3°. Het bericht van het overlijden van wijlen het lid der Akademie, den Hoogleeraar Buys Ballot, op 3 Februari 1890. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende.

»Met diepe smart ontvingen wij het bericht van het plotseling afsterven van onzen Buys Ballot, want evenals zoo menige kring, waarin hij arbeidde, verliest ook de Akademie in hem een zijner edelste, een zijner beste leden. Met den Secretaris sprak ik aan de groeve van onzen overleden vriend, namens de Akademie, enkele woorden van hulde en dank, maar ook hier in deze vergaderzaal, waar we hem zoo vele jaren mochten ontmoeten, is het mij eene behoefte hem met een kort woord te gedenken."

»Reeds in zijn studententijd toonde Buys Ballot, welke groote verwachtingen men van hem kon koesteren, en spoedig na zijne promotie in 1844 trachtte dan ook de Regeering hem blijvend voor de wetenschap en voor de Utrechtsche Universiteit te behouden, door hem in 1845 tot lector in de wis- en natuurkunde, in 1847 tot buitengewoon hoogleeraar te benoemen; tien jaren later werd hem het ambt van gewoon hoogleeraar opgedragen. Zeker was in die dagen eene algemeene beoefening der wis- en natuurkundige wetenschappen voor één persoon minder onbereikbaar dan thans, maar als men nagaat wat Buys in de eerste jaren van zijn verblijf aan de Utrechtsche Universiteit in het licht gaf, dan staat men toch verbaasd over zijne ontzaglijke werkkracht en veelzijdigheid, eene veelzijdigheid, die geen spoor van oppervlakkigheid verraadt. Integendeel, zijne geschriften munten uit door oorspronkelijke, vaak geniale, beschouwingen en geven de duidelijkste bewijzen van de heldere inzichten van den jeugdigen geleerde in de behoeften van de verschillende deelen der wetenschap, welke hij beoefende.

In eene zijner eerste verhandelingen geeft hij verslag van zijne bekende proeven over de beweging van de geluidsbron op de toonhoogte en knoopt daaraan eene uitmuntende kritiek van Doppler's theorie vast; ongeveer gelijktijdig verschijnen zijne onderzoekingen over moleculaire krachten, en wel over de afhankelijkheid van de adhaesie van de temperatuur en over het verband tusschen kristalvorm en ato-

mistische samenstelling, terwijl hij kort daarna, in zijne schets van het onbewerktuigde rijk der natuur, een schat van nieuwe denkbeelden nederlegde, die, al vonden vele er van hier en daar bestrijding, toch later bleken grootendeels volkomen juist te zijn en een helder licht verspreidden over verschillende deelen der moleculaire physica.

Maar niet alleen muntte hij uit op dit gebied, waarop hij zich ook later zoo gaarne bewoog, ook op een gansch ander veld trad hij in diezelfde jaren als meester op. Buys Ballot had in zijne dissertatie geschreven: *Mox meteorologia disciplinae nomen jure sibi vindicabit;* en hij zorgde dat die uitspraak waar werd. In 1847 verscheen zijn baanbrekend werk: *Les changements périodiques de température dépendants de la nature du soleil et de la lune*, waarin hij tallooze waarnemingen, gedurende meer dan eene eeuw in Nederland volbracht, bewerkte en er verrassende resultaten uit afleidde, terwijl hij tevens in dit geschrift den weg aanwees, waarlangs zich de wetenschap der meteorologie moest ontwikkelen.

Voor die ontwikkeling was eene der hoofdvoorwaarden, dat ook in ons land regelmatig waarnemingen werden volbracht, en in vereeniging met zijn vriend Krecke stichtte hij in 1848 op eigen kosten een meteorologisch observatorium, dat in 1854 tot het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut werd verheven en waaraan de naam van Buys Ballot voor altijd zal verbonden blijven.

Hier vond hij nu het terrein voor zijne hoofdwerkzaamheid, en zoowel in talrijke verhandelingen als in de jaarboeken van het Instituut, legde hij de rijke vruchten zijner waarnemingen en zijner theoretische onderzoekingen neder. In 1857 maakte hij zijne wet bekend, die het verband tusschen luchtdruk en windrichting aangaf en dadelijk maakte hij daarvan door zijne stormvoorspellingen een vruchtbaar gebruik. In het algemeen was het steeds zijn streven om zooveel mogelijk van de uitkomsten der wetenschap ook voor het leven partij te trekken, en zijne onderzoekingen omtrent de windrichtingen en zeestroomingen op den weg naar Indië hebben rijke vruchten voor de praktijk afgeworpen.

Op het programma, waarvan Buys Ballot zich reeds bij den aanvang zijner wetenschappelijke loopbaan de verwezenlijking had voorgesteld, nam eene voorname plaats in, het in het leven roepen van een algemeen plan, volgens hetwelk internationale meteorologische waarnemingen inalle landen op dezelfde wijze zouden worden volbracht, en dus gemakkelijk met elkander konden worden in verband gebracht. Hij ontwikkelde zijne voorstellen in zijne in 1873 uitgegeven »*Suggestions on a uniform system of meteorological observations*", verdedigde het met kracht op eenige achtereenvolgende internationale congressen en genoot het voorrecht dat zijne denkbeelden algemeen werden aangenomen en in alle rijken de waarnemingen volgens zijne inzichten werden ingericht. Grootendeels had hij dit te danken aan zijn helder inzicht in de behoeften der meteorologische wetenschap, maar in niet mindere mate aan zijn edel, beminnelijk karakter, dat hem de hoogachting en eerbied van al zijne ambtgenooten in het buitenland verzekerde.

Niet minder krachtig ijverde Buys Ballot voor de uitzending der meteorologische poolexpeditiën, en in de bange dagen, toen verontrustende berichten nopens de Nederlandsche expeditie uit het Noorden tot ons kwamen, toonde hij, naast zijne liefde voor de wetenschap, zijn edel, hooghartig karakter, door op eigen verantwoordelijkheid een schip uit te zenden, om hulp te verleenen, waar die noodig mocht zijn.

En nu is dat rijke welbesteede leven plotseling afgebroken en is hij van ons weggenomen, dien we nog zoo lange jaren gehoopt hadden aan het hoofd zijner Inrichting te zien arbeiden, dien we nog zoo menigmaal gehoopt hadden hier te ontmoeten; want naast den man der wetenschap achtten en vereerden we den man met het edele eenvoudige karakter, die, vrij van alle eerzucht, alleen wetenschap en waarheid trachtte te bevorderen, daarvoor alles over had, en ook bij het klimmen zijner jaren blaakte van jeugdige geestdrift, waar hij een goed doel kon bevorderen.

Zijn naam zal bij allen, die de wetenschap liefhebben en beoefenen, blijven voortleven als dat van een der baanbrekers op dat gebied, maar bij ons ook als dat van een edel

mensch in den vollen omvang des woords, als dat van een hartelijken vriend.

— De Heer BEHRENS deelt een aantal nieuwe reacties mede, bestemd voor het gebruik bij kwalitatief chemisch onderzoek onder het mikroskoop. Als reagentiën worden genoemd:

Voor K en Na: bismuthsulfaat.
» Ba, Sr, Ca: stannichloride en zuringzuur.
» Ba, Sr: ammoniumbichromaat.
» Sr, Ca, Mg: kalium-natrium-tartraat.
» Al: ammoniumfluoride en thalliumsulfaat.
» Be: mercurichloride en zuringzuur.
» Ce, La, Di: zuringzuur, ferrocyankalium.
» Zu, Cd: aluminiumacetaat en zuringzuur.
» Zu, Cu, Co: ammonium-mercuri-rhodanide.
» Co, Ni: kaliumnitriet en loodacetaat.
» Pb, Bi, Te: kaliumbichromaat en kaliumhydroxyde.
» Bi, Sb, Su: zuringzuur, rubidiumchloride.
» Sb, Sn, Ti: baryumchloride en zuringzuur.

Nadere opgaven zullen in eene uitvoerige publikatie medegedeeld worden, zoodra de bewerking der in vroegere publikatiën eenigszins verwaarloosde scheidingsmethoden voldoende gevorderd is.

— De Heer MARTIN spreekt over de geologie der Kei-eilanden en, in verband daarmede, over de australisch-aziatische grenslijn, waarbij een overzicht wordt gegeven van de jongere sedimentaire afzettingen in den Indischen Archipel. Meer in het bijzonder staat spreker stil bij de geologie van Celebes en Timor, van welke eilanden het materiaal voor zijn onderzoek door de Heeren WICHMANN en WEBER van hunne reizen was meêgebracht. Wat de Kei-eilanden betreft, was het onderzoekingsmateriaal door den Heer WERTHEIM verzameld.

Op Groot-Kei is niets anders aangetroffen als eene tertiaire formatie, die zich tot meer dan 2000 voet hoogte boven

den zeespiegel verheft. De bovenste lagen dezer formati bestaan uit kalksteenen met kolossale exemplaren van *orbitoides* en behooren tot de mioceene periode; daaronder liggen kalksteenen met vele overblijfselen van *alveolina*, en deze behooren óf ook tot het mioceene gebergte óf (aan de basis) misschien reeds tot het eoceene tijdvak. Klein-Kei bestaat bijna uitsluitend uit quartaire koraalkalken en banken van *globigerina*, terwijl tertiaire gesteenten hier slechts bij uitzondering voor den dag komen. Op Koer is het archaeische gebergte aangetroffen (glimmerschiefer), buitendien andesiet; terwijl ook de tertiaire en quartaire formatie aldaar wederom optreedt.

Het eiland Koer behoort tot het gebergte, hetwelk, uitgaande van Ceram, zich tot Kisser uitstrekt en boogvormig de Banda-zee naar het oosten begrenst. Groot-Kei daarentegen behoort reeds bij het australische vasteland, want zijne geognostische gesteldheid komt overeen met die der kust van Nieuw-Guinea en wijkt geheel en al af van de bodemgesteldheid der eilanden, die spreker het maleische bekken noemt. Groot-Kei is ook veel ouder dan de eilanden van genoemd bekken, hetgeen eerst in posttertiairen tijd zijn hedendaagschen vorm in hoofdzaak heeft aangenomen.

Op Sumatra, Malakka, Banka, Biliton en in Cambodja hebben quartaire sedimenten eene geweldige uitbreiding; niet minder op Java, waar de zee tot aan het begin van den posttertiairen tijd groote gedeelten, ook in het binnenste van het eiland, bedekte. Men heeft onder anderen vele overblijfselen van nog levende soorten van walvisschen in Soerakarta gevonden. Op Borneo strekt zich het quartaire gebergte langs de rivier en tot diep in het binnenland uit, en op Celebes zijn zelfs de meren van Sindenreng en Tempe nog in een nauwelijks verstreken tijd met den oceaan verbonden geweest. Wichmann heeft van daar hedendaagsche zeeschelpen medegebracht, die gedeeltelijk zelfs hare kleur hebben bewaard. Spreker kon voor het ontstaan van de meren van Celebes ook nog eene collectie en aanteekeningen raadplegen, die C. J. van Schelle met het oog op het meer van Limbotto had gemaakt. Het meer van Limbotto is, evenals de meren van Sindenreng en Tempe,

nog in een nauwelijks verstreken tijd met den oceaan in onvolledige verbinding geweest, vermoedelijk door een kanaal in quartaire riffen of quartaire banken; daarna werd het eiland door het zich terugtrekken van de zee vergroot, en een riviertje stort zich nu door het oude verbindingskanaal in zee uit. Dit riviertje verklaart ook, waarom later de meren spoedig het zoutgehalte hebben verloren. Tal van meren op Celebes komen in vorm en ligging met de genoemde meren overeen, en het is mogelijk, dat die allen langs denzelfden weg zijn ontstaan, al valt dan de vorming daarvan voor een gedeelte zeker in eene vroegere (tertiaire?) periode. Op Saleijer, Adenara en Solor zijn ook quartaire vormingen bekend geworden.

De eilanden van het maleische bekken zijn dus in posttertiairen tijd aanmerkelijk vergroot geworden. Daartegenover staat echter, dat ook eene afneming van land moet hebben plaats gehad, waarvan de oorzaak in tektonische veranderingen en in de erosie door de zee is te zoeken. Het voorkomen van *Elephas indicus* in quartaire tingronden van Banka en dat van andere fossiele olifanten op Java en Borneo, die met soorten uit de Siwaliks van Britisch-Indië geheel overeenkomen, bewijst den samenhang met het vasteland van Azië gedurende het plioceene en gedeeltelijk nog gedurende het quartaire tijdvak.

Timor is, evenals Groot-Kei, zeer verschillend van de eilanden van het genoemde bekken. De kolenkalk heeft hier een eigenaardig voorkomen; krijtlagen ontbreken, daarentegen is door WICHMANN een kalksteen met *nummulites* en *alveolina* gevonden, die vermoedelijk even oud is als de Khirthargroep in Engelsch-Indië. In overeenstemming met de eilanden van den maleischen boog, heeft echter Timor in het binnenland plioceene en aan de kust quartaire sedimenten. Daarentegen wijkt de richting van Timor, evenals die van Groot-Kei, zeer opmerkelijk af van de richting der eilanden beoosten Java, terwijl de grenslijn der ondiepe zee (de 200 metergrens), die zich tusschen Australie en Nieuw-Guinea uitstrekt, overeenkomt met de strekking van Kei en Timor. Spreker betoogt, naar aanleiding daarvan, dat bedoelde

eilanden als de opgestuwde rand van het australische vasteland te beschouwen zijn; de grenslijn moet geognostisch bewesten Groot-Kei en in het Noordwesten van Timor getrokken worden, al is bedoelde lijn niet zoo scherp aan te toonen als eene politische grenslijn. Eene scherpe scheiding bestaat tusschen Azië en Australië evenmin als tusschen de continentale massa's van Noord- en Zuid-Amerika. In geen geval echter laat de grenslijn van WALLACE zich verdedigen, wanneer men de geologie bij de beoordeeling daarvan te hulp roept.

(Het artikel zal binnen kort meer uitvoerig en in het Duitsch verschijnen in het *Tijdschr. v. h. Kon. Ned. Aardrijkskundig Genootschap* te Amsterdam).

— De Heer BEIJERINCK handelt over lichtvoedsel en plastisch voedsel van lichtbacteriën.

Van de zes tot nu toe bekende soorten van lichtbacteriën, vereischen een viertal, namelijk de de voedingsgelatine niet smeltende *Photobacterium phosphorescens* en *Ph. Pflügeri*, van lichtende visch, en de Oost-zee lichtbacteriën, *Ph. Fischeri* en *Ph. balticum*, behalve *pepton*, nog een tweede koolstofverbinding, zooals *glycerine, glucose* of *asparagine*, voor hare volledige voeding, dat is om te lichten en te groeien. Zij kunnen *Pepton-koolstof bacteriën* genoemd worden.

De gelatine sterk smeltende lichtbacteriën van de West-Indische en de Noordzee, *Ph. indicum* en *Ph. luminosum*, kunnen van *pepton* alleen lichten en groeien. Het zijn dus *Peptonbacteriën.*

Andere bacteriën kunnen hare stikstof nog ontleenen aan amiden: de *Amidbacteriën*, of aan *ammoniak*: de *Ammoniakbacteriën.* Ook schimmels, gistsoorten en sommige protozoën, laten zich in dit stelsel rangschikken.

Photobacterium Pflügeri geeft wellicht met pepton en *glucose*, maar niet met *pepton* en *maltose*, terwijl *Photobacterium phosphorescens* zoowel met *glucose* als met *maltose* en verwante suikers licht ontwikkelt. Mengt men nu in een *Phosphorescens-peptongelatine* stijfsel, en plaatst daarop *ptyaline*, *pancreasdiastase* of *urindiastase* (*nefrozymase*), dan ontstaan lichtvelden.

Plaatst men deze zelfde diastasesoorten op een *Pflügeri-peptonstijfselgelatine*, dan ontstaan echter geen lichtvelden, waardoor bewezen is, dat in dit geval volstrekt geen glucose gevormd wordt, wat in den laatsten tijd juist wel is geloofd.

De lichtontwikkeling gaat steeds gepaard met den overgang van peptonen in georganiseerde, levende stof, onder den invloed van vrije zuurstof.

— De Heer FORSTER herinnert, dat hij reeds in het jaar 1888 zuivere culturen van lichtende bacteriën aan de Afdeeling vertoonde en eenige bijzonderheden uit het leven dier organismen ter sprake bracht. Thans wenscht hij aan die mededeelingen toe te voegen dat lichtende bacteriën, zooals hem door proeven op dieren en menschen gebleken is, geene pathogene eigenschappen hebben: eene uitkomst, in zoo verre van belang, als voedingsmiddelen, aan de zee ontleend, soms met lichtende bacteriën besmet zijn.

— Eene verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht, »Over de regeling der bloedbestanddeelen bij kunstmatig hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie", door den Heer PEKELHARING, namens den schrijver, aangeboden voor de werken der Akademie, wordt om advies in handen gesteld van de Heeren ENGELMANN en DE VRIES.

— De Heer BIERENS DE HAAN biedt voor de boekerij der Akademie aan: Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XVII, Stuk 1.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

OVER LICHTVOEDSEL

EN

PLASTISCH VOEDSEL VAN LICHTBACTERIËN *).

DOOR

M. W. BEIJERINCK.

1. Overzicht van de tot nu toe bekende soorten van lichtbacteriën.

Het aantal mij tot nu toe bekend geworden lichtbacteriën bedraagt in het geheel zes. Twee daarvan heb ik onder twee of meer variëteiten leeren kennen. Ik acht het wenschelijk een kort overzicht van de hoofdsoorten te laten voorafgaan, daar voortgezette studiën eenige wijziging hebben gebracht in datgene wat ik reeds vroeger daarover in het licht gaf †).

Allereerst is mij gebleken, dat de gewone, de gelatine niet smeltende lichtbacteriën van lichtende visch tot twee scherp gekarakteriseerde soorten behooren §). De sterkst lichtende van dit tweetal en daardoor tevens de sterkst lichtende van alle tot nu toe bekende lichtmikroben, zal ik met den naam van *Photobacterium Pflügeri* Ludwig bestempelen **). Den tweeden

*) Onderzoek uitgevoerd in het Bacteriologisch Laboratorium der Nederlandsche Gist- en Spiritusfabriek te Delft.

†) *Archives Néerlandaises.* T. 23, p. 401, 1889.

§) De Heer J. B. Tilanus heeft mij medegedeeld, dat hij reeds geruimen tijd geleden tot een overeenkomstig resultaat was gekomen bij zijn onderzoek van de lichtbacteriën in het laboratorium van Prof. Forster te Amsterdam.

**) F. Ludwig, *Micrococcus Pflügeri*, *Hedwigia*, n°. 3, 1884 en Ueber die spectroscopische Untersuchung photogener Pilze, *Zeitschr. f. Mikroskopie.* Bd. I, p. 190, 1884.

iets zwakker lichtenden vorm wensch ik *Ph. phosphorescens* te blijven noemen.

Ph. Pflügeri heb ik tweemaal van zeevisch geïsoleerd *), *Ph. phosphorescens* daarentegen herhaalde malen, zoodat eerstgenoemde soort veel zeldzamer is dan de tweede.

Laat ik hier nog opmerken, dat deze lichtbacteriën, bij het eerst in cultuur brengen, eenigszins afwijkende eigenschappen bezitten, vergeleken met wat zij later zijn, en, dat vooral *Ph. phosphorescens* aanvankelijk verschillen vertoont in lichtkracht en in meerder of minder vastheid of taaiheid der koloniën en entstrepen: verschillen die bij voortgezette culturen verdwijnen.

Bij het cultiveeren op een gewone peptonhoudende voedingsgelatine, is de gedaante van *Ph. phosphorescens* bij jeugdige culturen, die van meer of minder bolronde of langwerpige leedjes of mikrokokken, welke veelal als tetraden of sarcinegroepjes tegen elkander liggen, maar gemakkelijk losgaan en dan in zeewater eigen beweging vertoonen. Meestal ziet men in elke bacterie één of twee donkerder vlekjes, die wellicht celkernen vertegenwoordigen.

Ph. Pflügeri is onder overeenkomstige omstandigheden meer langgerekt en vertoont minder neiging tot de sarcineachtige rangschikking. Ook in de staafjes dezer soort bemerkt men de eigenaardige kernvlekjes, en bij het mikroskopisch onderzoek in zeewater zijn ook hier zeer talrijke individuen in matig snelle beweging.

De beide genoemde soorten vergisten laevulose en glucose onder afscheiding van gelijke hoeveelheden koolzuur en waterstof. Maar ten opzichte van maltose vertoonen zij een groot verschil. Want terwijl *Ph. phosphorescens* maltose kan vergisten en als lichtvoedsel assimileeren op dezelfde wijze als glucose en laevulose, brengt *Ph. Pflügeri* daarentegen met de maltose volstrekt geen licht voort en geeft daarmede evenmin aanleiding tot gisting.

---

*) Schol en bot op de vischmarkt te Delft gekocht, worden na 2 of 3 dagen in den kelder van het bakteriologisch laboratorium der Gistfabriek bewaard bijna zonder uitzondering in meerder of minder mate lichtend.

Maltose wordt dus door *Ph. phosphorescens* wèl, door *Ph. Pflügeri* niet geassimileerd.

Een ander tweetal bestaat uit de lichtbacteriën van de Oost-zee. Ik ontving beide, gelijktijdig met een daartusschen in staande variëteit, welke ik niet nader onderzocht heb, van Prof. FISCHER te Kiel. Een dezer soorten werd door FISCHER beschreven *) en later door mij *Ph. Fischeri* genoemd. Gedurende de eerste $^3/_4$ jaren van voortloopende culturen heeft zij bij mij evenals bij FISCHER de eigenschap gehad om de gelatine sterk te smelten, dit vermogen is bij mij voortdurend afgenomen en in Januari 1890 was het geheel verloren.

De tweede soort, die ik als *Ph. balticum* bestempelen zal, (Prof. FISCHER zond mij het preparaat als: »Einheimischer Leuchtbacillus dünne Auflagerung, Ia neu, sehr langsam verflüssigend"), smolt gedurende het genoemde tijdvak de cultuurgelatine volstrekt niet. Daar de overeenkomst in de meeste andere opzichten met *Ph. Fischeri* groot is, heb ik beide lang voor modificatiën gehouden van één en dezelfde soort, en vóór deze opvatting sprak nu onlangs weer het feit dat in Januari 1890, toen *Ph. Fischeri* het gelatine smeltend vermogen bijna volkomen had verloren, *Ph. balticum* voor het eerst in mijne culturen duidelijk sporen van smelting is begonnen te vertoonen. Bij nader onderzoek bleek dit nieuwe verschijnsel te berusten op het uiteenvallen van *Ph. balticum* in twee variëteiten, waarvan de eene de gewone vorm schijnt gebleven te zijn, terwijl de andere sterk smelt. †) Wat hierbij merkwaardig is, is dat de smeltende kracht dezer variëteit van dag tot dag toeneemt, zoodat thans (4 Maart) uit een bacterie met geringe vegetatiekracht, gelijk *Ph. bal-*

*) *Centralblatt f. Bacteriologie* Bd. 3, p. 105, 1888.

†) Ik moet hier opmerken, dat een hoog peptongehalte van de cultuurgelatine het smelten daarvan door de lichtbacteriën tegenwerkt, zoodat bijv. *Ph. Fischeri* nog smelt, groeiende op een vischgelatine met ½ pCt. pepton, terwijl dit niet meer geschiedt bij een peptongehalte van 1 pCt. Evenzoo bij *Ph. luminosum* en *Ph. indicum*, ofschoon deze beide laatste weldra den weerstand door de peptonen geboden, overwinnen.

ticum dit tot nu toe bij mij geweest was, een nieuwe vorm is ontstaan, die zeer actieve eigenschappen en sterke vegetatiekracht bezit. Terwijl ik er nimmer in kon slagen om met *Ph. balticum* lichtvloeistoffen te maken, gaat dit thans met de smeltende modificatie gemakkelijk en wat mij daarbij uiterst interessant voorkomt, is dat in deze vloeistoffen het lichten beheerscht wordt door pepton, terwijl glycerine daarbij werkeloos is. Hoe groot moet de verandering zijn, welke in de levende molekulen onzer soort heeft plaats gehad, om een zoodanige wijziging in het voedingschemisme te veroorzaken; of, juister wellicht, hoe dicht grenst het labiele evenwicht in de moleculaire verhoudingen der levende stof van een veranderlijk organisme aan een stabielen toestand, die door tot nu toe onbekende invloeden plotseling of langzamerhand bereikt, een volledige verandering in de betrekking van dat organisme tot de omgeving kan teweegbrengen

Ik behoef er wel nauwelijks op te wijzen, dat voor het doel, hetgeen ik door dit opstel wensch te bereiken, een nader ingaan op deze verschijnselen van veranderlijkheid overbodig is. Ik gevoel, dat de scherpte van elk tot nu toe verkregen resultaat daardoor zelfs eenigszins wordt benadeeld. Maar wanneer wij, gelijk ik dit in het vervolg zal doen, onze aandacht meer in het bijzonder richten op die vormen, welke zich tot nu toe als voldoende constant hebben getoond, namelijk *Ph. phosphorescens* en *Ph. indicum*, en de beschouwing der drie overige soorten, *Ph. balticum*, *Ph. Fischeri* en *Ph. luminosum* voorloopig ter zijde laten, dan behoudt deze behandeling toch ongetwijfeld haar waarde.

Maar ik moet nog even terugkomen op de vergelijking tusschen *Ph. Fischeri* en de smeltende modificatie van *Ph. balticum*. Zijn deze nu ook wellicht identiek? Aanvankelijk scheen het uiterlijk der koloniën en het mikroskopisch beeld deze onderstelling te steunen, maar thans overtreft de proteolytische werking van *Ph. balticum* die van *Ph. Fischeri*, zelfs toen ik deze soort pas ontving, en, wat opmerkelijk daarbij is, er is een veel grootere toenadering tot *Ph. luminosum* gekomen dan tot de genoemde schijnbaar zoo uiterst na verwante soort. Bovendien ontdekte ik nog een zeer eigenaardig verschil

tusschen de beide vormen, dat ik hier niet voorbij mag gaan. Het bestaat daarin, dat *Ph. Fischeri* zeer gevoelig is voor de werking van rietsuiker, dat is, dat een uiterst geringe hoeveelheid daarvan de lichtkracht dezer soort sterk verhoogt, terwijl reeds $^1/_2$ pCt. haar uitdooft en den groei belemmert. Hierbij is directe assimilatie van de rietsuiker betrokken, want een inverteerend enzym wordt door *Ph. Fischeri* niet afgescheiden. *Ph. balticum* is daarentegen in hooge mate ongevoelig voor rietsuiker, en groeit en licht op voedingsgelatine met 3 à 5 pCt. dezer stof nog voortreffelijk.

De Oostzee-lichtbacteriën zijn na verwant aan de twee inlandsche vormen van zeevisch bovengenoemd, ofschoon de vorm der staafjes bij beide groepen sterk verschilt. Deze toch zijn bij de Oostzee-bacteriën uitermate fijn en stemmen veel meer met gewone vibrionen overeen dan die van visch; ook zijn zij veel bewegelijker, en niettegenstaande hun uiterste kleinheid toch beter geschikt tot het waarnemen van den zwermdraad. De beschouwing onzer beide soorten wensch ik te besluiten met de opmerking, dat ik noch bij *Ph. balticum* noch bij *Ph. Fischeri* verschijnselen van gisting heb kunnen opmerken.

Alle vier tot nu toe besproken soorten kunnen het best gecultiveerd worden op vischafkooksel in zeewater, waaraan 1 pCt. glycerine en $^1/_2$ pCt. asparagine zijn toegevoegd, gestold met 8 pCt. gelatine.

Het derde tweetal van de mij bekende vormen bestaat eveneens uit twee verwante soorten: *Ph. indicum* uit de West-Indische zee en *Ph. luminosum* uit de Noordzee, die echter, zooals mij meer en meer blijkt, zeer verschillend zijn van de vier eerstgenoemde. Zij smelten de gelatine snel en volledig, en gelijken in vele opzichten op de gewone rottingsspirillen en *Proteus*-vormen. Wij zullen hieronder zien, dat deze overeenkomst niet alleen in uiterlijke, maar ook in innerlijke eigenschappen is op te merken.

De lichtkracht van *Ph. indicum* is zeer groot en volgt op die van *Ph. phosphorescens*. Wenscht men het licht zoo sterk mogelijk te zien, dan moeten de culturen op ongeveer 30° à 35°

C. *) gebracht worden. Het is echter wenschelijk om den groei en de ontwikkeling bij veel lager temperatuur te laten geschieden, bijv. bij 15° à 20° C. Doet men dit niet, dan verliezen een zeer groot aantal individuen hun lichtkracht geheel of gedeeltelijk, zoodat koloniënculturen, daarvan aangelegd, uit een bont mengsel van allerlei lichtintensiteiten bestaan. De groeikracht der zwak lichtende koloniën is gewoonlijk belangrijker dan die van de sterk lichtende. Door de herhaalde en langdurige selectie, waartoe ik door de genoemde omstandigheid aanleiding heb gevonden, is, naar ik meen, de lichtkracht van *Ph. indicum* iets hooger geworden dan toen ik in Juni 1888 deze soort ontving van Prof. Fischer, aan wien de isoleering uit lichtend zeewater bij een West-Indische reis in Januari 1886 gelukt was †).

Ph. luminosum, uit het zand van de Noordzee door mij in den zomer van 1888 geïsoleerd §), bestaat in de gewone culturen uit zeer fijne, snel zwemmende vibrionen of uit langere of kortere spirillen, die zich bij het zwemmen krommen en buigen, terwijl *Ph. indicum* grootendeels uit rechte staafjes bestaat, die veel minder buigbaar zijn. De lichtkracht van *Ph. luminosum* is gewoonlijk veel zwakker dan bij *Ph. indicum*, kan echter onder zekere omstandigheden tijdelijk die van laatstgenoemde soort evenaren, om echter dan spoedig weder tot den minder helderen toestand terug te keeren. Zeer langdurige blootstelling (een maand of langer) van jeugdige culturen aan een lage temperatuur (bijv. van een koud vertrek, afwisselend tusschen 3° en 12° C.) brengt onze bacterie in zoodanigen toestand, dat strepen, daarvan getrokken op een goeden voedselbodem, bij ± 15° C. hun hoogste lichtkracht verkrijgen. Dit verschijnsel duurt dan echter slechts korten tijd, terwijl bij lagere temperaturen, bijv. beneden 10° C., de sterke lichtkracht langduriger behouden blijft.

---

*) De optimumtemperaturen van de lichtkracht schijnen te dalen met het stijgen van de osmotische spanning van het voedsel.

†) Overigens is deze soort dus gedurende vier jaren constant gebleven.

§) Le *Photobacterium luminosum*, bactérie lumineuse de la mer du Nord. *Arch. Néérl.* T. XXIII, p. 401, 1889.

Bij temperaturen nabij 20° verliest *Ph. luminosum* in de gelatineculturen zijn lichtkracht bijna geheel, de koloniën groeien dan echter zeer sterk, gedragen zich als echte *Proteus*-vormen en brengen stinkende rottingsproducten uit hun voedingbodem voort.

Evenals alle lichtbacteriën zijn *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* uiterst gevoelig voor kleine hoeveelheden suiker in hun voedsel. Reeds 1 pCt. glucose, of nog minder, is voldoende om de lichtkracht van *Ph. luminosum* geheel uit te dooven; 3 à 5 pCt. doet het smelten en zelfs den groei geheel ophouden, hoogere gehalten kunnen doodelijk worden. *Ph. indicum* is wel is waar iets minder gevoelig en kan vooral bij aanwezigheid van asparagine, welke de schadelijke werking van glucose eenigszins compenseert, zelfs nog bij 4 pCt. glucose licht geven, maar onderzoekt men de koloniën, die in dit geval de gelatine volstrekt niet smelten, mikroskopisch, zoo vindt men dat de bacteriën daarin niet meer op bacteriën, maar op kleine, onregelmatige protozoën gelijken. Zeer spoedig dooft het licht onder zulke omstandigheden uit.

Deze feiten berusten op de vorming van een zuur in de lichaamszelfstandigheid der bacteriën, die alleen op zwak alkalischen of neutralen bodem tot volledige ontwikkeling en ontplooiing hunner eigenschappen komen. Een zeer geringe hoeveelheid glucose of laevulose in het voedsel, bijv. $^1/_{20}$ of $^1/_{30}$ pCt., schijnt echter onder zekere omstandigheden in geringe mate groei en lichtkracht te kunnen verhoogen, maar het hoofdpunt voor ons is, dat bij *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* peptonen alléén voor deze beide functiën voldoende zijn.

---

2. Methoden van onderzoek.

Het principe waarop de voor de studie van *Ph. phosphorescens* gevolgde onderzoekings-methode berust is de vermenging van een zeer groot aantal dezer bacteriën met een voedselmassa, die ontoereikend is, alleen enkele bekende

bestanddeelen van het noodzakelijke voedsel bevat, en te bepalen door toevoeging van welke stoffen dit voedsel volledig gemaakt, groei en lichtfunctie daarmede opgewekt kunnen worden. Dit kan geschieden zoowel in cultuurvloeistoffen als in cultuurgelatine. In de voedingsvloeistoffen is de lichtwerking zeer goed te beoordeelen, maar de juiste schatting van de vermenigvuldiging der bacteriën is daarin moeielijk. Daarentegen laten zich in cultuurgelatine zoowel lichtontwikkeling als groei met groote scherpte door contrast bepalen en wel op de volgende wijze *).

In een voor het lichten geschikte voedingsgelatine, waarin een der voedselbestanddeelen in overmaat voorkomt, wordt een zeer groot getal bacteriën van de te onderzoeken soort gebracht. Uitgegoten tot een dunne laag, ontstaat daaruit een sterk lichtende plaat. Na eenigen tijd houdt het lichten en daarmede de groei op: van dit oogenblik af aan is alleen dat bestanddeel van het voedsel, dat in overmaat was toegevoegd, nog beschikbaar. Plaatst men nu op de gelatinelaag de stoffen, welke onderzocht zullen worden, dan lossen deze in de gelatine locaal op en diffundeeren van het oplossingscentrum uit in een cirkelvormig veld naar alle zijden. Heeft men nu hierbij te doen met lichtvoedsel, dan ontstaat weldra, soms reeds na eenige seconden, een lichtveld, dat zich uitbreidt met de diffusiesnelheid der betrokken stof, zoolang totdat deze geheel en al door de bacteriën gebonden is, die van dit oogenblik af voortlichten met de reserve, welke zij van die stof in hun lichaamszelfstandigheid hebben opgehoopt. Hierbij valt het in het oog, dat de assimileerbare suikersoorten sterker geabsorbeerd worden dan het lichtvoedsel bij uitnemendheid: de glycerine. De uitgebreidheid der diffusievelden is echter behalve van

*) Men vindt de beschrijving dezer methode, in hare toepassing op de lichtbacteriën, in de dissertatie van Dr. H. P. Wijsman: De diastase beschouwd als mengsel van maltase en dextrinase, Amsterdam 1889, toegepast ook op andere mikroben in mijn opstel: l'Auxanographie ou la méthode de l'hydrodiffusion dans la gélatine, appliquée aux recherches microbiologiques. *Archives Néerl.* T. 23, p. 367, 1889 en in *Versl. en Mededeelingen d. Kon. Akad. v. Wet., Afd. Natuurk.*, Deel VI, p. 123, 1889.

de meer of minder gemakkelijke absorbeerbaarheid door de bacteriën, natuurlijk ook afhankelijk van de diffusiesnelheid der betrokken stof.

Is het voedsel van dien aard, dat de groei en de celdeeling daardoor kunnen onderhouden worden, dan veroorzaakt het niet alleen een uit den aard der zaak tijdelijk lichtverschijnsel, maar tevens een blijvend »groeiveld", een »auxanogram" *), gekarakteriseerd door de tallooze bacteriënkoloniën, welke zich in het diffusieveld van de voedingsstof veel sterker hebben ontwikkeld dan daarbuiten, zoodat daardoor een scherp contrast ontstaat. Werkt het voedsel op deze wijze, dan kan het »plastisch" genoemd worden. Laat ik hier reeds opmerken, dat lichtvoedsel wel altijd plastisch voedsel moet zijn, maar dat omgekeerd plastisch voedsel niet altijd lichtgevend is, zoodat bij de lichtbacteriën het lichten noch tot het ademhalingsproces, noch tot den groei in een noodzakelijken samenhang staat. Dit doet reeds vermoeden, wat andere feiten zoo goed als zeker doen schijnen, dat slechts een deel van het in vrijheid gestelde arbeidsvermogen, zelfs bij sterk lichtende culturen, als licht behoeft te worden uitgestraaad. Intusschen houd ik het op grond van waarnemingen, waarbij de groei der lichtbacteriën bijna is uitgesloten terwijl de lichtontwikkeling voortgaat, toch voor waarschijnlijk, dat het verband tusschen ademhaling en lichten zoo innig is, dat de totale energie, in het lichtvoedsel aanwezig, onder bepaalde omstandigheden als licht kan ontwijken.

Aan de gelatinemethode op de beschreven wijze toegepast, zijn velerlei voordeelen verbonden, die hier niet opnieuw opgesomd behoeven te worden. Alleen wil ik er op wijzen, dat daardoor bijv. het onderzoek van de suikers, hetwelk tengevolge van de daaruit gevormde zuren in vloeistof-culturen groote moeilijkheden aanbiedt, gemakkelijk wordt gemaakt, daar het zuur weg kan diffundeeren in de gelatine.

Bij alle proeven, met gelatine te nemen, moet steeds in het oog worden gehouden, dat de handelsgelatine een weinig »peptonen" bevat. Ik wist dit aanvankelijk niet en heb

*) Men vergelijke mijn opstel: l'Auxanographie, boven genoemd.

daarom mijn beslissende proeven steeds in voedingsoplossingen van bekende samenstelling herhaald. Zoodoende ben ik tot het besluit gekomen, dat geene andere voor lichtbacteriën-assimileerbare stikstofhoudende of stikstofvrije stoffen dan peptonen als verontreiniging in de handels-gelatine voorkomen.

De gelatine smeltende bacteriën, zelfs *Ph. balticum* en *Ph. Fischeri*, veranderen de gelatine zelve, door hun enzymen, gedeeltelijk in peptonen *), zoodat onze gelatinemethode hier niet op dezelfde wijze toepasselijk blijft.

Dit laatste geldt zeer in het bijzonder ten opzichte van *Ph. indicum* en *Ph. luminosum*. Brengt men *Ph. indicum* in genoegzame hoeveelheid in een oplossing van zuivere gelatine in zeewater om daarvan na stollen eene sterk lichtende gelatineplaat te verkrijgen, dan is de trypsinvorming zoo gering, dat van smelten niets is te bemerken. Plaatst men op de oppervlakte dezer laag de stoffen welke men wenscht te onderzoeken, dan geven deze, indien daardoor een eenigszins belangrijke groei ontstaat, tevens tot sterke smelting aanleiding, waardoor blijkbaar, wegens de peptonvorming, ook de voedingsverhoudingeen een verandering moeten ondergaan. Wel is waar verandert de gelatine daarbij in lichtvoedsel, dat bij lage temperaturen slechts zwak werkt, veel zwakker bijv. dan de lichtstoffen, welke in vischextracten voorkomen, maar dat toch de beoordeeling der proeven moeielijk maakt. *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* geven dientengevolge minder twijfelachtige resultaten bij het onderzoek in vloeistofculturen, waarbij men de samenstelling van het voedsel eenigszins beter meester is en ook gemakkelijker hooge temperaturen kan toepassen. Natuurlijk gaat in vloeistoffen het groote voordeel, voortvloeiende uit de concentratieverschillen, die in de diffusievelden op gelatineplaten van zelve ontstaan, verloren. Verder wordt bij insluiting in agar-agar, door een mij niet geheel duidelijke reden, de groei zeer belemmerd, zoodat uit proeven, daarmede genomen, niet veel te leeren valt.

---

*) Bij deze en bij alle verdere proeven is ondersteld, dat de noodige phosphaten evenals de overige aschbestanddeelen in het voedsel tegenwoordig zijn.

Intusschen laat zich uit de verschillende langs deze drie wegen verkregen waarnemingen afleiden, dat de voedingsconditiën dezer bacteriën geheel andere zijn dan die van *Ph. phosphorescens* en *Ph. Pflügeri*, met welke beide laatste soorten, gelijk wij zagen, de niet of zwak smeltende vormen *Ph. balticum* en *Ph. Fischeri* het naast overeenstemmen.

Deze algemeene voedingsconditiën zullen in § 4 nader beschouwd worden.

Photobacterium phosphorescens en *Ph. Pflügeri* hebben, gelijk vroeger reeds is opgemerkt, het vermogen om glucose, laevulose, maltose en galactose in gisting te brengen, onder afscheiding van nagenoeg gelijke hoeveelheden koolzuur en waterstof. Dit is gemakkelijk waar te nemen bij steekculturen in voedingsgelatine, welke de genoemde suikers in niet te hoog gehalte, bijv. $^1/_8$ pCt. glucose of $1^1/_2$ pCt. maltose, of minder, bevatten. Fraaier worden deze gistingsproeven, wanneer men de suikerhoudende voedingsgelatine met een groot aantal lichtbacteriën vermengt en dan in een wijde buis giet en laat stollen. Weldra, bijv. na 24 uren, begint de gasontwikkeling, waardoor zich groote blazen vormen, die door de gelatine vastgehouden worden. De gisting van de suiker geschiedt niet anders dan bij aanwezigheid van pepton en zuurstof, de laatste in den toestand van een zuurstofreserve aan het lichaam der bacteriën gebonden *). Zoodra deze zuurstof verbruikt is, houdt de gisting geheel op. Tot lichtontwikkeling geeft zij nimmer aanleiding, wel tot een zekere mate van groei. Een groote overmaat van vrije zuurstof houdt de gisting tegen. Men kan dit aantoonen door vermenging van de voedingsgelatine met een weinig waterstofsuperoxyde; de lichtbacteriën maken daaruit de zuurstof vrij, en eerst wanneer deze verdwenen is begint de vorming der gasblazen van koolzuur en waterstof. Welke de producten der gisting zijn behalve koolzuur en waterstof, en wat er wordt van de groep C^3 H^6, die na onttrekking der genoemde gassen van de glucose overblijft, is mij nog niet bekend.

*) Men verg. mijn opstel : Les bactéries lumineuses dans leur rapports avec l'oxygène. *Archiv. Neérl.* T. 23, p. 416, 1889.

Laat ik hier nu nog bijvoegen, dat de lichtbacteriën een sterk reduceerend vermogen bezitten, hetgeen op de gewone wijze zichtbaar kan worden gemaakt door aan de gelatine- of vloeistofculturen indigoblauw of salpeter toe te voegen. Deze functie is in hooge mate afhankelijk van nog niet nader onderzochte bijomstandigheden.

---

3. Bijzondere voorzorgen.

Om *Photobacterium phosphorescens* in voldoende hoeveelheid en in een toestand te verkrijgen, geschikt om daarmede licht- en groeiproeven uit te voeren, maak ik gebruik van vischafkooksel in zeewater *), waaraan ik 1 pCt. pepton en 2 pCt. glycerine toevoeg. Op zoodanige gelatine getrokken strepen lichten na 24 uren schitterend en na 2 of 3 dagen heeft zich een grijsachtig gele bacteriënmassa gevormd van zeer weeke consistentie, die zich gemakkelijk in gelatine of zeewater laat verdeelen en in zóó groote hoeveelheid, dat men daarmede directe proeven kan nemen, zonder dat voorafgaande vermenigvuldiging behoeft afgewacht te worden.

Voegt men aan de genoemde cultuurgelatine geen glycerine toe, dan is de groei daarop uiterst beperkt en de hoeveelheid gevormde bacteriën zóó gering, dat deze op zichzelve niet toereikend zijn voor de uitvoering der beoogde proeven, maar dit eerst worden na te zijn vermengd met een voedingsgelatine, waarin zij zich kunnen vermenigvuldigen en koloniën vormen. Blijkbaar wordt daarmede, zoo geen bron van fouten, dan toch een oorzaak voor oponthoud in het verloop der proefneming gebracht, welke op de eerstgenoemde wijze kan vermeden worden.

Behalve door glycerine, kan men den groei begunstigen door asparagine aan de visch-zeewater-pepton-gelatine toe te voegen; ook daarbij ontstaat rijkelijk en uitmuntend lich-

---

*) Het gebruik van vischaftreksels met 3 pCt. keukenzout voor de culturen van lichtbacteriën werd aanbevolen door C. B. Tilanus, *Tijdschrift voor Geneeskunde*, Dl. 2, p. 169, 1887.

tend materiaal. Wanneer men daarentegen aan de visch-zeewater-peptongelatine tegelijkertijd glycerine en asparagine toevoegt, dan ontstaat aanvankelijk een zeer vaste bacteriën-massa, die zich in gelatine en in zeewater slechts moeielijk laat verdeelen en zelfs met een platinadraad nauwelijks fijn is te wrijven. Eerst na een aantal dagen worden ook deze culturen week en bruikbaar. Later heeft in de strepen afsterven van vele individuen plaats, waardoor men, bij verdeelen in gelatine, een onnoodige bron van troebeling invoert, terwijl zelfs een groote hoeveelheid sterk lichtende, levende bacteriën een volkomen doorzichtige gelatine-plaat van groote lichtkracht kunnen opleveren. Goed toebereide gronden bezitten een zoo hooge mate van chemische gevoeligheid, dat zij op vele stoffen reeds na eenige seconden reageeren, in het bijzonder op laevulose en glucose. De Bunsen'sche vlam-reacties vinden hier hun physiologisch analogon, ja, zij kunnen zelfs uit het oogpunt van de langdurigheid der verschijnselen door het bacteriënlicht verre worden overtroffen (verg. bijv. pag. 260).

In sommige gevallen, bijv. wanneer men alle individuen in nagenoeg gelijke conditiën ten opzichte van de zuurstof wil brengen, is het wenschelijk de lichtbacteriën als gewone koloniëncultuur op de gelatine uit te zaaien. Men giet de voedingsgelatine daartoe in een glasdoos en overgiet ze, na het stollen, met steriel zeewater, waarin de lichtbacteriën verdeeld zijn. Door de bevochtiging hechten zich aan de gelatinelaag hier en daar bacteriën vast, die weldra tot koloniën uitgroeien. Op deze wijze verkrijgt men platen, waarop men zelfs smeltende bacteriënkoloniën, zooals die van *Ph. indicum* en *Ph. luminosum*, aan de werking van diffundeerende stoffen onderwerpen kan.

Maar, gelijk vroeger reeds is opgemerkt, verdient de vermenging der bacteriën in groot aantal met de gelatine, wanneer daartegen overigens geen bezwaren bestaan, vooral daarom de voorkeur, omdat er aanvankelijk, behalve het éénzijdig in overmaat toegevoegde bestanddeel van het voedsel, geringe hoeveelheden lichtvoedsel aanwezig zijn, welke onvermijdelijk als verontreinigingen uit het zeewater, uit de

gelatine, uit het daarmede gemengde voedselbestanddeel, of eindelijk uit het bacteriënslijm zelve afkomstig zijn. Worden nu een zeer groot aantal licht-bacteriën met zulk een verontreinigde gelatine vermengd, dan is weldra alles wat als volledig plastisch- of lichtvoedsel kan dienen, dat is al wat daarin in de verhouding der »plastische aequivalenten" (zie § 5) voorkomt, opgebruikt, in de bacteriën getrokken, om in levende bacteriënzelfstandigheid te veranderen, of daaruit als koolzuur en water onder lichtontwikkeling te ontwijken, en alleen het in overmaat toegevoegde bestanddeel van het voedsel blijft dan in zuiveren toestand in de gelatine achter. De bacteriën reinigen blijkbaar hun omgeving van alles wat op het verdere verloop der proefnemingen een storenden invloed zou kunnen uitoefenen, of de verklaring der resultaten onzeker maken.

De proeven met *Ph. phosphorescens* en *Ph. Pflügeri* moeten genomen worden bij temperaturen gelegen tusschen 10° en 15° C.

Voor het aanleggen van lichtgronden met *Ph. indicum*, hetzij in zeewater-gelatine of zeewater-agar, maak ik gebruik van culturen dezer bacteriën op visch-zeewater-gelatine met $^1/_2$ pCt. pepton en $^1/_2$ pCt. aspargine. Het is mij namelijk gebleken, dat door de aanwezigheid van asparagine het smelten veel minder wordt begunstigd dan de groei, zoodat men in een droppel van zoodanige culturen veel bacteriën en betrekkelijk weinig ongewenscht voedsel vindt. Daar het temperatuuroptimum voor de levensverrichtingen dezer soort ver boven dat van *Ph. phosphorescens*, n.l. boven 24° C. ligt, en eerst omstreeks 30° C. de hoogste lichtkracht wordt waargenomen, en daar verder agar-agar, gelijk reeds werd opgemerkt, den groei eenigszins tegengaat, zijn de proeven in cultuurvloeistoffen in dit geval voor de volledige studie van de lichtfunctie onvermijdelijk.

---

4. Voedingsvoorwaarden in het algemeen.

Alleen met *Ph. phosphorescens* heb ik zoovele proeven uit-

gevoerd, dat ik mij van de voeding daarvan met het oog op de onderzochte stoffen onder alle omstandigheden, — ééne enkele uitgezonderd, — een vrij volledige voorstelling kon vormen en ik leerde die als betrekkelijk eenvoudig kennen. *Ph. Pflügeri*, *Ph. Fischeri* en *Ph. balticum* stemmen daarmede wel in hoofdzaak overeen, maar vertoonen in bijzonderheden afwijkingen, welke ten deele belangwekkend zijn. *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* verkeeren daarentegen in een geheel op zich zelf staand geval. Van dit tweetal heb ik *Ph. indicum* nauwkeurig onderzocht, maar de voeding daarvan nog niet zoo goed begrepen als bij *Ph. phosphorescens*. De groote veranderlijkheid in de lichtfunctie van *Ph. luminosum* maakt de studie daarvan zeer moeielijk.

Beginnen wij dit algemeene overzicht met *Ph. phosphorescens*, waarmede *Ph. Pflügeri* in elk geval genoegzaam overeenstemt om onder denzelfden hoofdregel gebracht te kunnen worden.

In de volgende korte omschrijving ligt het geheele voedingsvraagstuk dezer bacteriën besloten: *Zoowel voor den groei als voor het lichten worden vereischt de gelijktijdige tegenwoordigheid van een peptonachtig lichaam, waaraan de noodige stikstof kan worden onttrokken, en van een tweede stof, die al of niet stikstof-vrij kan wezen, als koolstofbron.* Pepton alleen geeft evenmin aanleiding tot groei als tot lichtontwikkeling; amiden en ammoniakzouten van organische zuren verkeeren in hetzelfde geval als pepton, daar noch de stikstof van de amidgroep, noch die van de ammoniak assimileerbaar is. Te zamen met pepton kunnen echter zoowel deze amiden als ammoniakverbindingen tot lichtvoedsel en tot plastisch voedsel worden, onder afscheiding van de stikstof als ammoniakzout, bijv. als ammonium-magnesium-phosphaat.

Het volgende overzicht moge deze uiteenzetting nog verduidelijken:

Pepton alleen	duister en geen groei.
Asparagine alleen	» » » »
Glycerine alleen	» » » »

Appelzure ammoniak alleen	duister en geen groei.
Asparagine met glycerine	» » » »
Pepton met asparagine.	licht en groei.
Pepton met glycerine	» » »
Pepton met appelzure ammoniak . .	» » »
Pepton met asparagine en glycerine . .	» » »

Zeer merkwaardig komt mij het feit voor, dat de koolstofverbindingen, zooals glycerine, welke met pepton samen licht- en plastisch voedsel zijn, zonder pepton volstrekt niet tot lichtontwikkeling aanleiding geven. Zulke stoffen blijven in duistere culturen zeer langen tijd onveranderd aanwezig, hetgeen blijkt uit de lichtontwikkeling daarin bij peptontoevoeging. Intusschen houdt ik het voor waarschijnlijk, dat zij in een zeer langdurig tijdsverloop door de ademhaling zonder lichtontwikkeling ten slotte toch geheel verdwijnen, want, dat de ademhaling zonder aanwezigheid van vrije peptonen voortgaat, is een noodzakelijke gevolgtrekking uit wat wij weten omtrent dit proces in het algemeen, en dat daarbij koolstofverbindingen worden opgebruikt en van buiten worden opgenomen, schijnt eveneens een stelling van algemeene geldigheid te wezen. Of ook peptonen in zoodanigen zin werkzaam kunnen zijn, laat zich nog niet voldoende beoordeelen; ik geloof echter dat dit het geval is *).

Ook ten aanzien der algemeene voedingsvoorwaarden van *Ph. Fischeri* en de niet smeltende variëteit van *Ph. balticum* laat zich hetzelfde opmerken als van *Ph. phosphorescens*. Intusschen bezitten, zooals reeds vroeger werd gezegd, *Ph. balticum* en vooral *Ph. Fischeri* een zwak gelatine-smeltend vermogen, waarbij peptonen uit de gelatine ontstaan. Dit geschiedt uiterst langzaam, maar kan toch bij aanwezigheid van een koolstofverbinding, zooals glycerine, een bron van zeer langdurig licht worden.

Wat daarentegen *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* betreft, deze gedragen zich ten opzichte van het voedsel geheel anders; *zij vereischen voor hun algeheele voeding alleen pepton*

*) Wij zullen beneden zien, dat dit uit den aard der zaak zoo moet wezen bij *Ph. luminosum* en *Ph. indicum*.

of eiwitachtige stoffen, welke zij door hun krachtige proteolytische enzymen peptoniseeren, en kunnen met volle recht Pepton-bacteriën genoemd worden, in tegenstelling tot de voorgaande groep, waarop de naam Pepton-koolstof-bacteriën *) *toepasselijk is.* Het verschil, door deze benamingen uitgedrukt, komt mij voor van principieele beteekenis te wezen. Door toevoeging aan de twee genoemde van twee verdere groepen, de *Amid-* en de *Ammoniak-bacteriën*, verkrijgt men een physiologische indeeling, berustende op de stikstof-behoefte, welke niet alleen alle bacteriën omvat, maar tevens vele andere vormen van het leven.

Laat ik hier nog bijvoegen, dat nitraten door de lichtbacteriën sterk gereduceerd worden onder vorming van nitriten, en wellicht, door *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* zelfs tot ammoniakverbindingen, maar dat nitraten en nitriten evenmin als ammoniakverbindingen als stikstofbron kunnen dienst doen. Tot nu toe zijn mij zelfs nog in het geheel geen mikroben bekend geworden, welke aan salpeter- of salpeterigzuur hun stikstof kunnen ontleenen; ik twijfel echter niet of voortgezette waarnemingen zullen mij wel zoodanige vormen doen vinden, en ik houd mij bezig met het opsporen van eenvoudige reacties om hun aanwezigheid aan te toonen in mediën, welke omzettingen ondergaan, die een dergelijk onderzoek uitlokken. Dat daarbij de hypothetische vormen, welke de vrije atmospherische stikstof zouden binden, niet uit het oog worden verloren, behoef ik nauwelijks te vermelden.

Terugkeerende tot *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* heb ik nog slechts op te merken, dat verschillende toevoegingen van organische lichamen aan de peptonen, zooals rietsuiker, melksuiker, laevulose, maltose en glucose, wel is waar niet

---

*) Deze naam is niet volkomen logisch, maar ik weet geen betere te bedenken om aan te geven, dat de stikstofgroep van pepton in dit geval aanvulling vereischt door een andere, niet peptonachtige stof, om tot de georganiseerde lichaamszelfstandigheid te worden. Of evenwel de koolstof van de peptonen hierbij geheel is uitgesloten, wensch ik niet te beweren, daar mij tot nu toe omtrent de afscheidingsproducten der lichtbacteriën zeer weinig bekend is.

geheel werkeloos zijn, maar ook hier, door afscheiding van een zuur (vooral bij glucose en laevulose in belangrijke hoeveelheid) groei en lichtkracht belemmeren. Glycerine schijnt op overeenkomstige wijze te werken. Asparagine geeft daarentegen, in geringe hoeveelheid toegevoegd, aanleiding tot lichtverhooging, wellicht door de vorming daaruit van ammoniakverbindingen, welke inwendig gevormde zuren zouden kunnen neutraliseeren. In mijn vroegere mededeelingen over lichtbacteriën heb ik gezegd, dat de glycerine ook bij *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* wel degelijk als lichtvoedsel werkzaam kan zijn; ik weet niet juist te verklaren hoe ik deze fout heb kunnen maken en moet thans denken aan de mogelijkheid, dat de stoffen, toen door mij gebruikt, verontreinigingen hebben bevat. Aan te nemen, dat mijn bacteriën zelve in den loop van één jaar een zoodanige physiologische wijziging zouden ondergaan hebben, dat hun reactievermogen op de genoemde stoffen veranderd kon zijn, schijnt onmogelijk, want door een regelmatige selectie zijn mijn culturen, ten minste in alle overige opzichten *), identiek gebleven met wat zij oorspronkelijk waren. Daar ik eerst na eene lange reeks van waarnemingen tot het juiste inzicht in de beteekenis van de peptonen voor onze bacteriën ben gekomen, is het niet vreemd, dat ik aanvankelijk aan vergissingen heb blootgestaan. Intusschen is er ééne zaak ten aanzien waarvan mijn ondervinding ook thans nog te gering is, en die bij bacteriologische onderzoekingen toch een zeer belangrijke rol kan spelen. Ik meen de eigenaardige toestand, waarin de bacteriën verkeeren, welke pas uit het wild komen en voor het eerst aan de cultuurvoorwaarden van een bacteriologisch laboratorium worden onderworpen. Men bemerkt daarbij allerlei kleinere of grootere veranderingen, die een betrekkelijk snel verloop hebben en weldra tot een toestand van standvastigheid voeren, welke blijft voortbestaan. Hetzelfde is op te merken bij sommige soorten, welke men eenvoudig uit een ander bacteriologisch laboratorium ontvangt. Ik wil hier een voorbeeld noemen. Toen ik *Photobacterium indicum* en *Ph. Fischeri*

---

*) Alleen de lichtkracht onderging wellicht eene kleine verhooging.

voor het eerst van Prof. FISCHER uit Kiel ontving, was *Ph. Fischeri*, gelijk reeds is opgemerkt, sterk smeltend. Toen ik nu de eerste streepculturen dezer soorten op visch-gelatine trok, vormde zich in de nabijheid der strepen een groot getal kleine geheel geïsoleerd liggende koloniën, blijkbaar afkomstig van bacteriën, welke zich over de gelatine voortbewogen en zich van de strepen verwijderd hadden. Ik dacht aanvankelijk aan de vorming van een beslag van waterdamp, dat als vervoermiddel had kunnen dienen, maar deze verklaring bleek onjuist te zijn. Spoedig leerde het voortgezette onderzoek, dat de genoemde bijzonderheid slechts van tijdelijken aard was geweest en op een specifieken toestand van de bacteriën zelve moest berust hebben, die wellicht uit de haringgelatine, waarop zij vroeger gekweekt waren geworden, zekere bestanddeelen hadden opgenomen, welke langzamerhand in mijn culturen op visch-zeewatergelatine verloren gingen. Intusschen geloof ik niet, dat met deze soort van verandering, die blijkbaar alleen op den bewegingstoestand betrekking had gehad, een verschil in de geschiktheid om op bepaalde stoffen met licht of groei te reageeren gepaard is gegaan; voor zoodanige onderstelling ontbreekt het bewijs. Bovendien weten wij uit de schoone proeven van ENGELMANN en PFEFFER, door welke buitengewoon geringe invloeden de bewegingen der bacteriën beheerscht worden. Het kwam mij echter niet overbodig voor, op de niet volkomen zekerheid van de werkeloosheid onder alle omstandigheden van glycerine op *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* opmerkzaam te maken, ofschoon ik tegenwoordig zoodanige werkeloosheid moet aannemen op grond van al mijn latere proeven.

Ik kan deze § niet eindigen zonder gewezen te hebben op de afscheiding van diastase *) door *Photobacterium luminosum* in groote, door *Ph. indicum* in geringe hoeveel-

*) Welke omstandigheden dit verschijnsel beheerschen, is mij nog niet bekend. Aanwezigheid van suikersoorten verhindert bij lichtbacteriën (even als bij sommige andere soorten) de afscheiding van een tryptisch enzym, maar niet van diastase. Bij een onlangs door mij gevonden bacterie, die zeer veel diastase afscheidt, verhindert echter de aanwezigheid van veel maltose in het voedsel de diastasevorming tijdelijk.

heid. Ik herstel zoodoende een fout uit mijn vroeger opstel, waarin ik vermeldde, dat de lichtbacteriën geen van alle diastase afscheiden. Mijn fout vloeide voort uit het feit, dat de diastaseafscheiding door bacteriën in vloeistoffen somtijds geheel uitblijft, en zoodanige culturen hebben mij een overijld oordeel doen vellen. Trekt men strepen van *Ph. luminosum* of *Ph. indicum* op stijfsel-houdende visch-zeewater-gelatine, dan diffundeert uit de sterk smeltende strepen diastase in de nog vaste gelatine naar buiten, zoodat men bij overgieten met een jodiumoplossing een breeden, kleurloozen band, bestaande uit een gesmolten gedeelte, beiderzijds begrensd door kleurlooze randen op den blauwen grond, ziet ontstaan. Welke beteekenis, zoo vraagt men zich, moet gehecht worden aan de daarbij gevormde suiker? Dat deze zonder functie zou wezen is niet aannemelijk, en toch kon ik, zooals reeds werd opgemerkt, geen andere dan een schadelijke werking van suiker waarnemen. Intusschen zijn nauwelijks herkenbare werkingen op groei of ademhaling van mikroben door geringe hoeveelheden van verschillende stoffen uitgeoefend, toch wellicht van grooter beteekenis dan ons bekend is. In dien zin zouden de producten van de diastatische werking toch voor onze bacteriën een rol kunnen spelen *). De belemmering in den groei, welke verschillende bacteriënsoorten door suiker ondergaan, kan wellicht ook van beteekenis zijn, in den strijd voor het bestaan, dien de betrekkelijk zeldzame lichtbacteriën tegen hun tallooze mededingers hebben te voeren, waarbij echter de suikervorming zeker als een verrassend wapen zou moeten beschouwd worden, bedenkende hoe nadeelig eenigszins groote hoeveelheden suiker voor *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* zelve kunnen worden.

---

*) Diffusieproeven met rietsuiker op *gelatineplaten*, lichtend gemaakt door *Ph. indicum*, schijnen te leeren, dat, bij uiterst groote verdunning, zwakke lichtverhooging door deze suikersoort kan bewerkt worden. Maar in alle gevallen, waarbij, gelijk hier, slechts smalle lichtringen rondom duistere velden ontstaan, is het niet zeker, dat de diffundeerende stof de primaire oorzaak van het waargenomen verschijnsel is.

5. Plastische aequivalenten bij de pepton-koolstof-mikroben.

Wat ik onder »plastische aequivalenten" wensch te verstaan, zal uit het volgende voorbeeld duidelijk worden.

Vroeger heb ik opgemerkt, dat de handelsgelatine steeds een weinig peptonen bevat, die voor lichtbacteriën en andere mikroben assimileerbaar zijn. In een 8 pCt. gelatine-oplossing van het fabrieksmerk 329 van de gelatinefabriek te Winterthur, is deze hoeveelheid pepton aequivalent aan $1^1/_2$ pCt. rietsuiker, wanneer het geldt gisting en gistgroei, veroorzaakt door *Saccharomyces ellipsoideus* in een dunne gelatinelaag van 1 mM. dikte, waar de lucht gemakkelijk kan indringen en alle cellen, zelfs de diepste, kan bereiken. Dat wil zeggen, dat de genoemde 8 pCt. gelatine-oplossing, gemengd met gistcellen, gistasch en $1^1/_2$ pCt. rietsuiker, na eenigen tijd geheel pepton- en geheel rietsuikervrij wordt, omdat de peptonen van de gelatine en de toegevoegde rietsuiker te zamen juist in zoodanige verhouding aanwezig zijn, dat zij gistcellen doen ontstaan, zonder dat een van deze beide stoffen in overmaat achterblijft.

Een dergelijke aequivalent-verhouding moet er zijn ten opzichte van de lichtbacteriën tusschen de peptonen van de gelatine en elke stof, welke daarmede groei en lichtvoortbrenging bij deze bacteriën kan bewerken. Welke is deze verhouding tusschen pepton en het lichtvoedsel bij uitnemendheid: de glycerine? Hoedanig is de grootte daarvan voor andere lichtstoffen, zooals suiker, zouten van organische zuren, amiden? Hoe verhouden zich in dit opzicht andere soorten van bacteriën, welke aan analoge voedingscondities onderworpen worden? Welke is hierbij de invloed van meer of minder volledige zuurstoftoetreding? Al deze vragen, hoe belangrijk ook op zichzelve, moeten hier worden voorbijgegaan, en wij kunnen ons van de kennis van het antwoord daarop voor het thans beoogde doel onafhankelijk maken, door aan de gebruikte gelatine van een der stoffen een overmaat boven het »plastisch aequivalent" toe te voegen. Zoo

zal bijv. een 8 pCt. zeewater-gelatine, met lichtbacteriën vermengd, door toevoeging van 2 pCt glycerine weldra in een zuiveren »glyceringrond" veranderen, omdat 2 pCt. glycerine veel meer is dan het »plastische aequivalent" van glycerine tot de in de gelatine aanwezige pepton-hoeveelheid. Omgekeerd kan men door toevoeging van pepton in overmaat gemakkelijk de zekerheid verkrijgen, dat de, op de lichtende gelatine gebrachte stoffen, niet anders dan pepton in hun onderlaag vinden, om daarmede licht te geven of groei op te roepen. Alleen de onvolledigheid mijner waarnemingen verhindert mij hier verder op de »plastische aequivalenten" in te gaan; het belang daarvan ben ik mij ten volle bewust.

Zooals men ziet, is in het voorgaande steeds ondersteld, dat zonder peptonverbruik geen lichtontwikkeling plaats heeft, en dit is ook zeker in het algemeen de uitdrukking van de waarheid. Er zijn evenwel een tweetal reeksen van verschijnselen, waarvan de eerste niet dan moeielijk, de tweede wellicht in het geheel niet beantwoordt aan den regel, dat het lichten steeds met het verdwijnen van peptonen, onder vorming van protoplasma, gepaard gaat en die ik hier niet geheel kan voorbijgaan. Vooreerst denk ik daarbij aan den invloed van de aanwezigheid van kleine hoeveelheden assimileerbare suikers in de voedingsgelatine op het verloop der lichtwerkingen en op de ontwikkeling der groeivelden. De waarneming is de volgende.

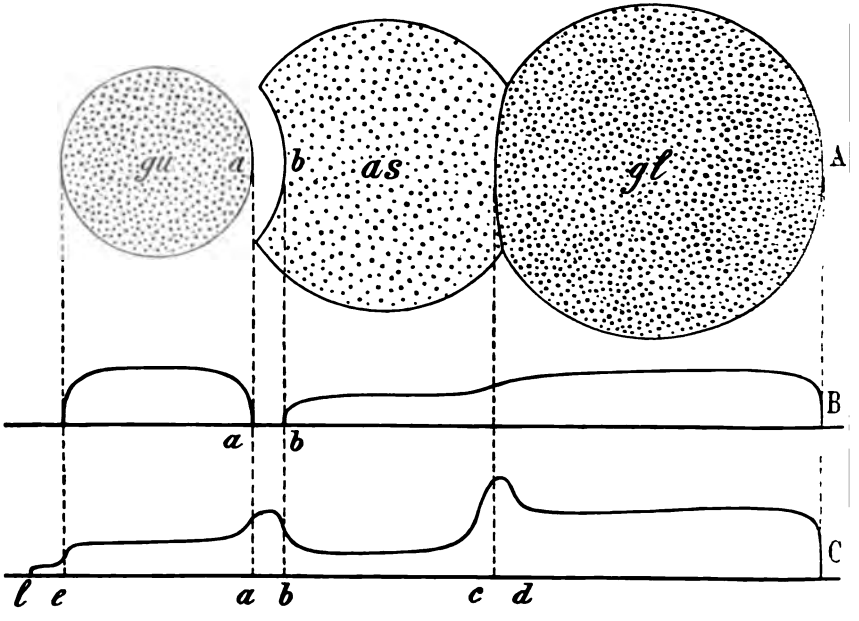
Lichtvelden van suikers, gevormd op *Phosphorescens*-peptongronden, die veel pepton en overigens geen lichtstoffen bevatten, zijn gewoonlijk kort van duur, uiterst helder, en worden opgevolgd door een krachtig groeiveld. Na één of twee dagen neemt het veld in lichtkracht af of wordt volkomen duister. Geheel anders worden de verhoudingen wanneer de grond behalve pepton ook een weinig suiker bevat, bijv. $^1/_{10}$ pCt. glucose of maltose. Suikers, op zulke gronden geplaatst, vormen eveneens lichtvelden, die echter uitgebreider zijn dan in het vorige geval, hetgeen bewijst dat de opgebrachte suiker minder snel geabsorbeerd wordt. Maar wat nu hierbij merkwaardig is, is de langdurigheid, waarmede de

lichtontwikkeling in deze velden plaats heeft en die 14 dagen of meer kan bedragen en gepaard gaat met de vorming van zeer zwakke groeivelden. Ja, met asparagine, die op gewone peptongronden wel later dan de suikers, maar toch evenals deze sterke lichtontwikkeling en veel groei veroorzaakt, kan de groei op zulke suikerhoudende gronden naar het schijnt geheel stilstaan, terwijl het lichten intensief en langdurig voortgaat. Zeker is de hoeveelheid licht onder de laatst genoemde omstandigheden voortgebracht veel grooter dan in het eerste geval, en omgekeerd is de kwantiteit levende stof daarbij ontstaan veel kleiner. Geen twijfel dus, dat de grootte van het plastisch aequivalent, tengevolge van de aanwezigheid van de geringe hoeveelheid suiker, veranderd is, blijkbaar in verband met de verminderde activiteit van groei der bacteriën. Hier is dus een grooter gedeelte van de diffundeerende suiker langzaam verbrand dan bij afwezigheid van suiker in den grond. Ik meende aanvankelijk dat hieruit moest worden besloten tot het bestaan van lichtstoffen of lichtcondities, die tot lichtontwikkeling zonder gelijktijdige vorming van nieuw protoplasma aanleiding zouden kunnen geven. Later ben ik van die meening meer en meer teruggekomen, daar ik mij in *bijna* alle duidelijke gevallen heb kunnen overtuigen, dat lichtproductie met groei, hoe gering ook, gepaard gaat. Daar, waar ik dit niet kon, waren meestal redenen aan te wijzen, die de beoordeeling der proeven onzeker maakten. Zoo bijvoorbeeld de algemeene groei in gelatinelagen, welke een troebeling daarvan veroorzaakt, die de waarneming der groeivelden, welke op het schatten van contrasten berust, moeielijk kan maken. Deze verschijnselen geven dus geen bepaalde aanleiding om de stelling, dat lichtontwikkeling steeds gepaard gaat met den overgang van peptonen in den georganiseerden toestand, te laten vallen, maar wel om de overtuiging te vestigen, dat de grootte der plastische aequivalenten in hooge mate beheerscht wordt door allerlei invloeden, — in ons bijzonder geval bijv. door de aanwezigheid van 0,1 pCt. glucose in de voedingsgelatine.

Intusschen zijn er omstandigheden waarbij de verhouding van de suikers tot de overige stoffen van den grond een

zoodanige is, dat, bij sterke verhooging van licht, groeiverschijnselen toch volstrekt niet waarneembaar worden.

Men ziet dit bijvoorbeeld wanneer op een *Phosphorescens*-pepton-gelatine-grond (Fig. beneden) een glucose-diffusieveld (*gu*, *A*) in ontmoeting wordt gebracht met een asparagine-diffusieveld (*as*). Ter plaatse van de doorsnijding van de beide lichtende groeivelden ligt dan ergens een sterk lichtende strook (*ab*, *C*), zonder merkbaren groei (*ab*, *B*). Gelijk men ziet valt deze strook samen met een zeer gering glucosegehalte, dat met pepton alleen ook geen duidelijk groeieffect en slechts een zeer zwakke, in de figuur bij *le* aangegeven lichtvermeerdering, heeft veroorzaakt. Opmerkelijk is de scherpe begrenzing van den lichtstrook *ab*.



Graphische voorstelling van groei (A & B) en lichtkracht (C) van Glucose- (*gu*), Asparagine- (*as*) en Glycerine-diffusievelden (*gl*) op Peptongrond met *Ph. phosphorescens*.

In A zijn de groeivelden, van bovenop gezien, door cirkels aangegeven. De stippen stellen de daarin verspreide koloniën voor.

De ordinaten van de kromme lijnen in B stellen de overmaat van groei in de velden boven den groei in den grond zelve voor. Op dezelfde wijze zijn de ordinaten der kromme lijnen in C de voorstellingen van de licht-intensiteiten boven die van den grond.

Men ziet dat de doorsnijding van het asparagineveld (*as*) met de uiterste grens van het glucoseveld (*gu*), tusschen de letters *a* en *b*, gekenmerkt is door ophouden van groei en verhooging van licht (*ab* in C); bij *le* is een lichtwerking van pepton-glucose, die niet met groei gepaard gaat. In de doorsnijding van het glycerine- en asparagineveld is geen vermeerderde groei, maar wel een lichtvermeerdering (*cd* in C) op te merken.

Gelijk men ziet is de chemische natuur van de glucose de hoofdoorzaak van het genoemde verschijnsel, want in onze figuur bemerkt men bovendien de doorsnijding van hetzelfde asparagineveld (*as*) met een glycerine-diffusieveld (*gl*), waarbij zonder eenige vertraging van den groei slechts een halvemaanvormig segment met vermeerderde lichtontwikkeling (*cd* in *C*) zichtbaar is geworden.

Zeer belangrijk komt het mij voor, dat ook in deze gevallen zonder duidelijken groei de aanwezigheid van peptonen een noodzakelijke voorwaarde voor het lichten is, zoodat deze functie niet alleen afhankelijk blijkt te wezen van glucose of glycerine, maar behalve van deze stoffen en zuurstof de gelijktijdige aanwezigheid van pepton vereischt. Het schijnt mij derhalve niet aan twijfel onderhevig te wezen, dat er bij het lichten een oorzaak van verbruik, van afslijting van de levende stof moet bestaan, die evenwicht kan houden met een vernieuwingsproces onder pepton-suiker- of pepton-glycerine-absorptie, in het binnenste van het protoplasma ook van niet groeiende bacteriën. Is deze onderstelling juist dan is het duidelijk, dat er niet *noodzakelijk* een zichtbare vermeerdering of vergrooting van de bacteriën behoeft gepaard te gaan met de lichtontwikkeling. Maar wel moeten daarbij de stikstofhoudende bestanddeelen van den grond belangrijke chemische veranderingen doorloopen.

Het tweede geval waarin lichtvoedsel niet duidelijk plastisch werkt, wordt waargenomen bij zekere niet nader bekende stoffen, welke in vele dierlijke vochten, bijvoorbeeld in vischextract, en in plantensappen, in kleine hoeveelheid voorkomen, en daaruit door alkohol gelijktijdig met peptonen en werkelooze zouten kunnen worden neergeslagen, stoffen, die eveneens schijnen voor te komen aan de oppervlakte van velerlei schimmeldraden en bacteriën-koloniën, zoowel bij gelatine-smeltende als niet-smeltende soorten. Zij kunnen uit pancreasextract verkregen worden, maar ontstaan ook bij de werking van het tryptisch enzym van schimmels en van vele bacteriën, waaronder de pepton-lichtbacteriën zelve, uit vleesch, eiwit, kaasstof, gelatine, hoezeer slechts in geringe hoeveelheid. Zij schijnen door langdurig

koken niet vernietigd te worden en met zeer verschillende snelheid te diffundeeren, zoodat hun moleculaire grootte eveneens verschillend schijnt te wezen. Hun merkwaardigste eigenschap is, dat zij zonder de aanwezigheid van andere lichamen, langdurig het lichten van *Ph. phosphorescens*, *Ph. Pflügeri*, *Ph. balticum* en *Ph. Fischeri* en eveneens van *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* kunnen onderhouden, en hoezeer daarbij de lichtkracht uiterst groot kan wezen, is er zelfs na 14 dagen of een maand nauwelijks een spoor van groei te ontdekken. Wellicht hebben wij hier met een groep van lichamen te doen, die als verbindingen van peptonen met zekere andere koolstoflichamen kunnen worden opgevat, en die in de lichtende cellen binnengedrongen, op overeenkomstige wijze als in het vorige geval tot een moleculaire vernieuwing aanleiding geven, die niet noodzakelijk met groei gepaard behoeft te gaan, zonder daarom echter een uitzondering te maken op de stelling, dat de lichtfunctie samenhangt met den overgang van peptonen in den georganiseerden toestand. Voorloopig moet ik van de verdere bespreking dezer feiten afzien en mij bepalen tot het wijzen op hun belangrijkheid.

---

6. Verschijnselen van uitdooving door lichtvoedsel veroorzaakt.

Dat de beschouwingen, in de vorige § behandeld, juist zijn, leid ik af uit de ontwikkeling van de diffusievelden van de stoffen, welke op de *Phosphorescens*-gronden geplaatst worden, en uit de veranderingen, welke daarin onder bepaalde omstandigheden zijn waar te nemen. Wij leeren daarbij vooral twee in het oogloopende verschijnselen kennen, te weten, de uitdooving die lichtstoffen somtijds veroorzaken, en de standvastige grootte en gelijkmatige intensiteit, welke de diffusievelden ten tijde hunner maximale lichtkracht bezitten. Volgen wij deze verschijnselen bij een bepaald voorbeeld nader.

De glycerine is het lichtvoedsel bij uitnemendheid. Tot

gisting geeft deze stof geen aanleiding en de oxydatie daarvan vereischt veel vrije zuurstof, gelijk de geringe dikte van de lichtende laag van lichtende *Phosphorescens*-glycerine-pepton gronden bewijst. Plaatst men een druppel glycerine op een *Phosphorescens*-pepton-grond, die zeer weinig pepton bevat, bijv. $^1/_4$ pCt., en nog in lichtenden toestand verkeert ten koste van het reserve-materiaal der in de gelatine verdeelde bacteriën, dan is de volgorde der verschijnselen deze.

Aanvankelijk een duister diffusieveld op den lichtenden grond, daarna sterke verhooging van de lichtkracht in dit donkere veld boven die van den grond. Daar het duistere en het lichte veld juist dezelfde afmetingen bezitten, is het zeker, dat de verduistering samenvalt met de absorptie van de glycerine, die niet verder diffundeert, wanneer het lichten begint. Dit laatste geschiedt in de richting van buiten naar binnen, zoodat de hoogere concentratie blijkbaar vertragend werkt; maar later wordt de lichtkracht over het geheele veld gelijk, om nog later ook gelijkmatig af te nemen.

De verklaring dezer verschijnselen is zonder twijfel de volgende.

Bij het duister worden is de hoeveelheid pepton, welke in de bacteriën aanwezig is, geringer dan het platisch aequivalent van dit lichaam ten opzichte van de hoeveelheid glycerine, die door de bacteriën wordt opgenomen, en de eenzijdige ophooping van de glycerine stelt de lichtfunctie buiten werking. Maakt men gebruik van een koloniën-cultuur, welke op de oppervlakte van een pepton-gelatine-laag in den toestand van groei verkeert, dan ziet men dat de verduistering gepaard gaat met stilstand of sterke vermindering van groei, zoodat blijkbaar de eiwitvorming, dat wil zeggen de peptonbinding, heeft opgehouden. Zijn de bacteriën deze periode van verduistering goed doorgekomen, — het is mogelijk dat zij daarbij afsterven, — dan is alle glycerine, gelijk wij zagen, in de bacteriën getrokken, want er heeft geen verdere diffusie van dit lichaam plaats, en van dat oogenblik af aan kan de pepton van den grond, al is de hoeveelheid daarvan ook nog zoo gering, van alle zijden toestroomen, in de bacteriën indringen en met de glycerine tot eiwitvor-

ming, groei en lichten aanleiding geven. Als deze redeneering juist is, dan moet er een peptongehalte van den grond zijn, waarbij de verduistering niet plaats heeft. Naar ik geloof is elk gehalte aan pepton, dat voldoende is om in grooter hoeveelheid dan door het plastisch aequivalent van de glycerine vereischt wordt, in de bacteriën binnen te dringen ook toereikend om verduistering te voorkomen. Het is dan ook mogelijk om gronden te maken, die door een hoog peptongehalte direct met glycerine licht geven. Men moet hierbij echter niet uit het oog verliezen, dat de toestand van activiteit der bacteriën op het proces van de imbibitie van pepton en glycerine van overwegenden invloed is, en dat juist de oorzaken, waarop deze activiteit berust zich moeielijk laten beoordeelen. Dit is het zwakke punt der redeneering; maar daar de lichtkracht der bacteriën een maat is voor de beoordeeling van de grootte hunner activiteit, zoo bestaat er kans, dat zelfs daarmede rekening zal kunnen worden gehouden.

De hier bedoelde verschijnselen zijn zeker van algemeene beteekenis. Bij de lichtbacteriën kunnen alle lichtstoffen, — wellicht pepton alleen uitgezonderd, — verduistering en vertraging van groei veroorzaken. Niet assimileerbare stoffen doen dit echter niet Zoo geven glycerine en asparagine, die tot de beste lichtstoffen behooren, zeer gemakkelijk aanleiding tot verduistering; melksuiker en rietsuiker, die niet geassimileerd worden, daarentegen niet. Zelfs waterstof-superoxyd, dat door de lichtbacteriën snel ontleed wordt, dat wil dus zeggen vrije zuurstof, kan uitdoovend of ophelderend werken. Andere organismen vertoonen in hun groeivelden dezelfde verschijnselen, welke wij hier hebben besproken. Zoo is gewone gist vaak aan vertraging van groei onderhevig, wanneer daarop asparagine-oplossingen, die zekere concentratie te boven gaan inwerken. Wellicht zou in dit geval de activiteit zich laten beoordeelen door de »gistkracht", en de »gistkracht" door het peptongehalte der cellen.

De werking van de door *Ph. phosphorescens* assimileerbare suikersoorten zooals glucose, laevulose, maltose en

galactose verdient hier nog eene bijzondere vermelding. Deze zoo bij uitstek werkzame lichtstoffen geven ook bijzonder gemakkelijk aanleiding tot uitdooving. De verklaring van dit verschijnsel valt slechts ten deele samen met de bovengegevene, hier toch komt nog behalve de uitdooving, die afhangt van de plastische aequivalenten der suikers ten opzichte van pepton, een nieuwe factor in het spel, namelijk de *zuurvorming*.

Steeds gaat de zuurvorming in de culturen gepaard met de ontwikkeling van een onaangenaam riekend lichaam, dat zelve zwak zuur reageert en wellicht een vluchtig vetzuur is. Intusschen zijn de bacteriën in staat om het, door hen zelve gevormde zuur zeer langzaam te oxydeeren, terwijl ik niet heb kunnen waarnemen, dat zij dit vermogen bezitten ten opzichte van mierenzuur, azijnzuur, propionzuur en boterzuur. Dat de uitdooving der culturen onder invloed van suikers inderdaad op zuurvorming moet berusten, betwijfel ik echter niet, want koolzure natron, die gemakkelijk in lichtbacteriën binnendringt *), oefent een gunstige werking op het lichten uit, blijkbaar door neutraliseeren van het in de bacteriën aanwezige zuur. Ik meen derhalve, dat de mogelijkheid bestaat, dat het vluchtige zuur niet identiek is met datgene, waardoor de uitdooving geschiedt, en dat wellicht de bacteriën in het geheel niet kan verlaten. Is deze verklaring juist, dan zoude het zuur melkzuur, asparaginezuur of barnsteenzuur kunnen zijn, want ook deze zuren kunnen door de lichtbacteriën onder lichtontwikkeling geoxydeerd worden.

Hier moet ik nog het feit vermelden, dat glucose onder zekere omstandigheden den groei kan begunstigen, terwijl het licht volkomen is uitgedoofd. Men bemerkt dit vooral in strepen getrokken op glucose-houdende voedings-gelatineplaten. De bacteriën van zulke strepen blijken bij, mikros-

---

*) Strepen van *Ph. phosphorescens* worden onder den invloed van glucose geheel doorschijnend; plaatst men een droppel koolzure natron op zulk een streep, zoo ziet men de *bacteriën zelve* aschgrauw worden, blijkbaar omdat de koolzure natron er in dringt.

kopisch onderzoek, tot groote bolvormige lichamen met een eigenaardige inwendige structuur te zijn opgezwollen, zoodat het nog de vraag is, of de schijnbare groei niet in werkelijkheid alleen berust op het zwellen der bacteriën door wateropneming zonder dat zij zich hebben gedeeld. Brengt men materiaal van zulke strepen over op een gewone, suikervrije voedingsgelatine, dan begint het lichten spoedig, en weldra is insgelijks de normale toestand, wat gedaante en celdeeling betreft teruggekeerd.

---

7. Lichtvoedsel en plastisch voedsel van Photobacterium phosphorescens. Werkelooze en antiseptische stoffen *).

Terwijl het zeer gemakkelijk is om te bepalen welke stoffen als *koolstofbronnen* voor *Ph. phosphorescens* kunnen dienst doen, d. w. z. pepton tot plastisch voedsel aanvullen, is het veel moeielijker om de lichamen, welke *stikstof* in een voor onze bacterie *assimileerbaren vorm* bevatten te leeren kennen. Ter bereiking van het eerstgenoemde doel laat zich het beste gebruik maken van wat ik den *Phosphorescens-peptongrond* wensch te noemen.

De assimileerbare stikstofbronnen heb ik door middel van den *Phosphorescens-glycerinegrond* trachten te bepalen.

Het hoofdresultaat waartoe dit onderzoek aanleiding heeft gegeven, is reeds in § 4 besproken en komt neer op het feit, dat, terwijl de koolstof aan de meest verschillende stoffen kan worden ontleend, alleen peptonen voor stikstof-toevoer geschikt zijn. Natuurlijk wensch ik niet te beweren, dat er onder de tallooze door mij niet onderzochte lichamen nog niet andere stoffen dan peptonen zouden voorkomen, welke als stikstofvoedsel dienst kunnen doen, maar alleen, dat zij mij niet bekend zijn geworden.

De *Peptongrond* kan op twee wijzen worden vervaardigd. Vooreerst kan daarvoor een vischafkooksel in zeewater die-

---

*) Onder „antiseptische" stoffen wensch ik die lichamen te verstaan, welke lichtkracht en groei belemmeren.

nen, waaraan nog 1 pCt. pepton is toegevoegd. Minder pepton dan deze hoeveelheid geeft, gelijk uit wat wij boven zagen kan worden afgeleid, gemakkelijk aanleiding tot langdurige verduistering, welke bij het bepalen van het lichtvoedsel oponthoud veroorzaakt. Een zoodanige vischgelatine bevat behalve de eigenaardige, op pag. 263 genoemde lichamen, nog een zekere hoeveelheid stoffen, die als koolstofbron kunnen dienst doen en met pepton te zamen plastisch voedsel opleveren. Zij moeten opgebruikt, door de bacteriën geabsorbeerd zijn, eer de proeven kunnen beginnen. Het is daarom noodzakelijk dergelijke visch-peptongronden gedurende eenigen tijd te laten liggen en eerst, wanneer de lichtkracht vermindert, daarvan gebruik te maken. Zij vertoonen groote neiging om na langdurige inwerking van *Phosphorescens*-bacteriën kristallen van ammonium-magnesium-phosphaat af te zetten, vooral, wanneer men behalve pepton ook nog een weinig asparagine heeft toegevoegd. Om deze en om andere redenen vermoed ik, dat de completeerende bestanddeelen van pepton, welke in zoodanige vischgelatine voorkomen, behalve een spoor glycerine, voornamelijk amidachtige lichamen zijn. Overigens ben ik overtuigd, dat al de stoffen welke in vischaftreksels voorkomen, voor zoover het geen peptonen zijn, ongeschikt zijn om aan de stikstofbehoefte onzer bacteriën te voldoen. Dit punt is wel is waar op zichzelve van ondergeschikt belang, maar niet voor mijn doel, omdat vroeger genomen proeven met visch-peptongelatine, die later niet meer met pepton alléén herhaald zijn, aan de beoordeeling van de werking van eenige der stoffen, welke beneden zullen genoemd worden, ten grondslag liggen en hun waarde ontleenen aan de zekerheid, dat alleen peptonen als stikstofbron in den grond aanwezig waren.

De tweede vorm van den *Peptongrond* is deze. Zeewater, of duinwater met 3 pCt. keukenzout, wordt vermengd met 8 pCt. gelatine, 2 pCt. pepton en 0.2 pCt. eener oplossing van gistasch in zoutzuur geneutraliseerd met phosphorzure of koolzure natron. Schudt men daaronder eene rijke hoeveelheid lichtbacteriën, dan ontstaat, na het stollen, een lichtende

plaat, die zoo arm is aan koolstoflichamen, dat daarmede onmiddellijk proeven kunnen genomen worden, terwijl de bacteriën in den vischgrond vooraf nog eenige deelingen moesten ondergaan. Er is nog een ander voordeel aan dezen vereenvoudigden peptongrond verbonden: men kan met behulp daarvan direct inwerken op den toestand, waarin de bacteriën door voorafgaande voedingsvoorwaarden zijn gebracht, en deze kan men willekeurig beheerschen door het kiezen van bacteriën afkomstig van bepaalde voedingsmassa's als zaaimateriaal, maar bij dit punt wensch ik hier niet langer stil te staan.

Voor de *Glycerinegelatine* laat zich dezelfde samenstelling kiezen als voor de *Peptongelatine*, met het verschil, dat voor 2 pCt. pepton 1 pCt. glycerine in plaats komt. Het niet onbelangrijke peptongehalte van de handelsgelatine, waarop ik boven heb gewezen, vereischt, dat ook deze gronden eerst eenigen tijd aan de uitputtende werking van *Ph. phosphorescens* onderworpen worden, om zoodoende zekerheid te verkrijgen, dat alleen glycerine als lichtmateriaal beschikbaar blijft. Na ongeveer 24 uren is bij kamertemperatuur zoodanige cultuurgelatine vrij van assimileerbare stikstof, waarna de lichtkracht spoedig begint te verminderen *).

Vooral de visch-pepton-, in mindere mate de gewone peptongrond, munt bij het uitvoeren der lichtproeven in lichtkracht uit boven den glycerinegrond, maar alle staan achter bij de maximale lichtkracht, welke onze bacteriën onder de meestgunstige omstandigheden, bijvoorbeeld in streepculturen op visch-zeewater-pepton-asparagine-glycerine-gelatine kunnen ten toon spreiden. Lang is het mij onduidelijk geweest, wat

---

*) Na langen tijd, bijv. na twee of drie maanden, komt in elke cultuur van *Ph. phosphorescens*, tengegevolge van het afsterven van „oude" bacteriën, een stof vrij, welke stikstofhoudend is en als lichtmateriaal kan dienen. Goed ingerichte *Phosphorescens*-culturen zijn daardoor als 't ware onsterfelijk. Zoo is er in mijn laboratorium een GAYON'sche buis met zoodanige cultuur, sinds den dag der vervaardiging, 11 October 1888, tot op het huidige oogenblik, 2 Mei 1890, dus reeds 18 maanden lang, krachtig lichtgevend. Deze omstandigheid stoort onze proeven echter niet, daar zij binnen drie of vier weken geëindigd zijn.

daarvan de hoofdaanleiding zou kunnen zijn. Thans meen ik de verklaring van het feit gedeeltelijk te hebben gevonden in de omstandigheid, dat *mengsels* van stoffen elkanders werking ondersteunen, d. w. z. dat pepton met glycerine en glucose te zamen meer licht en sterker groei kan veroorzaken dan met elk dezer stoffen afzonderlijk *). Ik heb ditzelfde feit ook bij andere mikroben waargenomen en wil daarvan enkele voorbeelden noemen, omdat het mij belangrijk toeschijnt.

Aan zeewater, waarin 0,5 pCt. pepton is opgelost, worden 0,1 asparagine, 0,2 pCt. glycerine en een spoor lichtbacteriën toegevoegd. Weldra begint de vloeistof zeer helder licht te geven, dit gaat onverzwakt door tot de asparagine geheel is opgebruikt, dan treedt er vrij plotseling een lichtvermindering in, waarna het lichten zoolang onveranderd voortduurt als er nog beschikbare glycerine is.

Zelfs in een gewonen lichtenden grond, vervaardigd van vischaftreksel met $^1/_2$ pCt. pepton en *Phosphorescens*-bacteriën, kan men vrij scherp aan een plotselinge lichtverzwakking het oogenblik beoordeelen, waarop een der lichtende stoffen van de visch verdwijnt, terwijl een of meer der overige bestanddeelen nog achter blijven. Uit verschillende waarnemingen schijnt te volgen, dat de amiden uit deze vischdecocten het eerste, glycerine het laatste verdwijnen.

Ander voorbeeld. De gewone bierkaan, *Mycoderma cerevisiae*, kan bij tegenwoordigheid van een ammoniakzout *matig groeien* ten koste van alkohol, en *uiterst langzaam* ten koste van glycerine. Wanneer men nu op een gelatine-laag waarin behalve het genoemde organisme, zwavelzure ammoniak en gistasch aanwezig zijn, op eenigen afstand van elkander een druppel alkohol en een druppel glycerine plaatst, zoo ziet men na 2 of 3 dagen de diffusievelden dezer stoffen eenigszins troebel worden door het ontstaan van koloniën uit de cellen van *Mycoderma*, het diffusieveld van alkohol verliest daarbij zijn doorschijnendheid eerder en meer vol-

*) Dat dit echter niet altijd het geval is zagen wij boven (verg. pag. 262 en *ab* in *B* Fig. pag. 262).

komen dan dat van de minder gemakkelijk assimileerbare glycerine. Zijn echter de druppels dezer stoffen zoodanig op de gelatinelaag geplaatst, dat hunne diffusievelden elkander doorsnijden vóór dat de cellen den tijd hebben gehad alles daarvan te absorbeeren, dan ontstaat er een lensvormig doorsnijdingsveld, waarin de groei nog sterker schijnt te wezen dan zelfs uit de samenwerking van wat elk der twee stoffen afzonderlijk doet, kan worden afgeleid. Ten aanzien van de lichtbacteriën geldt dit alles blijkbaar, zoowel voor de lichtontwikkeling en het ademhalingsproces als voor het resultaat daarvan, voor zoover het door den groei kan zichtbaar gemaakt worden.

Hoe moeten deze feiten worden verklaard? Hebben wij hierbij te denken aan afzonderlijk werkzame groepen in het protoplasma der mikroben, die als het ware zoovele specifieke adaptatiën zijn aan bepaalde stoffen? Of moet hier gedacht worden aan intermitteerende bewegingstoestanden van de actieve groepen, aan »vermoeienis", die ruimte laat aan, en opgeheven kan worden door bewegingsvormen van andere gedaante? Mij dunkt dat de laatste hypothese iets voor zich heeft, omdat de chemische stoffen, welke tot de bedoelde werkingen aanleiding kunnen geven, vaak geheel willekeurig gekozen kunnen worden uit lange reeksen van lichamen, die zeker nimmer vroeger met de betrokken organismen in contact zijn geweest. Aan den anderen kant schijnt de constitutie van de levende stof der hoogere organismen een zoodanige te wezen, dat tot het bestaan van materieele verschillen tusschen de stoffelijke éénheden van het protoplasma moet besloten worden, — éénheden, die zoowel aan specifieke functiën als aan de specifieke vormen der organen ten grondslag liggen, en, door hun éénzijdig op den voorgrond treden, deze werkingen of gedaanten te voorschijn roepen *).

*) Ik denk hierbij aan de stabiliteit van vele conidiën van Ustilagineeën en Ascomyceten, aan die van sommige doorgroeiende organen van hoogere planten zooals wortels en wortelstokken, aan de seksen van tweehuizige planten en dieren, aan de permanentie van de zijassen der Coniferen bij het stekken, en aan de zoogenoemde „jeugd-" en „overgangsvormen" in laatstgenoemde plantenklasse, en aan vele andere dergelijke verschijnselen.

Maar keeren wij tot de lichtgronden terug.

Er werd reeds op gewezen, dat de activiteit der bacteriën, en daarmede hun reactiesnelheid veel grooter is gedurende den lichtenden toestand dan nadat volledige uitdooving ingetreden is, en dat, zoodra het voedsel uit de omgeving in de bacterien is getrokken, in dit voedsel dan geen bron van fouten meer behoeft gevreesd te worden, zoodat het wenschelijk is juist met krachtig lichtende platen te werken.

Dit wordt blijkbaar het beste bereikt door de verdeeling van zeer veel lichtbacteriën in de voedings-gelatine, bereid zonder gebruik te maken van visch. Zoolang evenwel eenigerlei stof, welke als lichtvoedsel kan fungeeren, nog in oplosten toestand in de gelatine, dus buiten het lichaam der bacteriën aanwezig is, dan is elke vermeerdering daarvan geheel onverschillig, zoodat zoodanige stof op den lichtgrond geplaatst volkomen werkeloos blijkt te zijn. Wanneer bijvoorbeeld een plaat in lichtenden toestand verkeert ten koste van vrije, in de gelatine opgeloste glycerine, dan is een druppel daarop geplaatste glycerine, òf volkomen werkeloos, òt zij geeft aanleiding tot uitdooving ten gevolge van het overschrijden van de grens der concentratie door de peptonen bepaald, dat is zoodra de glycerine sneller uit de omgeving in de bacteriën dringt, dan de aequivaleerende peptonen dit doen *).

Intusschen is het duidelijk, dat bij het bekend zijn van de samenstelling der gebruikte gelatine uit het genoemde feit niet licht fouten zullen voortvloeien.

Veel moeielijker is het echter om aangaande het volgende punt zekerheid te verkrijgen.

Asparagine is niet in staat als stikstofbron dienst te doen voor glycerine, suikers, organische zuren en hunne zouten en de overige door mij onderzochte lichamen. Ik beschouw

*) Dat in gelatine verdeelde koloniën in dit opzicht zich eenigszins anders gedragen dan losse bacteriën, moet bij de beoordeeling van deze en soortgelijke proeven niet uit het oog worden verloren. Steeds is het wenschelijk een bepaalde proef onder verschillende omstandigheden te herhalen, om zoodoende van wellicht onbekende storingen meer onafhankelijk te zijn.

daarom de asparagine als *nimmer* geschikt assimileerbare stikstof af te staan, terwijl dit lichaam bij aanwezigheid van peptonen uitmuntend licht- en plastisch voedsel blijkt te zijn. Wellicht is de gevolgtrekking onjuist en zullen voortgezette onderzoekingen bewijzen, dat er bepaalde stikstofhoudende of stikstofvrije verbindingen zijn, of mengsels daarvan, welke met asparagine te zamen de stikstof van dit lichaam in een voor de lichtbacteriën opneembaren vorm overvoeren. Zulke stoffen zijn mij echter onbekend en elke uitspraak berust natuurlijk op den toestand van oogenblikkelijke kennis. Toch geloof ik niet, dat er onder de beneden te noemen stoffen eenige zullen gevonden worden, welke verkeerd zijn beoordeeld, de gang der proefneming is daarvoor eigenlijk te eenvoudig, en de grondslag, waarop de lichtontwikkeling en groei berusten eenmaal begrepen, laat nauwelijks ruimte voor twijfel over.

Die stoffen, welke het meest tot fouten aanleiding zouden kunnen geven, omdat ik de zuiverheid daarvan volstrekt niet kon beoordeelen, zooals kreatine, sarkine, allantoine, neurine, behooren alle tot de niet-lichtgevende, zoodat ten opzichte daarvan alleen de vraag kan gedaan worden of zij zoowel in hun verhouding tot pepton, dat is als koolstofbron, als met betrekking tot glycerine, dat is als stikstof bron zijn onderzocht. Dit is geschied en in beide richtingen bleken zij geen verandering in het licht te veroorzaken. Of er nu echter nog andere lichamen bestaan, met welke deze stoffen plastisch voedsel kunnen opleveren, kan ik natuurlijk in het algemeen niet beslissen, maar het zou mij verwonderen, en de suikersoorten, die het eerste in dit opzicht aandacht verdienen, behooren daartoe niet.

Dat pepton op een peptongrond geen, op een glycerine- en op een asparagine-grond daarentegen wel een lichtveld voortbrengt, is na het voorgaande duidelijk genoeg. Evenzoo dat asparagine op een glycerine-grond volkomen werkeloos moet zijn, op een peptongrond daarentegen een schitterend lichtveld kan voortbrengen.

Sommige dezer feiten hebben wij reeds bij het bespreken der voedingsvoorwaarden in het algemeen in § 4 leeren ken-

nen, maar het kwam mij niet overbodig voor in een herhaling te treden van die waarnemingen, welke den grondslag vormen van gezichtspunten van zekere algemeenheid.

In het volgende overzicht zijn de nader onderzochte stoffen in drie groepen gerangschikt. Tot de eerste groep behooren alle lichamen, welke pepton tot volledig plastisch voedsel aanvullen en de peptonen zelve, die deze rol ten opzichte der bedoelde stoffen vervullen. Onder peptonen wensch ik te verstaan het hoofdproduct van de omzetting van gelatine, albumine en caseine door pepsine en door trypsine, zonder nader rekening te houden met de verschillen, welke in deze producten zeker bestaan.

Aan de uitvoering der proeven, die aan de volgende tabel ten grondslag liggen, heeft Dr. Wijsman krachtdadig deelgenomen. Zonder zijn medewerking zouden verscheidene van de daarin opgenomen stoffen ontbreken.

Overzicht van de Werking van verschillende stoffen op lichtkracht en groei van Photobacterium phosphorescens.

	Lichtstoffen: Diffusievelden sterker lichtend dan de grond. Groeivelden aanwezig.	**Werkelooze stoffen:** Diffusievelden gelijk aan den grond. Geen groeivelden.	**Uitdoovende of antiseptische stoffen:** Diffusievelden donkerder dan de lichtende grond. Geen groeivelden.
1. Koolhydraten, Glucosiden en Alkoholen.	Glucose Galactose Laevulose Maltose Glycerine	Amylum Inuline Glycogeen Erythrogranulose Maltodextrine Leukodextrine Amylodextrine Arabinose Raffinose Rietsuiker Melksuiker Dulcit Mannit Quercit Erythrit Amylalkohol Aethylalkohol Glycol Amygdaline Arbutine	Sorbine

	Lichtstoffen: Diffusievelden sterker lichtend dan de grond. Groeivelden aanwezig.	**Werkelooze-stoffen:** Diffusievelden gelijk aan den grond. Geen groeivelden.	**Uitdoovende of antiseptische stoffen:** Diffusievelden donkerder dan de lichtende grond. Geen groeivelden.
2. ORGANISCHE ZUREN EN HUN ZOUTEN (NIET AROMATISCH).	Melkzuur (zeer zwak) Calciumlactaat „ Natriumlactaat „ Kaliumlactaat „ Barnsteenzuur Barnsteenzure kalk Appelzuur Natriummalaat Rechtsammoniumbimalaat Linksammoniumbimalaat Inactiefammoniumbimalaat Magnesium bimalaat Glycerinezuur (zeer sterk) Glycerinzure kalk	Wijnsteenzuur Wijnsteenzure kalk Druivenzuur Citroenzuur Slijmzuur Oxalzuur Ammoniumoxalaat Zuur „ Glycolzuur Glycolzure kalk Mierenzure zouten Azijnzure „ Boterzure „	Wijnsteenzure ammoniak Mierenzuur Azijnzuur Propionzuur Boterzuur
3. AMIDEN EN VERWANTEN.	Asparaginezuur Asparagine Alanine Glucosamine	Glycocol Kreatine Sarkine Allantoine Guanine Neurine Leucine Acidum uricum Ureum Alloxan Taurine	
4. AROMATISCHE LICHAMEN.		Lophine Hydrobenzamid Amarine Benzaldehyd Saligenine Looizuur Tyrosine Phloroglucine Saccharine Kinazure kalk Benzoëzuur	Vanilline Hydrokaneelzuur Resorcine Pyrogallol Salicylzuur
5. EIWITACHTIGE LICHAMEN.	Pepton	Caseine Globuline Fibrine Albumine	

	Lichtstoffen: Diffusievelden sterker lichtend dan de grond. Groeivelden aanwezig.	Werkelooze stoffen: Diffusievelden gelijk aan den grond. Geen groeivelden.	Uitdoovende of antiseptische stoffen: Diffusievelden donkerder dan de lichtende grond. Geen groeivelden.
6. Verschillende stoffen.		Cholesterine Vet Aldehyd Aethylacetaat	Trimethyleenoxyd Cyankalium Ferrocyankalium Ferridcyankalium Aether Chloroform Zwavelkoolstof Zwavelwaterstof Zwavelammonium
7. Enzymen.		Maltase Dextrinase Ptyaline Boekweitdiastase Pancreasdiastase Invertine Lactase Pepsine Trypsine	

Daar de lichtkracht der organische zuren, uitgezonderd het asparaginezuur, zwak of, zooals bij het melkzuur, zelfs zeer zwak is, tengevolge van de schadelijke werking die de zure reactie op de lichtfunctie uitoefent, is de juiste plaatsing dezer lichamen in de gegeven tabel aan eenigen twijfel onderworpen. Dit geldt bijv. ten opzichte van het citroenzuur en de zure-oxalzure-ammoniak, welke ik somtijds voor lichtstoffen heb gehouden. Het malonzuur is uithoofde van zoodanigen twijfel uit de tabel weggelaten, ofschoon eenige proeven op lichtontwikkeling door deze stof deden besluiten.

De plaatsing van sorbine onder de uitdoovende lichamen komt mij vreemd voor, maar zij volgt uit herhaalde proeven met het preparaat waarover ik beschik.

Ten aanzien van eenige tartraten heerschte aanvankelijk onzekerheid of zij tot de uitdoovende dan wel tot de werkelooze stoffen behoorden gebracht te worden. Dat zij nimmer als licht-materialen dienst doen is zeker. Dit feit is

belangrijk in vergelijking met de krachtige lichtwerking van de appelzure-zouten, en vooral ook wanneer men bedenkt welk een gunstig voedsel de verbindingen van het wijnsteenzuur voor sommige andere bacteriën zijn.

Dat men in deze tabel zulke stoffen als lophine, hydrobenzamid, amarine, trimethyleenoxyd, cholesterine en dergelijke lichamen opgegeven vindt, is omdat RADZISZEWSKY ontdekt heeft dat zij onder invloed van zuurstof en bijtend alkali bij gewone temperatuur kunnen phosphoresceeren. Men ziet echter, dat zij in onze tabel onder de werkelooze stoffen voorkomen. Ten opzichte van de vetten geldt een dergelijke opmerking. Zij werden opgenomen omdat men in de literatuur over het lichten zoo vaak aangegeven vindt, dat de lichtende organismen aan vetontleding, of aan oxydatie van vetten hunne specifieke eigenschap zouden te danken hebben. Maar dit blijkt onjuist te wezen. Konden zij de vetten splitsen in glycerine en een vetzuur dan zou de glycerine als lichtstof kunnen dienen, maar ook zoodanige splitsing heeft niet plaats.

---

8. VOEDING VAN PHOTOBACTERIUM INDICUM EN PH. LUMINOSUM.

Hoezeer de voedingsvoorwaarden van de West-Indische en de Noordzeelichtbacteriën niet volkomen identiek zijn, is daartusschen toch zooveel overeenkomst, dat zij gemeenschappelijk kunnen besproken worden.

Bij de behandeling van de algemeene voedingsconditiën der lichtbacteriën heb ik er op gewezen, dat deze lichtbacteriën in tegenstelling tot de *Pepton-koolstof*-bacteriën, *Pepton*-bacteriën kunnen genoemd worden. Daar zij de eigenschap bezitten van een zeer actief tryptisch enzym af te scheiden, waardoor gelatine en eiwitachtige stoffen vervloeien en gepeptoniseerd worden, kunnen deze bacteriën, bij aanwezigheid van de noodige zouten, ten koste van zulke lichamen lichten en leven. Intusschen moet worden opgemerkt, dat de lichtkracht bij dergelijke eenvoudige voedingsvoorwaarden gering is, ja, na eenigen tijd zelfs volledig verdwijnen kan, niet-

tegenstaande de vermenigvuldiging dan nog krachtig kan voortgaan. Overigens verkrijgt men fraai lichtende culturen, — hoezeer deze evenmin, het maximum van de bereikbare lichtkracht bezitten, — door *Ph. indicum* uit te zaaien in oplossingen van 1 en 2$^0/_0$ handelspepton in zeewater. Bij 30^0 C. is de vermenigvuldiging daarin zeer snel, en de lichtkracht bereikt na 24 of meer uren die van *Ph. phosphorescens*. Wenscht men evenwel van *Ph. indicum* het hoogste lichteffect te bereiken dan is het aanbevelenswaardig gemengd voedsel te gebruiken. Als zoodanig leerde ik een matig geconcentreerd vischextract kennen, waaraan een weinig pepton bijv. $^1/_2$ $^0/_0$ is toegevoegd. Bij welgeslaagde culturen verkrijgt men op die wijze ongemeen schoon lichtende vloeistoffen, welke zelfs de culturen van *Ph. phosphorescens* aan kracht niet onbelangrijk overtreffen en vooral bij zwak gas- of lamplicht gezien, de schoone zeegroene of azuurblauwe tint vertoonen, welke aan *Ph. phosphorescens* eigen is, ook bij sterk lichtende soorten onder de Coelenteraten voorkomt en door verschillende schrijvers met bewondering is beschreven. De gedachte, dat de Oceaan onder de tropen tijdelijk in een zoodanige lichtende cultuur kan veranderen brengt een schouwspel voor onze verbeelding, dat aan het bovennatuurlijke grenst. Naar ik vermeen is het verschijnsel aan de Nederlandsche zeelieden, bijv. in de Banda-zee, wel bekend, en wordt door hen met den naam van »melkzee" bestempeld *). Volgens FISCHER is de lichtkracht van de »melkzee" zwakker dan van door zijne culturen van *Ph. indicum* lichtend gemaakt zeewater †).

---

*) Bij de Engelsche zeevaarders bekend als »milky sea" en in pracht het schijnsel van *Noctiluca miliaris* verre overtreffend. Men vergelijke FISCHER (*Zeitsch. f. Hygiene*, Bd. 2 p. 88, 1887), die het bij een 11-jarig verblijf op zee in tropische en subtropische climaten éénmaal, n.l. Februari 1881, oostelijk van Sokotra heeft gezien. Op den voorafgaanden dag was de zee overdekt geweest met kwallen. Of de daarbij werkzame bacterie identiek is met FISCHER's West-Indischen licht-bacil is niet uitgemaakt.

†) Het lichten van de Noordzee door *Photobacterium luminosum* is zwakker dan door *Noctiluca*.

Maar keeren wij terug tot de voeding van onze pepton-lichtbacteriën.

Ik heb door toevoeging van een aantal stoffen aan zwak lichtende culturen van *Ph. luminosum* en *Ph. indicum* de lichtkracht trachten te verhoogen. In sommige gevallen is mij dit werkelijk gelukt, bijv. met asparagine bij *Ph. indicum* en *Ph. luminosum*, met laevulose, glucose en rietsuiker bij *Ph. indicum* alleen. De drie laatstgenoemde stoffen kunnen slechts in uiterst geringe hoeveelheid, bijv. $^1/_{10}$ pCt., worden verdragen, meer daarvan dooft uit. Op den groei werken zij niet gunstig, zelfs vertragend. De hoogste lichtkracht schijnt in het algemeen wel gepaard te gaan met deeling en groei, maar niet met de snelste deeling en den krachtigsten groei. Bij gistings-verschijnselen, zoowel van bacteriën als van gewone gistsoorten heb ik iets dergelijks opgemerkt. Ook hier is in kolfjes met buitengewoon sterke gistingen de snelheid van de vermenigvuldiging betrekkelijk gering, en, evenals een zeer sterk lichtende cultuur van *Ph. indicum* veel langer voortduurt, dan een zwak lichtende, waarin spoedig dikke bacteriën-vliezen ontstaan, zoo is het ook met zekere bacteriëngistingen van eiwitachtige stoffen, bijv. de skatolgisting, die veroorzaakt wordt door een in den grond voorkomend rottings-organisme.

Aanvankelijk heb ik mijn proeven in een vasten cultuurgrond met *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* alleen in agar-agar uitgevoerd. In zoodanige massa is echter de deeling en de koloniënvorming naar het schijnt aan bezwaren onderhevig en ik verkreeg daarmede tot nu toe niet zulke duidelijke uitkomsten als met de vier andere soorten. Intusschen kan ik toch een paar proefnemingen aanvoeren welke leerzaam waren. Deze betroffen de werking van gewoon kippeneiwit, caseïne, fibrine en gluten van tarwe. Kleine hoeveelheden dezer stoffen op lichtende *Indicum*-agargronden gebracht, die aanvankelijk met pepton licht hadden gegeven, maar begonnen uit te dooven, hebben diffusievelden van geringe afmeting voortgebracht, velden, die zoowel in lichtkracht als in groei den grond eenigszins vooruit waren, maar volstrekt niet in die mate als dit bij de overeenkomstige

proeven met *Ph. phosphorescens* en *Ph. Pflügeri* bij toediening van plastisch voedsel aan zwak lichtende gelatinegronden het geval is.

Hoe dit nu echter ook wezen moge, zeker is dat de genoemde onoplosbare eiwitachtige lichamen voor onze peptonbacteriën als licht- en plastisch voedsel dienst kunnen doen. Het is duidelijk, dat hierbij de door deze lichtbacteriën afgescheiden trypsine, de genoemde stoffen oplosbaar moet maken en in diflusibele lichamen moet omzetten. Intusschen waren de afmetingen der diffusievelden voor zoover zij door de vermeerderde activiteit der bacteriën zichtbaar werden, veel geringer dan verwacht moest worden op grond van de bekende diffusiesnelheid van handelspepton, gelijk die door de proeven met *Ph. phosphorescens* was vastgesteld. Een dergelijk peptonpreparaat tot vergelijking op een *Indicum*-agar plaat geplaatst, gaf echter ook een veel kleiner veld dan zich liet verwachten, en ik verkreeg den indruk, dat handels-pepton, een mengsel is van minstens twee stoffen van een ongelijke diffusiesnelheid, waarvan de minder snel diffundeerende de hoofdoorzaak, zoo niet de eenige oorzaak is van het lichten der peptonbacteriën terwijl ook de sneller diffundeerende te zamen met glycerine of andere koolstoflichamen, bij *Ph. phosphorescens* en de overige peptonkoolstof-lichtbacteriën, deze functie mogelijk maakt. Wij zagen boven, dat *Ph. phosphorescens* lichten en zwak groeien kan onder den invloed van zekere afscheidingsproducten van levende mikroben, stoffen, die eveneens voorkomen in alcohol-precipitaten van aftreksels van dierlijke en plantaardige weefsels, bijv. van pancreaspoeder. Hier wensch ik er op te wijzen, dat er zekere analogie schijnt te wezen tusschen deze stoffen en het hypothetische, langzaam diffundeerende plastische lichtvoedsel der pepton-lichtbacteriën, gelijk wij het zagen ontstaan onder den invloed van het tryptische enzym uit gelatine, eiwit, caseïne en gluten.

In den laatsten tijd heb ik beproefd *Indicum*-culturen tot stolling te brengen met gelatine en met de zoodoende verkregen lichtende gelatine-platen voedingsproeven uit te voeren. Het is mij gebleken dat dit zeer goed kan geschieden en

resultaten kunnen verkregen worden eer het smelten door het afgescheiden enzym begint. Dit eenigszins verrassende resultaat is het gevolg van de lage temperatuur waarbij men verplicht is te werken en bij welke de trypsine-afscheiding, en de groei uiterst langzaam zijn. Ingedroogd vischextract geeft op zoodanigen grond een uitgebreid zeer intensief lichtveld, dat echter weldra tot smelting komt. Pepton en asparagine geven daarop ieder voor zich zwakke licht en groeiverschijnselen. Rietsuiker, glucose en laevulose sterke uitdooving onder zuurafscheiding. Al deze reacties zijn echter gecompliceerd, en men weet daarbij weinig van den invloed van de onderzochte stoffen op de afscheiding van de trypsine en van de omzetting van de gelatine die daarbij, hoe weinig ook, gelijktijdig moet plaats hebben.

De peptonlichtbacteriën staan, wat het chemisme van hun voeding betreft volstrekt niet alleen. Het komt mij voor, dat alle tot nu toe nader bekend geworden *Spirillen* en *Vibrionen* op geheel overeenkomstigen wijze leven, dat wil zeggen hun plastisch voedsel uitsluitend aan peptonen ontleenen, die zij, evenals *Ph. indicum* door hun tryptisch enzym uit eiwitachtige stoffen kunnen bereiden. Zoo toonde Hueppe aan dat de choleraspirillen van Koch gekweekt kunnen worden in den inhoud van eieren, bijv. door in de schaal ergens een kleine opening te maken en daardoor heen een spoor bacteriën in het eiwit te brengen. Ik zelf cultiveerde eenige zeewaterspirillen op gelatine met zeewater zonder eenig ander voedsel en verkreeg daarop sterken groei, allerlei stoffen aan deze gelatine toegevoegd waren werkeloos. Een uiterst interessante pigmentbacil, die algemeen in den grond voorkomt, groeit onder afscheiding van een violette kleurstof en onder vorming van een krachtig smeltend enzym op zuivere gelatine, en in melk ten koste van de caseïne. Ja het komt mij voor, dat wat men onder rotting verstaat steeds is een omzetting van eiwitachtige lichamen onder den invloed van peptonbacteriën. Zeker geldt dit ten opzichte van de meest gewone van alle rottingsbacteriën, namelijk *Bacillus fluorescens liquefaciens*, die ook van gelatine alleen, uitmuntend kan leven en die de gewone oor-

zaak is van het bederf van erwten- en boonenaftreksels. Ook een der bacillen van de zoogenaamde pancreasrotting leeft en werkt op overkomstige wijze. Of daarbij al of niet stinkende bijproducten ontstaan, schijnt zoowel afhankelijk te wezen van de chemische natuur van het omgezette lichaam, in het bijzonder van het voorkomen of ontbreken van zwavel of phosphorus in de chemische formule daarvan, als van den physiologischen toestand der betrokken bacteriën. Dat hierbij laatstgenoemde factor, namelijk de toestand waarin de bacteriën verkeeren van invloed moet wezen, blijkt bijv. uit het feit, dat zelfs *Photobacterium luminosum*, die bij lagere temperatuur groeiend slechts reukelooze producten uit gelatine vormt, na eenige dagen daarop bij hooge temperatuur gekweekt te zijn, een geheel andere, aan den reuk herkenbare omzetting veroorzaakt, en daarmede ook bij voortzetting der culturen bij lagere temperatuur nog eenigen tijd voortgaat. Bij deze soort is echter ook de lichtfunctie zeer veranderlijk en, zooals wij boven zagen, in hooge mate gevoelig voor de temperatuur.

---

9. Theorie van de lichtfunctie.

De lichtfunctie is bij lichtbacteriën, evenals bij alle andere lichtende soorten door de gansche organische wereld aan de levende stof gebonden. De afzondering van eenig lichtend bestanddeel of van een photogene stof, die buiten de levende cellen lichtend zou kunnen worden, is nimmer gelukt *). Zelfs het afzonderlijke bestaan van eenig lichaam, dat wellicht niet aan de levende cellen zou kunnen onttrokken worden, maar waarop niettemin de verschijnselen van het lichten teruggebracht moeten worden, is door geen enkele proef waarschijnlijk geworden.

De lichtfunctie is, naar mijn oordeel, op overeenkomstige

*) Het door Spallanzani ontdekte lichtende slijm, waarmede sommige kwallen van de Middellandsche zee hun omgeving lichtend kunnen maken, is levend protoplasma door openbarstende cellen van de lichtorganen uitgestooten (zie verder pag. 293).

wijze aan de levende moleculen gebonden als de gistingsfunctie. Ook ten opzichte van de alcoholische gisting is, vooral op het voorbeeld van LIEBIG na het algemeener bekend worden van de beteekenis der enzymen, veelvuldig aangenomen, dat daarbij eenige specifieke stof moest werkzaam zijn, welke, wel is waar, niet aan de gistcel kon worden onttrokken, maar die toch op overeenkomstige wijze als de diastase het amylum omzet in maltose en dextrine, de suiker zou splitsen in alcohol en koolzuur. Naar ik meen is HOPPE-SEYLER nog steeds een aanhanger van deze hypothese. Meer en meer blijkt de onvruchtbaarheid daarvan, en sinds de onderzoekingen van PASTEUR begint men dit standpunt geheel te verlaten.

Intusschen, om tot de lichtfunctie terug te keeren, er zijn verschillende pogingen aangewend om het bewijs te leveren voor het bestaan van een specifieke lichtstof; gewoonlijk werd ondersteld, dat de oxydatie daarvan de naaste aanleiding tot de lichtontwikkeling zou zijn. Tot deze laatste onderstellingen meende men recht te hebben op grond van de proeven door MACAIRE *) en MATEUCCI †) met de lichtorganen van de glimvormen genomen. PHIPSON §) gaf aan het denkbeeld een meer concreten vorm door aan de hypothetische lichtstof van *Raja* den naam van »noctilucine" te geven, maar zijn beschouwingen en waarnemingen bewijzen niet, dat de levende stof als drager van de lichtfunctie is uitgesloten.

Meer waarschijnlijkheid verkreeg het bestaan van een afzonderlijk lichtend principe door de waarnemingen van RADZISZEWSKY **). Hij ontdekte de sterke lichtkracht van lophine, wanneer dit lichaam, opgelost in amylalkohol, op vast kalihydraat wordt gegoten. Hierbij ontstaat een vloeistof, die door langzame oxydatie bij gewone temperatuur

---

*) GILBERT's *Ann. d. Physik.* Bd. 70, p. 265. 1822.

†) Leçons zur les phénomènes des corps vivants. Ed. Franç. pag, 145, 1847.

§) Sur la matière phosphorescente de la raie. *Cpts. rendus*, T. 51, p. 541, 1860. Sur la noctilucine, Ibid. T. 75, pag. 547. 1872.

**) Ueber das Leuchten des Lophins. *Berichte der deutsch. Chem. Gesellsch.* Bd. 10, pag. 70, 1877.

even zoo sterk licht als matig heldere culturen van *Photobacterium indicum* (dus iets zwakker dan *Ph. phosphorescens*) en die een daarmede overeenkomstig, ofschoon niet indentiek, continu lichtspectrum van geel en groen licht vertoont *). Maar de verhouding tot de temperatuur is hier een geheel andere. *Photobacterium indicum* houdt in visch-pepton-gelatineculturen bij 36,5° C. plotseling op te lichten, om beneden die temperatuur onmiddelijk weder te beginnen, m. a. w. hier is het lichten een physiologische werking bij uitnemendheid. De lophineoplossing stijgt daarentegen aanhoudend in lichtkracht met stijgende temperatuur, volgens mijn eigen ondervinding zeker tot 60° C., en vertoont bij die temperatuur volstrekt geen plotselinge verzwakking, maar geeft natuurlijk den indruk, dat hier een gewoon chemisch proces plaats heeft. RADZISZEWSKY heeft door vele andere voorbeelden getracht te bewijzen, dat de analogie tusschen organisch- en chemisch-phosphorescentielicht werkelijk zeer groot zou zijn, hij wijst er bijv. op †), dat protagon in toluol opgelost bij 45° sterk groen licht geeft met choline, voor zoover vrije zuurstof aanwezig is, en hij denkt daarbij blijk-

---

*) Prof. F. LUDWIG, te Greiz, heeft de goedheid gehad mij het volgende mede te deelen over het licht van een drietal soorten van lichtbacteriën, welke ik hem had toegezonden: „Das Spectrum des *Photobacteriumlichtes* schwankt übrigens nicht unwesentlich nach dem Substrate. So ist das Licht auf Schweinefleisch im Vergleich zu dem blaugünen Gelatinelicht *weiss* bei *Ph. phosphorescens*. Der Anfang des Spectrums liegt denn auch bei dem Gelatinelicht nicht bei *D* sondern etwas bei *Eb*, wie mir auch jetzt ein directer Vergleich bestätigt. *Ph. Fischeri* und *Ph. Pflügeri* einerseits, *Ph. phosphorescens* anderseits konnte ich leicht durch ein hell orange gefärbtes und ein blaues Glas unterscheiden, in dem dort das Licht besser durch das orangegefärbte, hier besser durch das blaue Glas ging."

De afhankelijkheid der lichtkleur van den aard van het voedsel is blijkbaar in strijd met de theorie eener specifiëke lichtstof.

Overigens is het merkwaardigste resultaat van talrijke onderzoekingen in de literatuur verspreid, dat het lichtmaximum van het organische lichtspectrum *in vele gevallen* gelegen is nabij de lijn *b* in het groen ($\lambda = 528,26$) en daarmede bij *Pyrophorus noctilucus* volgens DUBOIS nauwkeurig samenvalt. Daar ter plaatse nu is ook juist gelegen de grootste intensiteit van het zonne-spectrum (CHARPENTIER, *Cpts. rendus.* 1885 p. 182), en daarvoor heeft ons gezichtszintuig de grootste gevoeligheid.

†) Ueber die Phosphorescenz der organischen und organisirten Körper, LIEBIG's *Annalen*, Bd. 203, pag. 305, 1880.

baar aan de algemeene verspreiding van lecithine als bestanddeel van levend protoplasma. Bij de herhaling van vele proeven van RADZISZEWSKY, heb ik zijne opgaven niet alle kunnen bevestigen, zoo kon ik bijv. volstrekt geen lichtverschijnselen waarnemen bij bittere amandelolie gegoten op barythydraat.

DUBOIS is bij zijn studiën over het licht der Pholaden *) tot een gelijksoortige conclusie gekomen als RADZISZEWSKY. Hij spreekt van een kristaliseerbaar bestanddeel der lichtcellen, waaraan hij den naam geeft van luciferine, en een enzym, de luciferase, dat in contact daarmede licht zou doen ontstaan. Maar de schrijver was bij zijne uitvoerige en schoone onderzoekingen over *Pyrophorus noctilucus* †) niet tot het aannemen van zoodanige hypothese gevoerd. In deze verhandeling komt hij echter tot het besluit, dat het lichten in de lichtorganen van *Pyrophorus* plaats kan hebben zonder contact met vrije zuurstof. Was dit werkelijk bewezen, dan zou ik mij verplicht rekenen de hypothese, dat het licht aan den levenden toestand van het protoplasma gebonden is, te laten vallen. Evenwel heb ik mij niet kunnen overtuigen, dat de proeven, die DUBOIS beschrijft, zijn opvallende onderstelling bewijzen. Hij trekt namelijk zijn besluit uit het feit, dat gedroogde lichtorganen na in een glasbuis te zijn geplaatst die luchtledig was gepompt, op het oogenblik dat hij daarin luchthoudend water bracht, plotseling begonnen te lichten en dit gedurende 40 minuten bleven doen. Naar mijn oordeel was hier een voldoende hoeveelheid zuurstof in de organen zelve achtergebleven. Lichtbacteriën zouden buiten twijfel hetzelfde verschijnsel vertoonen §), hoezeer door andere proeven uiterst gemakkelijk bewezen kan worden, dat voor het lichten der

*) *Comptes rendus*, T. 105, pag. 690, 1887.

†) Les Elatèrides lumineux, *Bullet. d. l. Soc. Zoöl. de France.* T. 11. p. 1, 1886.

§) *Photobacterium phosphorescens* kan nagenoeg ¼ uur in gedroogden toestand bewaard worden, maar sterft dan; *Ph. indicum* en *Ph. luminosum* sterven bij drogen onmiddellijk.

bacteriën de vrije zuurstof een noodzakelijke vereischte is. Maar deze vrije zuurstof kan in zekere hoeveelheid in losgebonden vorm, hoezeer vast genoeg om in het vacuum niet te ontwijken, in de zelfstandigheid der bacteriën opgehoopt voorkomen, en ik twijfel er niet aan, dat ditzelfde het geval moet zijn bij de lichtcellen van *Pyrophorus*. Merkwaardig genoeg was ook QUATREFAGES *) in zijn verhandeling over *Noctiluca miliaris* tot de slotsom gekomen, dat de lichtfunctie bij landdieren wel, maar bij *Noctiluca* niet op langzame verbranding berust, omdat zijn proeven hem leerden, dat het lichten in zuiver koolzuur lang voortduurt. Maar ook dit is het geval met de lichtbacteriën en bewijst alleen hoe uiterst gering het zuurstofverbruik is, dat met het lichten gepaard gaat. Overigens schijnt ook QUATREFAGES het bestaan van een afzonderlijke lichtstof in *Noctiluca* aan te nemen.

Na het doorlezen van de omvangrijke literatuur, die ik hier niet verder vervolgen wil, heb ik slechts één enkele waarneming gevonden, die op het eerste gezicht strijdig schijnt te wezen met de theorie dat de lichtfunctie aan den toestand van leven van het protoplasma gebonden is. Deze waarneming is van OWSJANNIKOW †). Hij vermeldt dat de lichtorganen van *Lampyris noctiluca* in verdund chroomzuur, osmiumzuur en spiritus meer dan 70 uren kunnen voortgaan met licht te ontwikkelen. Hij vermeldt echter den graad van verdunning dezer stoffen niet, zoodat zelfs dit feit mij volstrekt niet overtuigen kan, dat de betrokken organen dood waren, maar naar mijn oordeel alleen de gevolgtrekking wettigt, dat de levenskrachten met buitengewone taaiheid aan de levende stof der lichtcellen gebonden kunnen zijn.

De slotsom van al het voorgaande schijnt te wezen, dat er geen enkel afdoend bewijs is gegeven, dat de lichtfunctie van een bijzonder afscheidingsproduct of van eenigerlei

---

*) Mémoire sur la phosphorescence de quelques invertebrés marins. *Ann. d. sc. nat. Zoöl.* 3me Sér. T. 14, p. 236, in § 10. 1850.

†) Zur Kenntniss der Leuchtorgane von *Lampyris noctiluca*. *Mém. de St. Pétersbourg.* 7me sér. T. 11, pag. 1, 1868.

gewoon chemisch lichaam zou afhankelijk zijn. Er schiet niets anders over dan daarin een specifieke physiologische functie te zien, overeenkomende met de gistingsfunctie, het reduceerendvermogen, de contractiliteit, de prikkelbaarheid, en die alleen als zoodanig opgevat met vrucht bestudeerd kan worden.

Dit is de zelfde conclusie waartoe PFLÜGER reeds een vijftiental jaren geleden is gekomen *). PFLÜGER was de eerste die de lichtbacteriën aan een wetenschappelijk physiologisch onderzoek onderwierp en zijn woorden met betrekking tot onze oogenblikkelijke beschouwing verdienen hier herhaald te worden; zij luiden als volgt: »Da somit die Reizbarkeit bewiesen ist so ist gezeigt, dass die leuchtende Substanz lebende Materie ist. Denn die Reizbarket ist die erste und wichtigste Function der lebendigen Materie" (pg. 285). PFLÜGER's proeven stellen verder ten aanzien der lichtbacteriën van lichtende visch de noodzakelijkheid van de vrije zuurstof voor de lichtfunctie buiten twijfel, en hij komt zoodoende ten slotte tot de conclusie: »Der Lebensprocess ist die intramoleculare Wärme höchst zerzetsbarer, wesentlich unter Bildung von Kohlensäure und Wasser und amidartigen Körpern sich spaltender im Zellsubstanz gebildeter Eweissmolecüle, welche sich fortwährend regeneriren und auch durch Polymerisirung wachsen."

Zonder nu juist het laatste van de voorgaande citaten geheel te willen onderschrijven, meen ik toch dat PFLÜGER met juistheid het verband tusschen ademhaling, lichtfunctie en leven in de aangevoerde bewoordingen heeft omschreven.

Op grond van wat ik bij de lichtbacteriën heb waargenomen meen ik, gelijk ik dit reeds herhaaldelijk heb gezegd, wat de nauwkeurige bepaling van de lichtfunctie betreft, nog een stap verder te kunnen gaan. Alles wat dienaangaande tot nu toe bekend is geworden, is of in overeenstemming met, of voert noodzakelijk tot de gevolgtrekking, dat het lichten samengaat met den overgang der peptonen

*) Die Phosphorescenz der lebenden Organismen und ihre Bedeutung für die Principien der Respiration. *Archiv.* Bd, 10, p. 275, 1875.

van het voedsel in georganiseerde, levende stof. Dit geschiedt steeds onder den invloed van vrije zuurstof, bij de peptonkoolstofbacterien onder medewerking van een afzonderlijke koolstofbron, bij de peptonbacteriën met of zonder zoodanige medewerking.

Op de vraag, waarom niet alle organismen wier groei berust op peptonvoeding lichtend zijn, geloof ik dat het antwoord moet wezen, dat de levende stof der verschillende soorten uit den aard der zaak chemisch verschillend moet zijn, omdat juist daarop het verschil der soorten berust, en dat het niet te verwachten is, dat de bewegingstoestanden der moleculen bij den overgang van dezelfde initiale stoffen in specifiek verschillende lichamen identiek zouden zijn. Alleen dan wanneer die stoffen werkzaam zijn bij het constitueeren van een lichtend organisme of van een lichtorgaan, zouden hun bewegingstoestanden zoodanige moeten wezen, dat daaruit lichtontwikkeling voortvloeit.

Deze opvatting geeft aanleiding tot twee moeielijkheden. Vooreerst deze: In de lichtorganen der glimwormen en Pyrophoren gaat de lichtontwikkeling gepaard met het afsterven van cellen of van protoplasma onder vorming van een groote hoeveelheid spherokristallen van ammoniumuraat (volgens Kölliker) of guanine (volgens R. Dubois). Hier tegenover stel ik het feit, dat in deze organen tegelijkertijd in de lichtcellen zelve, of in een meer naar buiten gelegen laag celregeneratie plaats heeft, hetzij door deeling gelijk bij *Pyrophorus*, waar »lichtlaag" en »excreetlaag" beide meerdere cellen dik zijn, of door vernieuwing van het actieve protoplasma, gelijk bij *Lampyris*, waar de »lichtlaag" en de »excreetlaag" elk slechts één cellaag dik zijn, en dat het veel waarschijnlijker is dat hier, evenals bij de lichtbacteriën het *groeien* gepaard gaat met lichtontwikkeling dan het *afsterven*. De buitengewoon sterke excretie, die hier met het lichten verbonden is, zou slechts bewijzen dat de chemische constitutie van het protoplasma der lichtorganen niet langs denzelfden weg uit het voedsel bereikt wordt als de overeenkomstige (maar natuurlijk niet identieke) constitutie van de overige lichaamscellen, wier vorming met minder intensieve afscheidingen schijnt

gepaard te gaan *). Maar juist dit verschil in weg zou ook de aanleiding wezen, waarom in het ééne geval wel en in het andere geen lichtontwikkeling wordt waargenomen.

Een tweede moeielijkheid schijnt gelegen te zijn in het »bliksemlicht", dat vooral zeedieren, als middel tot zelfverdediging door schrikaanjaging, kunnen uitzenden. Dit licht staat onder den invloed van zenuwprikkels en berust niet onwaarschijnlijk op het plotseling invrijheidstellen van een zuurstofreserve, die door de zenuwkrache aan banden kan worden gehouden, banden die plotseling kunnen worden verbroken. Onze theorie eischt, dat peptonen gereed liggen met de zuurstof samen plotseling in den georganiseerden toestand van levend protoplasma over te gaan. Wellicht gevoelt men zich geneigd een zoodanigen gang van zaken veeleer aan een ontleding van levende stof dan aan den opbouw daarvan toe te schrijven. Toch zijn er feiten die ook in dit geval voor het hier verdedigde gevoelen schijnen te pleiten, bijv. de rustperioden, die vereischt worden om de genoemde werking bij herhaling mogelijk te maken. Nu kan men wel aannemen, dat deze perioden bestemd zijn om de afscheidingsproducten, die bij het bliksemlicht ontstaan tijd te geven om weggevoerd te worden, zoodat daarmede de aanleiding tot vermoeienis wordt weggenomen, — en ik geloof ook daarin ten deele de beteekenis dezer periodiciteit te moeten zien, — maar slechts ten deele, en ik beschouw de rustperioden als even noodzakelijk om den aanvoer der reageerende peptonen mogelijk te maken. In elk geval staat thans het feit vast, dat de lichtontwikkeling bij de lichtbacteriën met peptonverbruik gepaard gaat, en hier zijn alle proeven veel overzichtelijker en laten veel mindere reden tot twijfel bestaan dan bij de hoogere wezens.

Van het vraagstuk van de vermoeienis kan ik echter niet

---

*) Dat zoowel het onderscheid tusschen de verschillende organen van een en hetzelfde organisme, als het onderscheid tusschen verschillende soorten van organismen op een verschil in samenstelling van het constitueerend protoplasma moet berusten, is zeker aan geen twijfel onderhevig.

afstappen, zonder de eigenaardige ontdekking van QUATREFAGES (l. c. zie p. 287) ten aanzien van het licht van *Noctiluca miliaris* in herinnering te hebben gebracht. Dit infusorium kan tweeërlei soorten van licht uitstralen, namelijk »physiologisch licht" en »pathologisch licht". Het eerste wordt bij krachtig normaal leven waargenomen, het laatste onder den invloed van schadelijke invloeden, die weldra den dood zullen tengevolge hebben, bijv. aan kleine fragmenten van de huidlaag vóór het afsterven. QUATREFAGES ontdekte, dat krachtig lichtende, gezonde dieren, onderzocht bij een vergrooting van 100 à 120 lineair, niet gelijkmatig over hun geheele lichaamsoppervlakte lichtend zijn, maar als het ware bezaaid zijn met kleine lichtvelden, welke ieder op zichzelve met een sterrenhoop kunnen vergeleken worden, daar zij bestaan uit een zeer groot getal uiterst fijne lichtpunten. In den toestand van pathologisch lichten vond hij daarentegen de geheele huidlaag gelijkmatig lichtend. Hij vermeldt niet, of de lichtvlekken in den normalen toestand standvastige plaatsen innemen, ik vermoed dat dit niet het geval zal blijken te zijn. Wel zegt QUATREFAGES, dat elke vlek beantwoordt aan een protoplasmabalk, die uit het inwendige komende zich tegen de huidlaag aanzet, maar of de stand dezer balken constant is, laat hij in het midden, en ik betwijfel dit. In elk geval heeft hier de protoplasmabalk echter een bepaalden invloed en is blijkbaar het middel tot voorkoming van het pathologische licht. Evengoed laat zich deze invloed verklaren door aan te nemen, dat de balken de afscheidingproducten bij de lichtfunctie gevormd wegvoeren, als door de onderstelling dat zij de noodzakelijke stoffen voor de lichtontwikkeling aanvoeren. Bij het pathologische licht moet de band die de vrije zuurstof locaal gebonden houdt, gesprongen zijn, en de beschikbare peptonen al of niet ondersteund door amiden of andere koolstofverbindingen, kunnen in levende stof overgaan, zoolang totdat zij zijn opgebruikt, dat wil zeggen tot het oogenblik van den dood.

Bij de Indische lichtbacteriën heb ik in den laatsten tijd verschijnselen opgemerkt, welke evenals bij *Noctiluca*, wijzen op het bestaan van »physiologisch" en »pathologisch" licht,

maar op de bijzonderheden wensch ik thans niet nader in te gaan.

---

10. Bezit het bacteriënlicht een biologische beteekenis?

De vraag of de lichtbacteriën in den strijd voor het bestaan nut trekken van hun lichtvermogen, moet, naar ik geloof, ontkennend worden beantwoord. Liet zich aantoonen dat lichtende, hoogere zeedieren lichtend zijn door symbiose met lichtbacteriën, dan zou het oordeel anders moeten uitvallen, maar dit is nog in geen enkel geval aangetooond. Wel heeft Prof. Dubois medegedeeld dat hij van lichtende Pholaden lichtbacteriën, *Bacillus Pholas*, heeft geisoleerd *), maar hij heeft daar later aan toegevoegd, dat hij toch overtuigd is van het bestaan van een afzonderlijk lichtorgaan bij deze dieren. Hij had verder de beleefdheid mij mikrophotographieën van *B. Pholas* toe te zenden, die ik echter voor identiek houdt met mijn *Photobacterium luminosum*. Prof. Hoffmann te Leiden had de welwillendheid mij op mijn verzoek een groote voorraad levende Actinien en Pholaden af te staan, ik ontving ze echter in niet lichtenden toestand. Het mikroskopisch en bacteriologisch onderzoek der weefsels leerde deze als bacteriënvrij kennen. Wel was het siphoslijm van *Pholas dactylus* en *Ph. carinatus* rijk aan bacteriën †) verwant of identiek met den niet lichtenden toestand van *Photobacterium luminosum*, maar uit de cellen van wat ik als het lichtorgaan meende te moeten beschouwen kwamen geen bacteriën op.

Dr. Wijsman heeft met veel vaardigheid uit lichtend zeewater van het strand te Scheveningen een sterk lichtende Dinoflagellaat geisoleerd, welke gedetermineerd werd als *Ptychodiscus Noctiluca* Stein, en deze in vischpeptongelatine fijn gewreven. Lichtende bacteriën zijn er volstrekt niet uit opgekomen. Ik zelf heb van het Schevingschen strand twee lichtende *Sertularia*-soorten en een *Obelaria* verzameld, deze in zeewater goed gereinigd, toen in gesteriliseerd zeewater

---

*) *Comptes rendus* T. 107, p. 502, 1888.

†) En aan spermatozoïden.

verdeeld en dit op vischgelatine uitgegoten: ook daarbij verkreeg ik slechts enkele niet lichtende bacteriënkoloniën. Bij het mikroskopisch onderzoek van den centralen mergstreng dezer dieren vond ik zeer eigenaardige gestrekte cellen, die ik aanvankelijk voor bacteriën hield, maar ik geloof nu niet meer, dat zij dit werkelijk zijn. Overigens gevoel ik, dat al zulke negatieve proeven weinig bewijzen voor de stelling, dat mikroben aan het verschijnsel van het lichten *niet* ten grondslag kunnen liggen, want wellicht, zoo kan men beweren, verliezen de mikroben in het lichaam der dieren hun vermogen tot vrije vermeerdering daarbuiten *). Maar zelfs wanneer dit het geval ware zou daardoor, dat wat ik thans aannemelijk tracht te maken, niet weerlegd zijn. Indien toch de éénmaal ingedrongen bacteriën hun vermogen om buiten het dier te leven verloren hebben, dan vervalt daarmede de mogelijkheid, dat de mikroben van zee en strand uit deze lichtende dieren afkomstig zijn. Aan een selectieproces te denken door de lichtende dieren op de lichtbacteriën uitgeoefend houd ik derhalve voor ongerijmd.

Het vroeger (pag. 283) genoemde lichtslijm, dat vele zeedieren, zooals sommige lichtende Anneliden en eenige Medusen bij naderend gevaar in het zeewater verspreiden, bestaat uit netelcellen en levend protoplasma uitgestooten uit de lichtcellen. Reeds SPALLANZANI †) merkt daarvan op, dat het »netelt", en wel zoo sterk dat het branden op de tong een dag lang voortduurt; verder zag hij, dat dit slijm eenigen tijd in

---

*) Deze redeneering is op de volgende waarneming gegrond. De zoöchlorellen (*Zoöchlorella conductrix* BRANDT) van *Hydra viridis* zijn zonder twijfel van buiten in het lichaam dezer dieren gedrongen wieren, naar mijn oordeel behoorende tot het geslacht *Chlorococcum*, waarvan ik sinds nagenoeg een jaar eene soort in gelatineculturen bezit. De zoöchlorellen zelve kunnen echter niet op gelatine of in vloeistoffen gecultiveerd worden; zij houden op zich te deelen, wanneer zij niet langer in contact zijn, met het levende protoplasma van de dierlijke cellen. Hetzelfde vond ik ten aanzien van de zoöchlorellen van *Paramaecium Bursaria* en *Stentor polymorphus*. Ook *Zoöchlorella parasitica* BRANDT, van *Spongia fluviatilis*, is niet in vrije cultuur te brengen.

†) Reis naar de beide Sicilien 1793, Cap. 27. Ik citeer volgens EHRENBERG, Das Leuchten des Meeres, *Abh. Berl. Akad.* 17 April 1834, p. 44.

zeewater, in urine, of in melk kan voortlichten, maar dan uitdooft, — blijkbaar door afsterven. Ook in dit geval kan dus niet aan lichtbacteriën worden gedacht.

Intusschen kan ik niet nalaten hier nog een eigen ondervinding mede te deelen, die overeenkomt met wat Dubois aangaande *Pholas* heeft vermeld.

Toen ik in Aug. 1888 *Photobacterium luminosum* uit het zeezand had geisoleerd, merkte ik op, dat zekere, op warme zomeravonden veelvuldig op het strand geworpen lichtmedusen, die ik voor *Phialidium variabile* houd, na op het zand te zijn fijn gewreven een helder lichtend slijm achterlaten, dat volkomen in lichtkracht beantwoordt aan mijn culturen van *Ph. luminosum*. Ik nam nu na zorgvuldig afwasschen in zeewater enkele der dieren mede en heb die op de zelfde wijze onderzocht als boven beschreven. Uit één daarvan is een rijke reincultuur van *Ph. luminosum* opgekomen. Het is niet te ontkennen, dat het dier in contact was geweest met het zeewater en met het zeezand, die beide *Ph. luminosum* bevatten. Maar ditzelfde geldt ten opzichte van de andere genoemde lichtende dieren. Voorloopig leid ik uit deze waarneming alleen af, dat de substantie van het medusenlichaam een uitmuntend voedsel voor deze lichtbacterie moet wezen, een feit, dat zeker niet zonder belang is; maar gewoon vischextract is dit bij de noodige voorbereiding eveneens, zoodat daarbij aan geen bijzondere biologische beteekenis schijnt gedacht te moeten worden.

Nu is er nog een andere vraag. Kan het lichtend worden van *doode* zeedieren langs het strand wellicht een middel van verspreiding zijn voor de lichtbacteriën?

Ook deze vraag kan zonder bedenken ontkennend worden beantwoord. De stroomen van de zee zullen waarlijk wel voor een voldoende verspreiding der lichtbacteriën zorgen, de branding en het strand langs de Noordzee zijn, — zoo was het ten minste in 1888, — met een ware cultuur dezer bacteriën bedeeld. Verder valt aan verspreiding door vogels niet te denken, omdat de lichtbacteriën niet tegen uitdrogen bestand zijn, waardoor het verslepen door middel van lichtende voorwerpen bijna geheel is buitengesloten, en nog veel min-

ler kunnen de lichtbacteriën zure verteringsappen der dieren verdragen, waardoor ook de verspreiding door de excrementen van vogels onmogelijk wordt.

Niemand weet welke ontdekkingen in de toekomst zullen gedaan worden ten opzichte van het leven in de diepte van den oceaan, waarover eerst in den laatsten tijd eenig licht begint op te gaan, en waaruit blijkt, dat de diepe duisternis, die daar heerscht, opgehelderd wordt door de stralen van allooze lichtdieren, wier biologie onbekend is. Maar voorloopig hebben wij geen aanwijzingen om daarmede de lichtmikroben in verband te brengen, zoodat ik geloof dat ieder mij toegeven, dat er geen grond is om in het bacteriënlicht een voor deze mikroben nuttig verschijnsel te zien. Blijkbaar is dit licht het accidenteele gevolg van chemische omzettingen, even onafhankelijk van de biologische mogelijkheid tot het voortbestaan der bacterien, als het lichten van de lophine dit is voor de chemische mogelijkheid van het bestaan dezer stof. Deze conclusie wordt nog versterkt door het feit, dat *Photobacterium luminosum* veel gemakkelijker en langduriger in den niet lichtenden toestand is te verkrijgen en ook werkelijk verkeert, dan als lichtbacterie. Alleen een zeer actieve ontwikkeling bij een lage temperatuur (15° C.) gaat met een krachtig lichtverschijnsel gepaard, — het langzame leven bij ontoereikende voeding, en de zeer actieve groei bij hoogere temperaturen gaan daarentegen samen met volkomen duisternis, en in dezen laatsten toestand zullen onze lichtbacteriën langs de zeestranden wel gewoonlijk verkeeren; slechts bij uitzondering zullen de voedingsvoorwaarden, welke het zeewater aanbiedt voldoende zijn voor snelle vermenigvuldiging gepaard met krachtig licht. Deze laatste redeneering geldt wel is waar niet in dezelfde mate ten opzichte van *Photobacterium Pflügeri* en *Ph. phosphorescens*, wier lichtkracht ook bij veel minder actief leven voortduurt, maar bij geheel ontoereikende koolstofvoeding, zonder dat de dood daarmede behoeft gepaard te gaan, toch ook volkomen verdwijnt, zoodat ik mij voorstel, dat ook deze bacteriën het grootste deel van het jaar in duisteren toestand in strand en zee voortbestaan.

---

11. Toepassingen op het onderzoek van enzymen.

a. *Onderzoek van diastische enzymen.*

In het begin van dit opstel heb ik er op gewezen, dat *Ph. phosphorescens* op maltose reageert, terwijl *Ph. Pflügeri* dit niet doet. Van deze eigenschap is op eenvoudige wijze gebruik te maken bij het zoeken naar het antwoord op zekere physiologische vragen, die langs den gewonen chemischen weg niet dan moeielijk zijn uit te maken, namelijk het beslissen of bij diastatische processen glucose of maltose als omzettingsproduct ontstaat. De uitvoering en de beteekenis van zoodanige proef zal uit het volgende duidelijk worden *).

Aan zeewater met 8 pCt. gelatine, 1 pCt. pepton, en $^1/_4$ pCt. goed doorgekookte aardappelstijfsel, voegt men aan een eerste hoeveelheid *Ph. phosphorescens* in overmaat, aan een tweede partij *Ph. Pflügeri* in overmaat toe. Na het stollen ontstaan gelijkmatig lichtende gelatineplaten, waarin de stijfsel geheel onveranderd blijft voortbestaan, daar *Ph. phosphorescens* en *Ph. Pflügeri* deze stof niet als voedsel kunnen gebruiken, noch daarin eenigerlei omzetting teweegbrengen omdat zij geen enzymen afscheiden, welke diastatische werking uitoefenen. Plaatst men nu echter op de oppervlakte der beide gelatineplaten verschillende preparaten, welke diastase bevatten, dan diffundeert deze in de gelatine naar alle zijden en zet de stijfsel om in suiker en dextrine. Hierbij wordt het volgende waargenomen.

Wanneer men als diastasehoudende preparaten gebruik maakt van maltase en dextinase uit mout, van pancreasdiastase †), ptyaline §), nefrozymase **), amylobacter-

*) Verg. Wijsman l. c., zie pag. 246.

†) Verkregen door levend pancreasweefsel in sterken alkohol te brengen. Er ontstaat dan een witte massa, die gemakkelijk tot poeder kan gewreven worden, en die vrij is van trypsine zoodat de gelatine onder den invloed daarvan niet smelt.

§) Verkregen door speeksel met chloroform te schudden. Cellen en slijm bezinken met een gedeelte van de chloroform. De bovendrijvende vloeistof is een oplossing van ptyaline in chloroformwater, en kan in een gesloten flesch onbegrensd lang bewaard blijven.

**) Verkregen door urine te precipiteeren met alkohol.

diastase *), diastase van de vruchtwanden van *Cytisus Laburnum*, van ontkiemde boekweit, van ontkiemde zaden en *Mirabilis Jalapa*, of eindelijk van maïsdiastase, dan ziet men op den *Phosphorescensgrond* weldra sterke lichtvlekken ontstaan, die opgevolgd worden door groeivelden. Op den *Pflügerigrond* ontstaan geen ware licht- en groeivelden door diffundeerende stoffen, maar er is alleen op de plaatsen, waar de diastasepreparaten de gelatine onmiddelijk aanraken een zwak verschijnsel van groei en een sterk locaal lichteffect waar te nemen, waarvan de verklaring vroeger (pag. 264) is gegeven.

Uit deze proeven volgt, dat de genoemde diastasesoorten geen glucose als omzettingsproduct voortbrengen. Of evenwel in al deze gevallen alleen maltose als lichtmateriaal ontstaat betwijfel ik, en geloof veeleer, dat hierbij in bepaalde gevallen nog een andere suiker ontstaat, welke met *Ph. phosphorescens* lichtgevend is zonder dit te wezen met *Ph. Pflügeri* en die wellicht in het midden staat tusschen de maltose en de niet lichtende maltodextrine.

b. Onderzoek van inverteerende enzymen.

Een tweede reeks van toepassingen waartoe de lichtbacteriën aanleiding kunnen geven is die naar het onderzoek van de inversieproducten van suiker, onder den invloed van inverteerende enzymen, door gistsoorten of andere mikroben afgescheiden. Een voorbeeld zal mijn meening duidelijk maken.

Aan zeewaterpeptongelatine voegt men een overmaat van *Ph. phosphorescens* toe. Na korten tijd houdt het lichten van de gestolten gelatinelaag op wegens gebrek aan assimileerbare koolstofverbindingen. Nu late men daarin diffussievelden ontstaan van rietsuiker, raffinose en melksuiker, alle lichamen, welke niet door de lichtbacteriën worden omgezet en dus tot geene locale lichtverschijnselen aanleiding geven. Trekt men evenwel in deze diffusievelden strepen van inverteerende mikroben, of plaatst men daarop kleine

*) Verkregen door een normale butylalkoholgisting, veroorzaakt door *Bacillus Amylobacter*, met alkohol te precipiteeren.

hoevelheden van de daardoor afgescheiden invertine, dan worden de genoemde suikers daar ter plaatse in invertsuiker omgezet, die, gelijk de ondervinding leert, uitmuntend lichtvoedsel is voor de gewone lichtbacteriën. In het bovengenoemde geval, waarbij men over raffinose-, melksuiker- en rietsuiker-diffusievelden beschikt, laat zich de volgende niet onbelangrijke proef uitvoeren.

Saccharomyces Kefyr, de gist uit de kefyrkorrels, is in staat melksuiker te vergisten, wat door de biergist, *Sacch. cerevisiae*, en de wijngist *Sacch. ellipsoideus* niet geschiedt. Rietsuiker en raffinose worden echter door al deze drie gistsoorten geinverteerd, en dus voor alkoholgisting geschikt gemaakt. Trekt men nu strepen van *Saccharomyces cerevisiae*, *Sacch. Kefyr* en *Sacch. ellipsoideus* door de diffussievelden der genoemde suikersoorten op den *Phosphorescens*-grond dan kan men na enkele dagen de volgende waarnemingen doen, welke de verklaring geven van de genoemde verschillen in geschiktheid tot vergisting van suikersoorten.

Sacch. Kefyr blijkt een enzym te vormen, de lactase, waardoor gelijk gezegd, de drie genoemde suikersoorten worden geinverteerd, dat is waardoor suikers ontstaan, die tot den groei van *Phosphorescens* aanleiding kunnen geven. Het gevolg is dat er rondom de strepen dezer gistsoort in de diffusievelden van alle drie genoemde suikers licht- en groeivelden van *Ph. phosphorescens* zichtbaar worden.

Sacch. cerevisiae en *Sacch. ellipsoideus* vormen evenwel een minder actief enzym, de invertine *), dat wel in staat is rietsuiker en raffinose, maar niet om melksuiker te inverteeren †). Hiervan is het gevolg, dat rondom de strepen van deze beide gistsoorten in het melksuikerveld met *Ph. phosphorescens* niets bijzonders geschiedt; de duistere toestand duurt voort, groei heeft niet plaats. Anders evenwel binnen de diffusievelden van rietsuiker en raffinose; deze suikers

*) De invertine van de biergist en de wijsgist schijnen identiek te wezen.

†) Hiermede in overeenstemming kan melk gemakkelijk met kefyrgist, daarentegen niet met bier- en persgist (persgist bestaat uit de zelfde soort als wijngist n. l. *Sacch. ellipsoideus*) tot gisting gebracht worden.

worden door de invertine wel omgezet, en leveren invertsuiker die zoowel tot groei als tot lichtontwikkeling van *Ph. phosphorescens* aanleiding kan geven. Hier moet ik echter opmerken, dat deze proeven zeer subtiel zijn, en in hun uitkomsten van bijomstandigheden kunnen afhangen, welke mij tot nu toe niet duidelijk zijn geworden *).

De invertine, de lactase en in het algemeen alle enzymen, worden uit hun oplossingen neergeslagen, hetzij met alkohol of met andere middelen, die volstrekt niet de zekerheid geven tot het verkrijgen van zuivere lichamen, of juister gezegd, die de zekerheid geven, dat er allerlei andere stoffen, in het bijzonder dextrinen, gommen en peptonen mede neerslaan. Het is daarom wenschelijk om bij het uitvoeren van proeven, waarbij enzymen zullen worden aangetoond door groei- of lichteffecten, de materialen, die de enzymen bevatten, zoowel te laten inwerken op een gelatinelaag, die behalve de mikroben welke als reactief dienen, ook nog de stof, die de enzymatische omzetting zal ondergaan, bevat als op een overeenkomstigen grond zonder de stof die omgezet zal worden. Uit de vergelijking van de resultaten in de twee gevallen verkregen, laat zich dan gewoonlijk het aandeel beoordeelen, dat de producten van de enzymwerking bezitten. Ook daarbij kan men echter een fout maken, want het is mogelijk, — en bij het onderzoek van de diastase-preparaten komt dit werkelijk voor, — dat in het ruwe enzym een bestanddeel voorkomt, dat eerst werkzaam wordt in tegenwoordigheid van een weinig van het omzettingsproduct door het enzym gevormd en dat aan de waarneming ontsnapt zonder de aanwezigheid van het bedoelde product van omzetting. Zoo zit er in de geprecipiteerde diastase, hetzij dat deze uit mout, speeksel, urine of pancreas afkomstig is, een stof, waar-

*) Bij sommige proeven heb ik namelijk licht- en groeieffecten met melksuiker, onder den invloed van *Saccharomyeen ellipsoideus* verkregen. Ik heb mij daarom de vraag voorgelegd of het mogelijk is, dat onder de melksuikers van den handel wellicht isomeren kunnen voorkomen, die ten opzichte van de invertine verschillend zouden reageeren. Maar die vraag bleef tot nu toe onbeantwoord. Verder laat zich aan de mogelijkheid denken, dat er onder wat ik als *S. ellipsoideus* determineer verschillende gistrassen voorkomen.

schijnlijk een peptonsoort, die niet alleen met maltose een groei- en lichtverschijnsel met *Ph. phosphorescens* kan geven, gelijk handelspepton en maltose dit te zamen doen, maar dat door *Ph. phosphorescens* zelfs gelijktijdig met maltodextrine geassimileerd kan worden, waardoor laatstgenoemde stof tot lichtstof wordt. Intusschen zijn de diffusievelden, van het hier bedoelde lichaam in de gelatinegronden zóó klein, dat men met de noodige opmerkzaamheid zich gemakkelijk voor verwisseling met andere stoffen kan vrijwaren. Natuurlijk wordt de invloed en de beteekenis daarvan veel belangrijker in vloeibare culturen.

d. Onderzoek van tryptische enzymen.

De trypsine is het eiwitenzym van de pancreas. Vele soorten van bacteriën scheiden een daarmede identiek of zeer na overeenstemmend enzym af. Daaronder behooren, gelijk wij zagen, onze pepton-lichtbacteriën. Naast de vraag naar de identiteit of verscheidenheid dezer enzymen, welke door het onderzoek van de producten, die onder hun inwerking uit *dezelfde* proteïnestof kunnen ontstaan, moet beantwoord worden, staat de niet minder belangrijke vraag naar den aard der producten door hetzelfde enzym gevormd uit verschillende eiwitachtige lichamen. De peptonbacteriën in het algemeen, de pepton-lichtbacteriën in het bijzonder, zullen wellicht een middel worden om deze vragen te beantwoorden. Hiertoe is echter een meer nauwkeurige kennis dan wij tot nu toe bezitten noodig, ten opzichte van de splitsingsproducten der eiwitachtige stoffen onder enzyminvloeden, en van de werking van elk dezer producten op de physiologische functiën der peptonbacteriën.

Naar alle waarschijnheid is de trypsine, door de lichtbacteriën afgescheiden, identiek met die van de pancreas. Dit schijnt ten minste te volgen uit de analoge omzetting welke beide in eiwit, gelatine en caseine teweeg brengen, voor zoover uit overeenkomst in groei- en lichtkracht bij de Indische lichtbacteriën mag besloten worden tot gelijkheid van de daarbij werkzame stoffen. Zoodanige identiteit acht ik

echter niet bewezen ten opzichte van de eitwitenzymen door de groep der hooibacillen afgescheiden *).

De proeven kunnen als volgt worden genomen.

In een kolfje bevindt zich phosphaathoudend zeewater met 3 pCt. gelatine, dat door koken gesteriliseerd, en daarna met *Ph. indicum* geinfecteerd is. Na 24 uur bij 30° in een thermostaat vertoefd te hebben, is er eenige groei- en lichtontwikkeling, maar beide blijven zwak, zoodat de door *Ph. indicum* afgescheiden trypsine slechts zeer weinig stoffen uit de gelatine vormt, welke tot lichtontwikkeling aanleiding kunnen geven. Intusschen bewijst het verlies van het stollingsvermogen van de gelatine, dat de trypsineafscheiding uit de bacteriën is begonnen. Na verloop van een verder dertigtal uren kan de lichtkracht zeer groot zijn geworden, ja, zoo groot als mogelijk is. Maar ook dan, en zelfs na nog langer tijd blijft de groei zwak. De vermeerderde lichtkracht bewijst echter, dat uit de gelatine lichtvoedsel moet zijn ontstaan.

Voegt men nu aan zoodanige cultuurkolfjes, vóórdat de bacteriën de gelatine geheel gepeptoniseerd hebben, een zeer geringe hoeveelheid trypsine toe †) en laat het geheel bij 30° C. 24 uur aan zichzelf over, dan wordt de lichtkracht in de meeste kolfjes tot het maximum verhoogd, terwijl ook hierbij de groei zeer zwak blijft. De gang der verschijnselen geeft slechts aanleiding tot een verhaasting daaarvan te besluiten, zoodat alleen aan een verschil in de concentratie van de pancreas- en de bacteriën-trypsine kan gedacht worden, maar niet aan eenig qualitief onderscheid. Hetzelfde resultaat heb ik verkregen door als voedsel voor onze lichtbacteriën niet gelatine, maar in zeewater hard gekookt eiwit te gebruiken. Ook in zoodanige vloeistof heeft eerst een zwakke, later sterkere lichtontwikkeling

---

*) Onder „hooibacillen" versta ik hier alle gelatine-smeltende bacillen, wier sporen tijdelijk het kookpunt kunnen verdragen. Zij behooren tot verschillende soorten.

†) Zeer actieve preparaten kan men maken door extracten van pancreaspoeder van den handel met alkohol te precipiteeren. Met eenige zorg zijn zulke precipitaten gemakkelijk steriel te verkrijgen.

plaats, die bij pancreastoevoeging, d. w. z. door trypsinvermeerdering, belangrijk verhoogd kan worden. Bij pancreas- en bacteriëntrypsine beide, schijnt het temperatuuroptimum voor de omzetting, even als de daarvoor gunstigste graad van alkaliniteit dezelfde te wezen

Dat het pancreas-trypsinepreparaat bij onze proef werkelijk het licht- en plastischvoedsel uit de gelatine voortbrengt, en niet zelve zekere bestanddeelen bevat, welke deze functiën kunnen vervullen, volgt uit het feit, dat eene steriele oplossing in zeewater, van een hoeveelheid daarvan, gelijk aan die welke bij de bovengenoemde proeven werd gebruikt, na infectie met *Ph. indicum* volstrekt niet tot lichten of groei aanleiding heeft gegeven.

Delft, Mei 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 Maart 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Onder-Voorzitter, VAN DIESEN, SCHOLS, J. A. C. OUDEMANS, ZEEMAN, PEKELHARING, VAN 'T HOFF, PLACE, STOKVIS, KORTEWEG, KAPTEYN, MULDER, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, MAC GILLAVRY, LORENTZ, SCHOUTE, VERLOREN, ZAAIJER, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, BAEHR, MARTIN, BEIJERINCK, HOOGEWERFF, FRANCHIMONT, VAN DORP, KAMERLINGH ONNES, WEBER, FORSTER, HUBRECHT, VAN BEMMELEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. W. P. WOLTERS, Secretaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 23 Februari 1890; 2°. G. S. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 24 Februari 1890; 3°. den Secretaris van de kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, 1890; 4°. D. STUR, Directeur van de k.k. geologische Reichsanstalt te Weenen, 24 Maart 1890; 5°. F. HEGER, Secretaris van de anthropologische

Gesellschaft te Weenen, 18 Maart 1890; 6°. D. STRICKER, Bibliothecaris van de Senckenbergische Gesellschaft te Frankfort a/M., 10 Januari 1890; 7°. den Bibliothecaris van de Società Italiana delle Scienze te Rome, 1 Maart 1890; 8°. L. CREMONA, Rome, Februari 1890; 9°. A. C. DROLSUM, Bibliothecaris van de Bibliothèque de l'Université te Christiania, 28 October 1889; 10°. F. B. KYNGDON, Secretaris van de royal Society of N. S. W. te Sydney, 30 Januari 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 6, 11 Maart 1890; 2°. het Ministerie van Marine te 's Gravenhage, 21 Februari 1890; 3°. E. P. WRIGHT, Secretaris van de royal Irisch Academy te Dublin, 1890; 4°. A. LIVERSIDGE, Secretaris van de Australian Association for the advancement of Science, te Sydney, October 1889, waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn verontschuldigingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, BEHRENS, MOLL en KOSTER over het niet bijwonen van de vergadering.

— De rapporten van de HH. VAN DER WAALS en LORENTZ over de verhandeling van Dr. R. SISSINGH; van de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG over die van Dr. JAN DE VRIES, en van de Heeren ENGELMANN en DE VRIES over die van Dr. H. J. HAMBURGER, luiden alle gunstig. Dientengevolge worden genoemde bijdragen bestemd voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer LORENTZ spreekt »over de moleculaire theorie van verdunde oplossingen" en toont aan, hoe de bekende formule voor de dampspanning van zulke oplossingen afgeleid kan worden uit beschouwingen omtrent moleculaire beweging en attractie, en hoe eene dergelijke theorie van

toepassing is bij de verklaring van het mechanisme van den osmotischen druk. Een kort verslag der voordracht zal worden gereed gemaakt voor het Proces-Verbaal.

— De Heer Baehr deelt eenige beschouwingen mede over de herpolhodie van Poinsot en zet uiteen, dat deze geene buigpunten hebben kan, dan tenzij de ellipsoïde geene centrale is. Hij biedt een opstel over het gesprokene aan voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer Pekelharing spreekt over vernieling van miltvuursporen door konijnenbloed.

Zooals vroeger door hem werd medegedeeld — in de Zitting van 29 Juni 1889 — gaan niet alleen miltvuurbacillen, maar ook miltvuursporen, te gronde wanneer zij, ingepakt in perkamentpapier, bij een konijn onder de huid gebracht worden.

Het te gronde gaan van de bacillen zou men kunnen toeschrijven aan het gebrek aan zuurstof of aan den overvloed van CO_2 in de omgeving van de in het papier ingesloten bacillen. Maar deze verklaring bleek ontoereikend, nu ook sporen in het onderhuids-bindweefsel gedood werden. Miltvuursporen toch zijn zoowel tegen gebrek aan zuurstof als tegen overvloed van koolzuur bestand. Twee pakjes met sporenhoudende agar-agarculturen, juist zooals die welke bij konijnen onder de huid gebracht werden, met zorgvuldige uitsluiting van andere bacteriën gemaakt, werden in reageerbuisjes onder een laag agar-agar ter hoogte van 8 Ctm., resp. 18 en 37 dagen, in de broeistoof bij 37° C. bewaard, en bleken daarna, door inenting bij konijnen, geheel onverminderde virulentie behouden te hebben. Miltvuursporen in bouillon, gedurende 19 dagen in een bol-toestelletje naar Liebig onder zuivere waterstof bewaard, hadden daarna evenmin haar virulentie als het vermogen om, buiten het dierlijk lichaam, op agar-agar te ontkiemen, verloren. Evenzoo werd de virulentie van miltvuursporen, die gedurende 15 dagen in een atmosfeer van zuiver koolzuur bewaard waren, geheel onverminderd gevonden.

Aan de mogelijkheid dat de miltvuursporen onder de huid gedood werden door bacteriën, die bij de verwonding mede binnengedrongen zouden zijn, viel niet te denken. Indien de noodige voorzorgsmaatregelen in acht genomen waren, kon men één of twee weken later, als het pakje onder de huid weggenomen werd, daarin niet alleen geen miltvuursporen of bacillen, maar ook geen andere bacteriën, zoomin door het mikroskoop als door kweekproeven, aantoonen.

In de allereerste dagen na het onder de huid brengen van de sporen, ontkiemden enkele daarvan. Zonder twijfel onder begunstiging van de lucht, die in het pakje mede ingesloten was. Maar als, na eenige dagen, deze lucht geresorbeerd was, en nu slechts vloeistof, rijk aan koolzuur, maar uitermate arm aan zuurstof, het pakje binnendringen kon, was er van ontkiemen niets meer te bespeuren. Wanneer na een week b. v. het pakje voor den dag gehaald en geopend werd, waren daarin nog wel duidelijk te herkennen en goed kleurstof opnemende sporen te vinden, maar geen bacillen. Na nog langeren tijd waren ook de sporen verdwenen. Deze kunnen dus, zonder ontkiemd te zijn, in het onderhuids-bindweefsel van het konijn vernield worden.

Het meest aannemelijk scheen de onderstelling, dat de vernielende werking moest toegeschreven worden aan een stof die, zooals door Nuttall, Buchner, Lubarsch en anderen is aangetoond, in het bloed, ook bij konijnen, voorkomt en in staat is miltvuurbacillen te dooden. Een bezwaar tegen deze onderstelling kon echter hierin gezocht worden, dat een vernielende werking van bloed wel is aangetoond op miltvuur-*bacillen*, maar niet op sporen. Buchner acht het zelfs a priori zeker, dat de zoo resistente sporen niet door bloed gedood kunnen worden.

Intusschen leerde het onderzoek, dat ook de miltvuursporen, hoeveel weerstand zij ook aan andere invloeden mogen bieden, tegen de werking van het bloed van konijnen onvoldoende bestand zijn.

Uit de carotis van een konijn werd bloed opgevangen in een flesch met glazen kralen, en door schudden gedefibrineerd. Een zekere hoeveelheid daarvan, 5 of 10 cc., werd

in een reageerbuisje gebracht en vermengd met een droppel indifferente keukenzoutoplossing, die met een, enkel sporen bevattende, miltvuurcultuur op agar-agar tot een gelijkmatig troebele vloeistof was aangemengd. Bij dit alles werd zorgvuldig tegen het indringen van andere bacteriën gewaakt. Nadat de sporen zooveel mogelijk gelijkelijk in het bloed verdeeld waren, werd met een tot een lis omgebogen platinadraad een droppel van het bloed in gesmolten voedingsgelatine gebracht, die daarna in een vlakke schaal werd uitgegoten. Het buisje werd dan in de broeistoof op 37° gebracht. Na eenig tijdsverloop werd weder met een droppel bloed, altijd met dezelfde platinalis aan het buisje ontnomen, een schaalcultuur gemaakt. Uit de volgende voorbeelden moge blijken, dat het aantal der in het bloed gebrachte sporen spoedig belangrijk afnam. Het aantal koloniën in de schaalculturen opgekomen was in 7 proeven:

I.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	1130
	$^1/_2$ uur	»	»	»	»	»	»	463
	$4^3/_4$ »	»	»	»	»	»	»	2908
	26 »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.
II.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	1798
	1 uur	»	»	»	»	»	»	663
	3 »	»	»	»	»	»	»	433
	24 »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.
III.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed:	ontelbaar
	1 uur	»	»	»	»	»	»	1912
	$2^1/_4$ »	»	»	»	»	»	»	1468
	$5^1/_2$ »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.
IV.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	7876
	$2^1/_4$ uur	»	»	»	»	»	»	2014
	$5^1/_2$ »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.
V.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	4121
	$1^1/_4$ uur	»	»	»	»	»	»	2024
	$6^3/_4$ »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.

VI.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	2248
	2 uur	»	»	»	»	»	»	994
	6 »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.

VII.	Terstond	na	de	infectie	van	het	bloed	3341
	2 uur	»	»	»	»	»	»	552
	6 »	»	»	»	»	»	»	281
	24 »	»	»	»	»	»	»	ontelbaar.

Evenals bij de proeven, die met bacillen genomen zijn, neemt dus het aantal der koloniën aanvankelijk sterk af. Dan blijkt het vermogen van het bloed om de mikroben te dooden, uitgeput te zijn. De sporen ontkiemen, en er ontstaat een welige cultuur.

Het is echter door de medegedeelde proeven nog niet afdoende bewezen, dat de sporen als zoodanig door het bloed gedood worden. Men zou kunnen meenen, dat zij eerst ontkiemden en de daaruit ontstane bacillen gedood werden. Dat werkelijk de sporen zelven niet tegen de werking van het bloed bestand zijn, bleek, wanneer het geïnfecteerde bloed bewaard werd bij een temperatuur, waarbij het ontkiemen der sporen niet mogelijk is. De vernieling der sporen heeft niet alleen plaats bij lichaamstemperatuur, maar evenzeer als het bloed bij een temperatuur van 10° C. of zelfs in smeltend ijs bewaard wordt, of ook bij een temperatuur van 47° C. Dan vertoont, nu de bacteriën niet in staat zijn zich te vermeerderen, de vernielende werking zich gedurende veel langeren tijd, zooals uit de volgende voorbeelden blijkt.

I. Bij 10° C.

Terstond	na	de	infectie	2443	koloniën
1¼ uur	»	»	»	1936	»
6¾ »	»	»	»	388	»
24 »	»	»	»	40	»
48 »	»	»	»	2	»

II. Bij 0° C.

Terstond	na	de	infectie		ontelbaar aantal
$6^1/_2$ uur	»	»	»		2280
24	»	»	»	»	603
48	»	»	»	»	313
144	»	»	»	»	147

III. Bij 0° C.

Terstond	na	de	infectie		ontelbaar aantal
$6^1/_2$ uur	»	»	»		3784
24	»	»	»	»	691
48	»	»	»	»	359
144	»	»	»	»	188

IV. Bij 47° C.

Terstond	na	de	infectie		1941
2 uur	»	»	»		16
6 »	»	»	»		6
24 »	»	»	»		2.

Bij een temperatuur van 47° C. had de vernieling bovendien veel sneller plaats dan bij lagere temperaturen. In de proeven, die bij deze temperatuur genomen werden, kon echter het onderzoek niet langer dan 24 uur voortgezet worden, omdat de langdurige werking der warmte de eiwitachtige stoffen van het bloed tot stolling bracht.

Het vermogen van het bloed om de sporen te dooden, neemt bij de werking allengs af, zooals blijkt uit de proeven bij lage temperatuur genomen. Eindelijk gaat het geheel verloren. Wordt dan een nieuwe hoeveelheid sporen aan het bloed toegevoegd en het bloed steeds bij lage temperatuur bewaard, dan blijft het aantal der sporen daarin hetzelfde.

Nu is het ook niet meer zoo onverklaarbaar dat miltvuurbacillen of sporen, bij een konijn in de circulatie gebracht, zich vermenigvuldigen en het dier dooden, maar in een pakje opgesloten in het onderhuids-bindweefsel zelven te gronde gaan. In het laatste geval toch worden zij van

den toevoer van zuurstof verstoken, en zijn dus weerloos blootgesteld aan de werking van schadelijke stoffen, die in het voedingsvocht zijn opgelost, en het pakje kunnen binnendringen. Zoodra zij echter met den stroom van het voedingsvocht of van het bloed worden medegevoerd, komen zij met zuurstof in aanraking en kunnen dan, evenals in de reageerbuisjes, die bij lichaamstemperatuur bewaard worden, snel zich vermeerderend, de overhand krijgen. Ofschoon, zooals BUCHNER aantoonde, de stof waaraan het bloed zijn vermogen om bacteriën te dooden dankt, in het serum opgelost is en niet door perkamentpapier diffundeert, is het toch niet mogelijk het miltvuurvirus tegen de werking van zulk een stof in het onderhuids-bindweefsel te beschutten door het in een dialysator op te sluiten. Zooals vroeger reeds medegedeeld is, dringen leucocyten tusschen de vezelen van het perkamentpapier door en banen daarmede den weg voor opgeloste stoffen. Miltvuursporen, ingesloten tusschen twee schijfjes perkamentpapier, tusschen tinnen, vast op elkander geslagen ringen ingeklemd, werden onder de huid van het konijn vernield, ofschoon zoo gemaakte dialysators zoo goed gesloten waren dat zij, met een droppel onverdund kippeneiwit gevuld in een paar c.c. gedestilleerd water gebracht, na 48 uren nog geen spoor van eiwit aan het water afgestaan hadden. Niettemin drongen daarin, onder de huid van het konijn, een menigte leucocyten, vloeistof medeslepende, binnen.

— Een paar vragen, door de Heeren J. A. C. OUDEMANS en BEIJERINCK tot den spreker gericht, worden door dezen beantwoord.

— De Heer BEIJERINCK, wien het getroffen, had dat de spreker de door hem gebruikte dialysatoren steeds „onvolkomen" genoemd had, doet opmerken, dat volkomen dialysatoren, d. z. dezulke, die absoluut vrij zijn van mikroskopische poriën, te verkrijgen zijn, indien men stukken builgaas of fijne zijde tusschen ebonietringen uitspant en met gelatine of agar-agar overgiet.

— De Heer FORSTER wijst op het groote belang van de onderzoekingen des Heeren PEKELHARING, omdat zij ons doen inzien, hoe het in de toekomst wellicht mogelijk zal blijken, het vermogen van het dierlijk organisme om mikro-organismen te dooden, kunstmatig te verhoogen.

— De Heer C. A. J. A. OUDEMANS biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan een opstel, getiteld: »Micromycètes nouveaux. Première dizaine."

— De Heer MARTIN biedt voor de verhandelingen aan een opstel, getiteld »Ueber neue Stegodon-Reste von Java."

— Voor de bibliotheek worden aangeboden: door den Heer BIERENS DE HAAN, uit naam van den Heer LE PAIGE, te Luik: »La formule D'OZANAM est due à W. SNELL", en »Procès-verbal sommaire du Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques"; door den Heer HUBRECHT: »The placentation of Erinaceus europaeus with remarks on the phylogeny of the placenta."

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

MICROMYCETES NOUVEAUX

DÉCRITS PAR

C. A. J. A. OUDEMANS.

Première Dizaine.

1. *Ophiobolus Jacobaeae.*
2. *Phialea appendiculata.*
3. *Sclerotiopsis Cheiri.*
4. *Ascochyta Solani.*
5. *Piggotia Gneti.*
6. *Botrytis longibrachiata:*
7. *Clonostachys Gneti.*
8. *Cercospora Violae sylvaticae.*
9. *Stilbum sanguineum.*
10. *Fusarium Caricis.*

PYRÉNOMYCÈTES.

Scolécosporées.

1. **Ophiobolus Jacobaeae** n. sp.

In caulibus *Senecionis Jacobaeae.* — Scheveningen. M. Julio a⁰ 1889. L. dª C. E. Destrée.

Perithecia caulicola, epidermide tecta, numerosissima, sparsa vel subcaespitosa, $^1/_3$—$^1/_2$ mill. in diametro, ostiolo acuto epidermidem perforantia, unde superficies caulium quodammodo aspera. Asci clavati, 90—130 × 12 μ, breve pedunculati, 8-spori. Sporae distichae, lineari-fusiformes, vulgo curvatae, imo semilunares, levissime fuscescentes, 6—8

-septatae, loculo unico juxta medium p. m. inflato, 45—55 × $4^2/_3$ μ.

Périthèces, parasitant sur les tiges, cachés sous l'épiderme, très-nombreux, épars ou presque formant des groupes, $^1/_3$—$^1/_2$ mill. en diamètre, perforant l'épiderme avec leur ostiole pointu, de manière à ce que la surface de la tige en devienne quelque peu rude. Asques en massue, 90—130 × 12 μ, brièvement pédonculés, contenant 8 spores. Spores distiques, étroitement fusiformes, ordinairement courbées, parfois en croissant, coloriées d'un brun très-dilué, à 6 ou 8 cloisons, pourvues d'un compartiment plus ou moins enflé à côté du milieu, 45—55 × 4—$4^2/_3$ μ.

Si l'on consulte le Sylloge de Mr. Saccardo (II, 338), on s'aperçoit que notre espèce, qui doit prendre place parmi celles de la première section (I. Eu-Ophiobolus), parasitant sur les tiges de plantes herbacées, ne pourrait être identifiée ni avec l'*Ophiobolus Urticae*, ni avec l'*O. collapsus* — quoique celles-ci possèdent tout de même des spores, dont un des compartiments fait saillie au delà des autres — parceque ces organes, dans l'*O. Jacobaeae*, ont une longueur beaucoup moindre et ne présentent pas cette grande quantité de gouttelettes, mentionnée dans les diagnoses des deux autres espèces et qui, de coutume, sont les devancières d'autant de cloisons.

L'affinité entre l'*Ophiobolus Jacobaeae* et les autres espèces, figurant tant dans le Sylloge II, que dans les Additamenta ad vol. I—IV du même ouvrage, nous parut encore beaucoup plus éloignée.

DISCOMYCÈTES.

Pézizées.

2. **Phialea appendiculata** n. sp. (Tab. II, Fig. 6—8.)

In caulium putrescentium *Menthae aquaticae*, in receptaculis cultae, parte emersa. — Hort. bot. Amstelaed. m. Oct. a° 1889. L. hortulanus noster Plemper van Balen.

Sparsa, in eodem caule minime frequens. Ascoma (Fig. 6) 1—2 mill. latum, stipitatum, ceraceum, orbiculare, planum vel convexum et tunc agaricum pusillum simulans, subtus albidum et subtilissime pubescens, supra pallide ochraceum, glabrum. Stipes tenuis, 1—2 mill. longus, strictus vel flexuosus, subtilissime pubescens, subdiaphanus, pallide ochraceus, arescendo pallescens. Asci (Fig. 7) cylindracei, 100—110 × 8—10 μ, basi in brevem contracti. Sporae (Fig. 7 et 8) distichae, achromae, continuae, clavatae, plerumque inaequilaterales, i. e. facie antica plana, postica vero convexa, 20—26 × 4—5 μ, sursum rotundatae, deorsum acuminatae, intus guttulis 2—6 praeditae. Basis sporarum semper, apex vero utplurimum cilia brevi, hyalina, ipsi apici oblique inserta ornatus. Paraphyses numerosissimi, filiformes, sursum paulum dilatati, distinctissime articulati, simplices, ascos longitudine aequantes vel paulum superantes.

Croissant sur les parties émergentes de la tige pourrissante du *Mentha aquatica*, cultivé dans les cuves du jard. bot. d'Amsterdam. Oct. 1889.

Cupules (Fig. 6) éparses, ne paraissant qu'en petit nombre sur la même tige, larges de 1 à 2 mill., pédicellées, molles comme de la cire, orbiculaires, planes ou convexes et alors ressemblant à un petit agaric, blanchâtres et subtilement velues en dessous, d'un ocre dilué et glabres en dessus. Pédicelles assez grêles, longues de 1 à 2 mill., très-subtilement velus, droits ou flexueux, un peu diaphanes, d'un ocre dilué, pâlissant en se desséchant. — Asques (Fig. 7) cylindriques, longs de 100 à 110, larges de 8 à 10 μ, courtement rétrécis vers la base. Spores (Fig. 7 et 8) distiques, sans couleur, continues, en massue, ordinairement inéquilatérales, c'est à dire planes à la face antérieure, convexes à la face postérieure, longues de 20 à 26, larges de 4 à 5 μ, contenant de 2 à 6 gouttelettes, arrondies au sommet, très-aigues à la base. Celle-ci toujours munie d'un petit cil hyalin, lequel se montre parfois au sommet, mais alors

implanté obliquement. Paraphyses très-nombreuses, filiformes, un peu dilatées en avant, très-distinctement articulées, non rameuses, égalant les asques ou les surpassant un peu en hauteur.

En examinant, à l'aide du microscope, le Discomycète en question, l'idée nous vint tout d'abord d'avoir affaire au *Hymenoscypha scutula* (Pers.) var. *Menthae* PHILLIPS (British Discomycetes, p. 137), toutefois en nourrissant quelque doute quant à la justesse de cette diagnose, parceque Mr. PHILLIPS avait passé sous silence l'existence des cils que j'avais vu occuper les extrémités des spores. En cet état de choses, je pris la liberté de m'adresser à l'auteur de la variété avec la demande, si ces appendices n'avaient pas pu échapper à son attention; puis, s'il ne s'était pas glissée une faute dans les mesures données pour les spores, les dimensions desquelles avaient été évaluées à 14—2 × 3—5 μ.

Mr. PHILLIPS eut l'extrême obligeance de m'adresser quelques échantillons du champignon signalé, tout en me communiquant qu'il ne se souvenait pas y avoir jamais observé des spores mucronées et que le nombre 2, ayant trait à la longueur des spores, devait être changé en 20.

L'examen des exemplaires authentiques de l'*Hymenoscypha Scutula* var. *Menthae*, institué par moi-même, me fournit la certitude que le champignon de Mr. PHILLIPS et le mien étaient des produits vraiment différents, non seulement quant à l'absence ou l'existence des appendices ciliaires, mais aussi quant aux dimensions des spores, leur forme et la quantité des gouttelettes, faisant partie de leur contenu.

SPHÉROPSIDÉES.

a. Sphérioidées.

3. **Sclerotiopsis Cheiri** n. sp.

In caule putrescente *Cheiranthi Cheiri*. — Hort. bot. Amstelaedamensis m. Oct. a⁰. 1889. L. hortulanus noster PLEMPER VAN BALEN.

Globuli seminis Sinapeos albae magnitudine, inter fibras

annuli lignosi absconditi, tandem superficiem caulis epidermide orbati attingentes, fuscescentes, vertice dilutiores, imo achromi. Cerae ad instar comprimi sinunt; pressione rumpuntur, dum stratum superficiale membranaceum, epidermidis ad instar, a tela subjacente solvitur.

Tela haec pseudoparenchymatica cavernas continet plurimas, quarum parietes basidiis numerosissimis vestita sunt, singulis sporulam unicam acrogenam gerentibus.

Basidia 23—25 × $1^1/_6$ μ. Sporulae ellipticae, 3 × $1^1/_2$ μ, achromae, utrinque obtusae, guttulam unicam in utroque polo continentes.

Sur les tiges pourrissantes du *Cheiranthus Cheiri*, au Jard. bot. d'Amsterdam, Oct. 1889.

Se présente sous la forme de globules, égalant en grandeur les graines de la moutarde blanche, qui, nichant entre les fibres du cercle ligneux, finissent par atteindre la surface, dépouillée de son épiderme. Elles ont une couleur brunâtre, si l'on en excepte le sommet, qui se distingue par une teinte beaucoup plus pâle, voire même parfaitement blanche. Molles comme de la cire, elles se laissent aisément comprimer et se rompent sous la pression, en même temps qu'une couche superficielle membraneuse, en guise d'épiderme, se détache du tissu sous-jacent.

Ce tissu contient une grande quantité de cavernes, dont les parois sont garnis d'une quantité innombrable de basides, portant chacun une seule sporule au sommet.

Basides longs de 23 à 25, larges de $1^1/_6$ μ. Sporules elliptiques, longues de 3, larges de $1^1/_2$ μ, sans couleur, obtuses aux deux extrémités et contenant une gouttelette à chacun des deux pôles.

La diagnose du genre **Sclerotiopsis**, arrêtée d'après les caractères de la seule espèce connue — *S. australasica* Spegazzini *) — doit être amendée quant à la forme des spo-

---

*) Saccardo Syll. III, 184.

rules. Ces organes, décrits comme »acutato-angulatae" varient trop pour que ce titre seul leur serait applicable.

---

4. **Ascochyta Solani** n. sp.

In caulibus exsiccatis *Solani tuberosi.* — Scheveningen, m. Oct. a⁰. 1889. L. dˢ C. E. Destrée.

Maculicola, i. e. perithecia infra plagas epidermidis nigrefactas nidulantia. Sunt illa globoso-depressa, fuliginea, in statu vacuo visae stiucturae distincte parenchymaticae, quodammodo aspera, 90—180 μ lata, medio simpliciter ostiolata, mycelii ramis fuligineis insidentia.

Sporulae chlorinae, ellipsoideae, 14 $\times$ 7 μ, biloculares, primitus, ubi ex peritheciis protruduntur, mucilagine quasi conglobatae, postremo liberae.

In iisdem caulibus crescere vidi *Phomae* speciem et *Fusarium diplosporum* Cooke et Ellis.

Sur les tiges desséchées du *Solanum tuberosum.* — Dunes de Schéveningue; Oct. 1889.

Périthèces maculicoles, c'est à dire cachés sous des plaques noircies de l'épiderme, globuleux-déprimés, d'une couleur de suie, vus dans l'état affaissé, d'une texture parenchymateuse, un peu rudes, larges de 90 à 180 μ, munis au milieu d'un ostiole simple, soutenus par les rameaux d'un mycélium noirci.

Sporules d'une couleur verdissante, elliptiques (14 $\times$ 7 μ), biloculaires, d'abord, en quittant le périthèce, comme entassées par une matière gluante, à la fin libres.

Sur les mêmes tiges se trouvaient une espèce de *Phoma* et le *Fusarium diplosporum* Cooke et Ellis.

---

b. Leptostromacées.

5. **Piggotia Gneti** n. sp.

In foliis *Gneti Gnomonis* culti in Hort. bot. Amstelaedamensi. M. Febr. a⁰. 1890. L. hortulanus noster Plemper van Balen,

Amphigena. Perithecia superficialia, tam foliorum partes laterales quam eorum costam occupantia, nigra, orbicularia vel elliptica, quoad magnitudinem maxime variantia, diametrum $^1/_2$ millim. verum non superantia. Sunt depressa, distincte dimidiata, astoma, membranacea, texturaque subtilissime parenchymatica insignia. Ex pagina aversa peritheciorum scutiformium ussurgunt basidia cylindrica, ipsas sporulas longitudine aequantia, sursum acutiuscule contracta, hyalina. Sporulae in apice basidiorum solitariae, oblongae vel fere cylindricae, continuae, hyalinae, sed protoplasmate subtilisseme granuloso, nonnumquam vesiculas nonnullas continente repletae, 11—19 × $2^1/_3$—$3^1/_2$—4 μ.

Amphigène. Périthèces superficiels, distribués tant sur les deux ailes de la feuille que sur la côte qui les sèpare, noirs, orbiculaires ou elliptiques, variant beaucoup en grandeur, mais ne surpassant pas $^1/_2$ millim. en diamètre. Ils sont déprimés, ne possèdent qu'une moitié supérieure sans aucune ouverture, et se distinguent par une texture membraneuse, très-subtilement parenchymatique. De la page inférieure de ces périthèces scutiformes s'élèvent des basides cylindriques, égalant les sporules en longueur, hyalines. Les sporules, solitaires au sommet des basides, sont oblongues ou presque cylindriques, continues, hyalines, mais remplies d'un protoplasme très-finement granuleux, dans lequel de temps en temps se montrent quelques gouttelettes. Longueur des sporules 11—19, largeur $2^1/_3$—$3^1/_2$—4 μ.

Notre espèce diffère sensiblement des trois espèces connues (P. astroidea, atronitens et Fraxini), tant par l'aspect des périthèces que par les dimensions plus grandes des sporules.

HYPHOMYCÈTES.

a. Mucédinées.

6. **Botrytis (Phymatotrichum) longibrachiata** n. sp. — (Tabula I).

In pagina superiore foliorum pro maxima parte exsiccatorum *Curcumae rubricaulis* in Hort. bot. Amstelaed. m. Jan. a⁰. 1890. L. hortulanus noster PLEMPER VAN BALEN.

Perpetuo candidissima, sparsa, neutiquam caespitosa, $1^1/_2$—2 millim. alta. Ex mycelio repente, ramoso, articulato, assurgunt hyphae fertiles verticales (Fig. 1*a*) omni colore destitutae, articulatae. Axis primarius cylindricus, apicem versus obtusiusculum sensim contractus (Fig 1 et 2*b*) vertice renovatus, ramos emittit horizontales numerosissimos, quorum juniores (Fig. 1 et 2*c. c. c.*), breviores, hucusque steriles, in propinquitate verticis offenduntur, dum aetate medii (Fig. 1 et 2 *d*) conidiigeri, densius aggregati, humiliorem locum occupant, vetustissimi, effoeti (Fig. 1 *e* et Fig. 6) ad basin totius racemi manifesto deprehenduntur.

Rami omnes ex ordine primi (axes secundarii) sunt unicellulares. Qui conidia gerunt (Fig. 1*a*) invariabilem attingunt altitudinem 85 ad 95 μ, quo fit ut habitus totius plantulae, cylindrum aemulans, a habitu pyramidali prorsus alienus.

In quovis ramo conidiigero distinguere licet partem inferiorem sive posteriorem pedicelliformem, fere cylindricam, antice 4—5 μ crassam, basi valde contracta cum axi primario tandem articulatam (Fig. 3, 4 et 5 α), et partem superiorem sive anteriorem inflatam, conoideam vel ovalem, dimensionis 16 × 9 μ (Fig. 4 et 5 β). In media partis inflatae altitudine zona offenditur proligera, ex qua assurgunt rami secundarii (μ) 4 vulgo numero, aequidistantes, 16 μ vulgo alti, qui in media sua altitudine processus 4 globosos, vesiculiformes, itemque in vertice suo processum talem quintum gerunt, qui omnes, propterea quod conidias producunt, pro basidiis haberi licet. Conidia numerosissima, ad superficiem vesicularum dense aggregata, colore carent; sunt porro hyalina, ovalia, $4^2/_3$ ad $5^1/_2$ μ longa, $2^1/_3$ μ lata.

Sursum rami primarii desinunt in appendicem (f) ab omni parte ramis secundariis, quaternis in verticillum dispositis, consimilem, i. e. processu unico terminali, quatuor lateralibus vesiculiformibus, conidiiferis, oneratum.

Ad aetatem adultam ubi provenerint ramorum primariorum

processus terminales (Fig. 5), non aliter quam laterales articulatione afficiuntur et ab axi natu majori decidunt; vesiculae tamen conidiiferae (o) semper inter se continuae perdurant.

Nihil tandem de toto apparatu conidiifero remanet nisi pedunculus sursum in vesiculam piriformem rostratam in flatus (Fig. 6).

Botrytis species ad subgenus Pachybasium in Sylloge Saccardoano (IV, p. 134) reductae, a nostra prorsus alienae, sicut ex comparatione tam descriptionum quam figurarum quibus illustratae sunt luculenter apparet.

D'une blancheur éclatante pendant toute son existence, notre espèce ne forme que des plants solitaires de $1^1/_2$ à 2 millim. de hauteur — jamais des coussinets.

Du mycélium rempant, rameux, articulé, se dressent des hyphes fertiles verticales (Fig. 1*a*), sans couleur, articulées. L'axe primaire cylindrique qui, vers le sommet arrondi et rajeunissant (Fig. 1 et 2 *b*) diminue un peu en largeur, porte un nombre très-considérable de rameaux horizontaux, dont les plus jeunes et pour cela les plus courts, jusqu'alors stériles, font saillie près du sommet (Fig. 1 et 2 *c*), tandisque ceux d'un age plus avancé et plus rapprochés entre eux occupent le milieu (Fig. 1*d*), et que les plus agés, privés de conidies, se trouvent à la base de la grappe toute entière (Fig. 1 *e*).

Tous les rameaux de premier ordre ou axes secondaires sont unicellulaires. Ceux qui portent les conidies atteignent une hauteur invariable de 85 à 95 μ, ce qui fait que le port de la plante entière ressemble beaucoup plus à un cylindre qu'à une pyramide.

Chaque rameau conidiifère laisse distinguer 1°. une partie inférieure ou postérieure, de la forme d'un pédicelle (Fig. 3, 4, 5 α) presque cylindrique, mais sensiblement rétrécie là où elle tire son origine de l'axe primaire, voire même articulée avec celle-ci et 2°. une partie supérieure ou antérieure, enflée, cônique ou elliptique, longue de 16 et large de 9 μ. (Fig. 4, 5 β).

A la moitié de la hauteur, faisant semblant d'une zone

génératrice, la partie enflée produit, à distances égales, 4 rameaux secondaires (μ), hauts ordinairement de 16 μ, qui, à la moitié de leur hauteur, donnent naissance à 4 processus globuleux (*o*) en forme d'ampoule, tandisqu'un 5e apparaît au sommet. Tous ces ampoules, en se couvrant de conidies, remplissent le rôle de basidies. Les conidies elles-mêmes, sans couleur, hyalines, ovales, ont $4^2/_3$ à $5^1/_2$ μ de longueur sur $2^1/_3$ μ de largeur.

Le sommet même de chaque rameau primaire se prolonge en un appendice tout-à-fait conforme aux rameaux secondaires verticillés de la partie enflée. Lui-aussi produit une ampoule apicale et quatre ampoules latérales — celles-ci au même niveau et à distances égales entre elles — toutes conidiifères.

Parvenus à l'age adulte, tous les rameaux secondaires, aussi bien que l'appendice apical, deviennent articulés avec l'axe qui les porte, tandisque les ampoules continuent à communiquer entre elles. Enfin, de tout l'appareil conidien il ne reste rien que le pédoncule avec son sommet piriforme prolongé en bec (Fig. 6).

Toutes les espèces de *Botrytis* qu'on trouve décrites dans le Sylloge de Mr. Saccardo sous le sous-genre *Pachybasium*, sont absolument distinctes de la nôtre, ce dont on peut se convaincre en comparant les diagnoses et les figures qui s'y rapportent, avec notre description et notre planche (I).

---

7. **Clonostachys Gneti** n. sp. (Tab. II, Fig. 1—5).

In foliis *Gneti Gnomonis* putrescentibus amphigena. Hort. bot. Amstelaed. m. Febr. a0 1890. L. hortulanus noster Plemper van Balen.

Caespitosa, candidissima. Hyphae fructiferae erectae, articulatae, ramosissimae, ramis primariis vulgo sparsis, secundariis, tertiariis, etc., bi-vel ternatim verticillatis, ab axi primario paulum tantum divergentibus, ex basi latiore vel p. m. inflato adscendentibus. Rami ultimi acuminati. — Conidia densissime plurifariam imbricata, 6—7 × $2^1/_3$ — 3 μ. Spicae partiales in longiores congestae, altitudinem 160 ad

190 μ attingunt. Sunt conidia ovalia vel p. m. obovata, extremitate latiore sursum directa.

Forme de petites pelouses d'une blancheur éclatante. Hyphes fertiles érigées, articulées, très-rameuses, aux rameaux primaires plus ou moins épars, aux rameaux du 2e, 3e ordre etc. verticillés à deux ou à trois. Tous ces rameaux ne s'écartent que très-peu de l'axe précédente et se dirigent presque verticalement en haut, non sans avoir, en maints cas, subis une petite courbure à leur parti basilaire, de coutume un peu enflée. Les plus jeunes rameaux finissent en s'effilant. Les conidies nombreuses, imbriquées trés-compactement en plusieurs directions, mesurent 6—7 × $2^1/_3$—3 μ. Les épis partielles en forment d'autres plus longues, qui peuvent atteindre une hauteur de 160 à 190 μ. Les conidies sont elliptiques ou ovoides, et ont le sommet le plus large dirigé en haut.

Les différences entre le *Cl. Gneti* et les 4 autres espèces du Sylloge de Mr. Saccardo (IV, 105 et Addit. ad vol. I—IV, 375), savoir les *Cl. Araucaria*, *Cl. candida*, *Cl. Populi* et *Cl. spectabilis* ont été mises en relief dans les lignes suivantes.

a. Le *Clonostachys Araucaria* Cda (Prachtflora tab. XV) ne croît pas en pelouses compactes, mais en tâches clairsemées, faisant semblant de parties d'une toile d'araignée. Il se présente sous une forme pyramidale si caractéristique, que Corda en fit usage pour former le nom spécifique. Enfin les rameaux, depuis les plus bas jusqu'aux plus élevés, naissent toujours en verticilles de quatre. — Les conidies oblongues ont une longueur de 0.0002 pouces (Corda) = à peu près $5^1/_2$ μ.

b. Le *Clonostachys candida* Harz (Einige neue Hyphomyceten etc., Moskau 1872, p. 28 et tab. IV, f. 4), trouvé sur des pommes de terre cuites, nous offre des épis beaucoup plus courts, puis un système d'axes à rayons beaucoup plus étalés que dans notre espèce. Ses conidies, mesurant 5 μ de long, sont disposées en 4 séries verticales seulement.

c. Le *Clonostachys Populi* Harz (ibidem, p. 29, tab. III, fig. 2), porte des rameaux étalés et des conidies de 3 μ de longueur qui, tout en ne formant pas plus que 4 séries verticales, sont si peu appliquées l'une sur l'autre, voire même divergentes, que le terme imbriqué ne saurait leur être appliqué.

d. Le *Clonostachys spectabilis* Oud. et Sacc., jadis *Botrytis spectabilis* Harz (ibidem, p. 27 et tab. V, fig. 2) possède des conidies parfaitement globuleuses, pédicellées, mesurant $3^1/_2$ à $4^2/_3$ μ. Puis, les axes conidiifères se bifurquent trois à cinq fois alternativement dans des plans rectangulaires, au lieu de porter leurs axes en verticilles.

---

b. Dématiées.

8. **Cercospora Violae sylvaticae** n. sp. Sur les feuilles du *Viola sylvatica* à Apeldoorn; Juillet 1889, O.

Amphigena. Maculae suborbiculares, aridae, pallescentes. Mycelium in parenchymate foliorum absconditum, densissimum, ex hyphis formatum fuliginei coloris, vage ramosissimis, septasis. Hyphae fertiles ex mycelii plexibus assurgentes cylindricae, subnodosae, fuscescentes, breves, parce septatae. Conidia hyalina, cylindrica, 3- ad 7- septata, curvata, apice obtusissima, basi truncata, 45 ad 70 × $4^2/_3$ μ.

Amphigène. Tâches presque orbiculaires, desséchées, devenant pâles. Mycélium caché dans le parenchyme des feuilles, très-compact, composé de hyphes de couleur fuligineuse, très-rameuses, cloisonnées. Hyphes fertiles, se dressant sur des plaques de hyphes mycéliennes, cylindriques, plus ou moins noueuses, brunâtres, courtes, pourvues de quelques rares cloisons. Conidies hyalines, cylindriques, à 3—7 cloisons, courbes, très-obtuses à l'extrémité antérieure, tronquées à la base, 45—70 × $4^2/_3$ μ.

Notre espèce ne peut être identifiée avec celles, trouvées sur les *Viola odorata* et *cucullata* (Syll. IV, 434) à cause

de la différence qui existe entre la dimension ou la couleur de leurs conidies.

---

c. Stilbées.

9. **Stilbum sanguineum** n. sp.

In pagina inferiore foliorum putrescentium *Gneti Gnomonis*. Hort. bot. Amstelaed., m. Febr. a⁰ 1890. L. hortulanus noster PLEMPER VAN BALEN.

Individua sparsa, e mycelio in foliorum superficie repente, albo, laneo oriunda, erecta, $^1/_2$—1 mill. alta, stipite albo, capitulo perfecte globoso, sanguineo.

Stipes ex hyphis subtilissimis, superne paulum divergentibus, basidiigeris contextus. Conidia e basidiis delapsa mucilaginis ope in globum coalita, $4^2/_3 \times 2^1/_3\ \mu$, perfecte ovalia, rubescentia, non concatenata.

Hyphae ad stipitis texturam pertinentes $2^1/_3\ \mu$ maximum crassae; superficiales achromae; profundiores versus basin stipitis achromae, altius dilute carneae, sursum tandem saturatius coloratae, ibique in basidia transeuntes. Basidia, cum hyphis maternis articulata, receptaculum formant convexum, cujus circuitum occupant basidia minora, dum maxima, in medio receptaculo inplantata, altitudinem 35—40 μ attingunt. — Omnia unicum tantum conidium simul ferunt.

Pertinet species nostra ad subgenus Leiostilbum et ad species rubescentes. Ab omnibus tamen in Sylloges Saccardoani Tom. IV, pp. 570—572 recensitis discrepat.

Individus épars, se dressant sur un mycélium rampant à la surface des feuilles, blanc, laineux, hauts de $^1/_2$ à 1 mill., composés d'un pédicelle blanc et d'un capitule parfaitement globuleux de couleur sanguine.

Pédicelle formé de hyphes extrêmement minces, s'écartant l'une de l'autre vers le sommet et finissant par produire des basidies. Conidies détachées réunies en capitule par une matière mucilagineuse, mesurant $4^2/_3 \times 2^1/_3\ \mu$, parfaitement elliptiques, d'un rouge dilué, nullement arrangées de manière à former des chapelets.

Hyphes pédicellaires épaisses de $2^1/_3$ μ; les superficielles sans couleur, les plus internes hyalines vers la base, plus haut d'un incarnat dilué, vers le sommet douées d'une couleur plus vive et se prolongeant en basidies. Celles-ci, articulées avec les hyphes qui les portent, forment un réceptacle convexe, à la périphérie duquel on n'en trouve que de plus courtes, tandisque au centre de la convexité les plus élancées atteignent une hauteur de 35 à 40 μ. Toutes les basidies ne portent qu'une seule conidie à la fois.

Notre espèce appartient au sousgenre Leiostilbum et aux espèces douées d'une couleur rouge. Pourtant, elle diffère de toutes celles qu'on trouve récensées aux pages 570—572 du 4e vol. du Sylloge de Mr. Saccardo.

---

d. Tuberculariées.

10. **Fusarium Caricis** n. sp.

In foliis *Caricis* cujusdam; prope Hagam Comitis, m. Aug. a⁰ 1889 l. domina Destrée.

Sporidochia minuta, tandem in stratum pallide roseum confluentia. Sporophora ramosa, e cellulis brevibus oblongis composita. Conidia bacillari-fusoidea, utrimque paulum incurva, 5-septata, intermixtis paucioribus 3-, 4-, 6-septatis, adultis 50 × 7 μ, junioribus multo brevioribus, non aut paulum tantum angustioribus, omnibus achromis.

Sur les feuilles d'une espèce de *Carex* restée inconnue. Près de la Haye, Août 1889. Mlle C. E. Destrée.

Sporidoches petits, à la fin diffluants, formant une couche de couleur rose tendre. Conidies bacillaires-fusiformes, un peu courbées en dedans aux extrémités, à 5 cloisons (mêlées d'un nombre beaucoup moindre de conidies à 3, 4 ou 6 cloisons), mesurant 50 × 7 μ à l'état adulte. Pendant leur jeunesse les conidies sont beaucoup plus petites que dans l'état adulte, mais leur égalent presque en largeur. La couleur d'un seul individu nous échappe sous le microscope.

EXPLICATION DES FIGURES.

Table I.

Fig. 1. Partie supérieure d'un exemplaire du *Botrytis longibrachiata* Oud. — Développement centrifuge des pédoncules conidiifères.

Fig. 2. Sommet de l'axe avec quelques débauches de pédoncules (c). Ceux-ci sont d'antant plus jeunes qu'ils se trouvent plus dans le voisinage de l'extrémité rajeunissante (b).

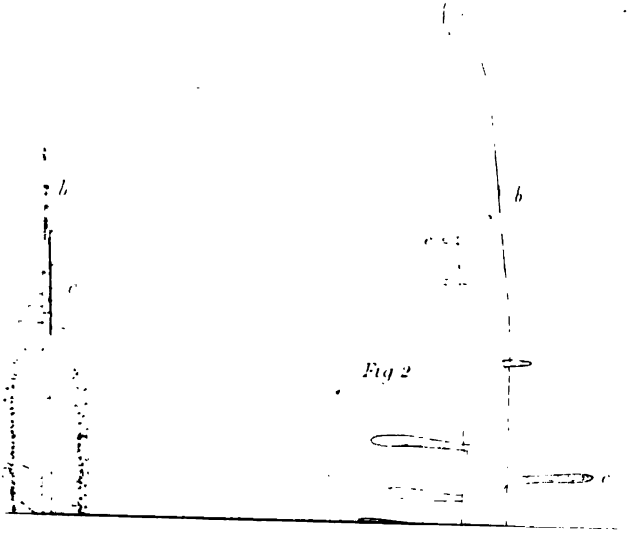
Fig. 3. Portion de l'axe portant un pédoncule qui commence seulement à former ses appendices latéraux.

Fig. 4. Portion de l'axe portant un pédoncule (α) qui vient de se ramifier dans quatre directions plus ou moins horizontales et dont les rameaux (μ) eux-mêmes ont produit les débauches d'une nouvelle (et dernière) ramification (conidiifère). Les rameaux de divers ordres forment toujours des verticilles. En même temps que se développent les rameaux latéraux, l'axe primaire se prolonge et se ramifie à son sommet, d'accord avec les branches latérales.

Fig. 5. Portion de l'axe plus agé que la portion précédente. Les rameaux du premier et du deuxième ordre ont pris leur forme définitive et produit des conidies. Le prolongement de l'axe primaire a fait le même. Tous les rameaux, produisant des ampoules conidiifères, deviennent enfin articulés avec leur axe de soutien.

Fig. 6. Pédoncule suragé, ayant perdu toutes ses branches secon daires.

Fig. 7 Spores.


b
c
b
Fig 2
c

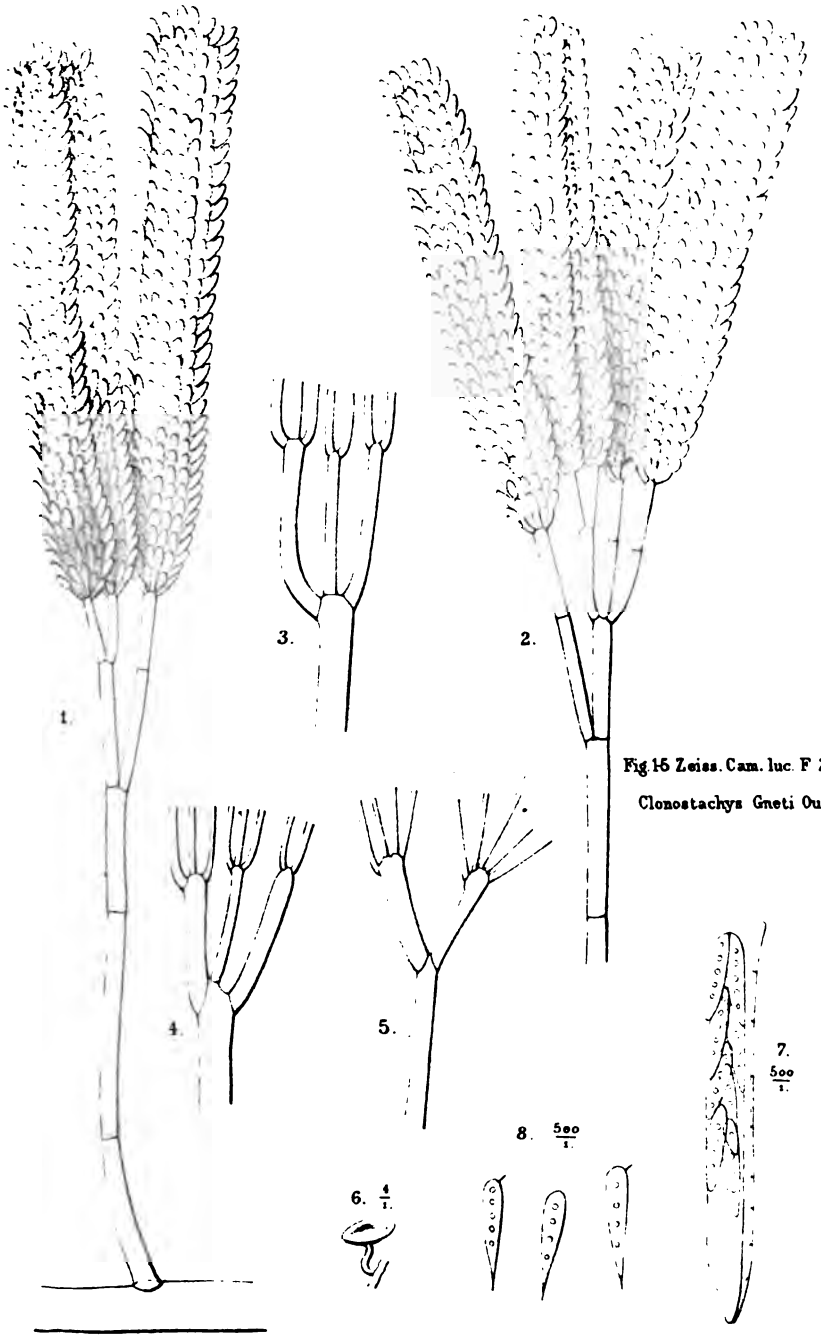


Fig. 1-5 Zeiss. Cam. luc. F 2.
Clonostachys Gneti Oud.

Fig. 6-8 Phialea appendiculata Oud.

P W M Trap impr A J Wendel lith

Table II.

Fig. 1 et 2. Plantes conidiifères du *Clonostachys Gneti* Oud. montrant deux cas de ramifications quelque peu différentes l'une de l'autre.

Fig. 3, 4, 5. Esquisses de ramifications différentes, ayant appartenu à des exemplaires après la perte des conidies.

Fig. 6. Ascome du *Phialea appendiculata* Oud. grossi 4 fois.

Fig. 7. Asque sporifère et paraphyse du même, grossis 500 fois.

Fig. 8. Spores du même, grossies 500 fois.

SUR LES POINTS

D'INFLEXION DE L'HERPOLHODIE DE POINSOT.

PAR

G. F. W. BAEHR.

Après que M. DE SPARRE, dans une communication à l'Académie des Sciences, eut montré, en se fondant sur la théorie des fonctions elliptiques, que l'herpolhodie de POINSOT ne présente jamais ni points d'inflexion ni points de rebroussement, plusieurs auteurs ont repris la question géométriquement. Mais la plupart d'eux fait encore usage des intégrales connues, fournies par la dynamique dans le problême même, qui conduit à la considération de l'herpolhodie. Cependant, en considérant l'herpolhodie comme le lieu des points de contact de l'ellipsoïde central et d'un plan fixe, lorsque suivant POINSOT cet ellipsoïde, dont le centre est retenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur ce plan fixe, il semble que le problême rentre tout à fait dans le domaine de la géométrie analytique, et dans ce qui suit, je tache d'en donner une solution fondée seulement sur cette partie de la science.

Soit le centre fixe O de l'ellipsoïde l'origine de trois axes fixes rectangulaires ox, oy, oz : a, b, c les cosinus des angles que fait l'axe principal ox' de l'ellipsoïde avec ces axes fixes : $a' b' c'$ et $a'' b'' c''$ les quantités analogues pour les axes principaux oy' et oz'; désignant par x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace par rapport aux axes ox, oy et oz

et par x', y', z' celles du même point par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde, on aura

$$\begin{aligned} x' &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ y' &= a'\,x + b'\,y + c'\,z, \\ z' &= a''\,x + b''\,y + c''\,z; \end{aligned}$$

et l'équation de l'ellipsoïde dans une position quelconque sera

$$\frac{(ax+by+cz)^2}{A^2} + \frac{(a'x+b'y+c'z)^2}{B^2} + \frac{(a''x+b''y+c''z)^2}{C^2} = 1 \,..\, (1)$$

où A, B et C sont les longueurs des demi-axes principaux de l'ellipsoïde en sorte que les moments principaux d'inertie du corps sont proportionnels à $\frac{1}{A^2}$, $\frac{1}{B^2}$ et $\frac{1}{C^2}$.

On obtiendra l'équation de la projection de l'ellipsoïde sur le plan des $y\,z$ par la condition que pour des valeurs de y et de z il n'y ait qu'une seule valeur de x, c'est à dire, en écrivant la condition que l'équation (1) résolue par rapport à x acquiere deux racines égales, ce qui donne

$$\left(\frac{a^2}{A^2} + \frac{a'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\left\{\frac{(b\,y + c\,z)^2}{A^2} + \frac{(b'\,y + c'\,z)^2}{B^2} \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(b''\,y + c''\,z)^2}{C^2} - 1\right\} = \ldots$$
$$\ldots \left\{\frac{a\,(b\,y + c\,z)}{A^2} + \frac{a'\,(b'\,y + c'\,z)}{B^2} + \frac{a''\,(b''\,y + c''\,z)}{C^2}\right\}^2;$$

cette équation se réduit d'abord à

$$\left(\frac{a'^2}{B^2} + \frac{a''^2}{C^2}\right)\frac{(b\,y + c\,z)^2}{A^2} + \left(\frac{a^2}{A^2} + \frac{a''^2}{C^2}\right)\frac{(b'\,y + c'\,z)^2}{B^2} \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{a^2}{A^2} + \frac{a'^2}{B^2}\right)\frac{(b''\,y + c''\,z)^2}{C^2} - 2\,a\,a'\frac{(b\,y + c\,z)}{A^2}\,\frac{(b'\,y + c'\,z)}{B^2}$$
$$- 2\,a\,a''\,\frac{by + cz}{A^2}\cdot\frac{b''y + c''z}{C^2} - 2\,a'a''\,\frac{b'y + c'z}{B^2}\cdot\frac{b''y + c''z}{C^2} = \ldots$$
$$\ldots \frac{a^2}{A^2} + \frac{a'^2}{B^2} + \frac{a''^2}{C^2};$$

et celle-ci à

$$\frac{[a'(by+cz)-a(b'y+c'z)]^2}{B^2\,C^2}+\frac{[a\ (by+cz)-a(b''y+c''z)]^2}{A^2\,C^2}$$
$$+\frac{[a'(b''+c''z)-a''(b'y+c'z)]^2}{B^2\,C^2}=\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2},$$

ou

$$\frac{[(a'b-ab')y+(ac-ac')z]^2}{A^2\,B^2}+\frac{[(a''b-ab'')y+(a''c-ac'')z]^2}{A^2\,C^2}$$
$$+\frac{[(a'b''-a''b')y+(a'c''-a'c')z]^2}{B^2\,C^2}=\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2}.$$

Or on sait que les neuf cosinus $a\ b\ c$ etc. sont liés, entre autres, par les relations

$$\left.\begin{array}{lll} a=b'c''-c'b'', & a'=b''c-c''b, & a''=bc'-cb' \\ b=c'a''-a'c'', & b'=c''a-a''c, & b''=ca'-ac' \\ c=a'b''-b'a'', & c'=a''b-ba'', & c''=ab'-ba' \end{array}\right\}\ldots(2)$$

en sorte que la dernière équation devient

$$\frac{(c''y-b''z)^2}{A^1\,B^2}+\frac{(c'y-b'z)^2}{A^2\,C^2}+\frac{(cy-bz)^2}{B^2\,C^2}=\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2},\ldots(3)$$

laquelle est, sous la forme la plus simple, l'équation de la projection sur le plan yz de ellipsoïde dans une position quelconque. Prenons le plan fixe, sur le quel l'ellipsoïde roule, parallèle au plan des coördonnées xy, et soit h la distance du centre de l'ellipsoïde ou de l'origine à ce plan, alors la droite dans le plan yz, $z=h$, doit être tangente à l'ellipse representée par l'équation (3), c'est à dire qu'en faisant $z=h$ dans cette équation, ce qui donne

$$\frac{(cy-bh)^2}{B^2\,C^2}+\frac{(c'y-b'h)^2}{A^2\,C^2}+\frac{(c''y-b''h)^2}{A^2\,B^2}=\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2},$$

celle-ci ne donne qu'une seule valeur pour y, d'où la condition

$$\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\Big|\left\{\frac{b^2h^2}{B^2C^2}+\frac{b'^2h^2}{A^2C^2}+\frac{b''^2h^2}{A^2B^2}-\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2}\right)\right\}=$$

$$\ldots\left\{\frac{bc}{B^2C^2}+\frac{b'c'}{A^2C^2}+\frac{b''c''}{A^2B^2}\right\}^2h^2,$$

la quelle se réduit à

$$\left(\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\right)\frac{b^2h^2}{B^2C^2}+\left(\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\right)\frac{b'^2h^2}{A^2C^2}+\left(\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}\right)\frac{b''h^2}{A^2B^2}=\ldots$$

$$\ldots 2\left(\frac{bc}{B^2C^2}\frac{b'c'}{A^2C^2}+\frac{bc}{B^2C^2}\frac{b''c''}{A^2B^2}+\frac{b'c'}{A^2C^2}\frac{b''c''}{A^2B^2}\right)h^2$$

$$+\left(\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\right)\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2}\right),$$

ou

$$\left\{\frac{(bc'-b'c)^2}{A^2B^2C^4}+\frac{(bc''-b''c)^2}{A^2B^4C^2}+\frac{(b'c''-b''c')^2}{A^4B^2C^2}\right\}h^2=\ldots$$

$$\left(\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\right)\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{a''^2}\right),$$

ce qui en vertu des relations (2) devient

$$\left(\frac{a''^2}{C^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a^2}{A_2}\right)\frac{h^2}{A^2B^2C^2}=\left(\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2}\right)\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{a'^2}{B^2}+\frac{a''^2}{C^2}\right),$$

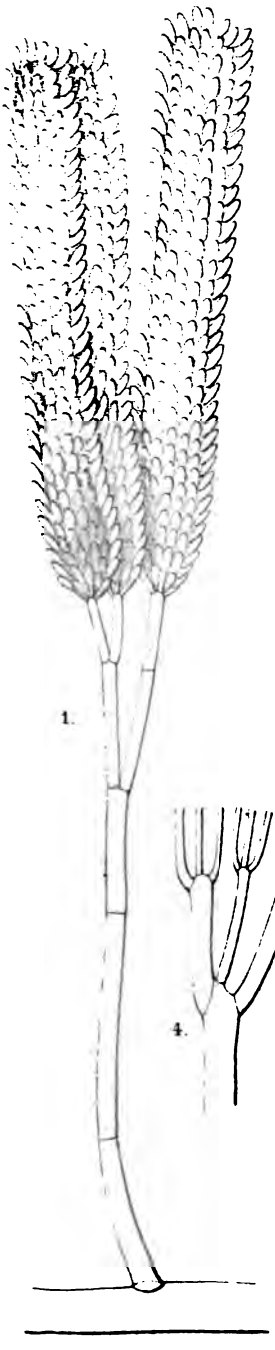
ou

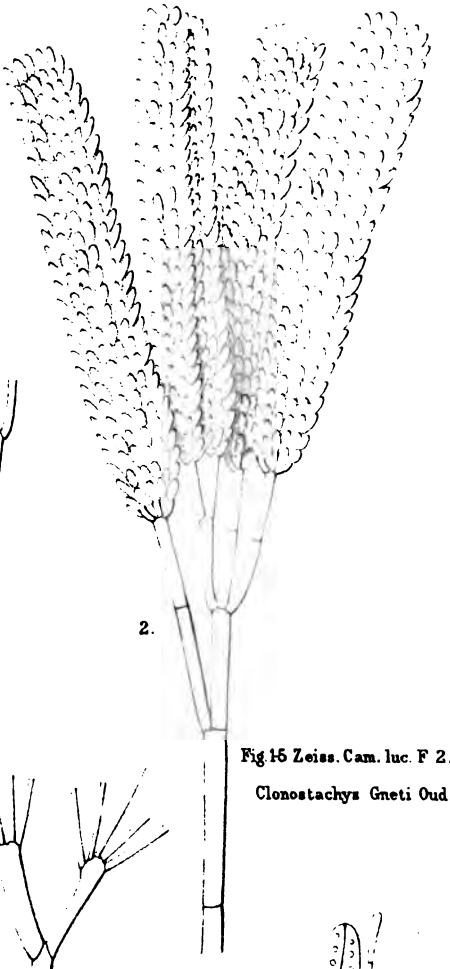
$$\frac{h^2}{A^2B^2C^2}=\frac{c^2}{B^2C^2}+\frac{c'^2}{A^2C^2}+\frac{c''^2}{A^2B^2},$$

et enfin donne, pour la condition que l'ellipsoïde soit tangente au plan fixe, la relation

$$h^2=A^2c^2+B^2c'^2+C^2c''^2. \quad \ldots\ldots (4)$$

Pour avoir l'ordonnée y, du point de contact, on égalera à zero la dérivée par rapport à y de (3) ce qui donne faisant $z=h$,





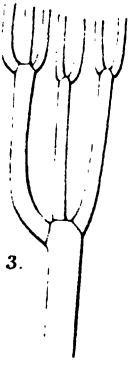
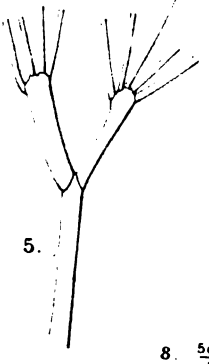
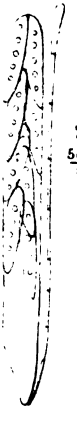


Fig. 1-5 Zeiss. Cam. luc. F 2.

Clonostachys Gneti Oud.





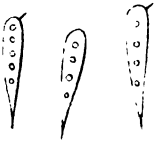


Fig. 6-8 Phialea appendiculata Oud.

P. W. N. Trap impr. A. J. Wendel lith.

$$\frac{cy-bh}{B^2C^2}c+\frac{c'y-b'h}{A^2C^3}c'+\frac{c''y-b''h}{A^2B^2}c''=0,$$

d'où

$$y_1=\frac{bcA^2+b'c'B^2+b''c''C^2}{A^2c^2+B^2c'^2+C^2c''^2}h,$$

ou ayant égard à (4),

$$y_1=\frac{bcA^2+b'c'B^2+b''c''C^2}{h};\ldots\ldots(5)$$

changeant b, b' et b'' respectivement en a, a' et a'', on obtient pour l'ordonnée x_1 du point de contact

$$x_1=\frac{acA^2+a'c'B^2+a''c''C^2}{h};\ldots\ldots(6)$$

et, enchangeant dans (5) b, b' et b'' respectivement en c, c' et c'' l'on obtient la valeur de l'ordonnée z

$$z_1=\frac{c^2A^2+c'^2B^2+c''^2C^2}{h}\text{ ce qui est }=\frac{h^2}{h}=h.\ .(7)$$

Pour montrer que les valeurs (5), (6) de x, y et $z=h$, satisfont à l'équation (1) de l'ellipsoïde, on a recours aux relations entre les cosinus a, b, c, a' etc., savoir:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & aa''+bb''+cc''=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0 \end{array}\right\}\ldots(2')$$

et

$$\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0 \\ b^2+b'^2+b''^2=1, & ac+a'c'+a''c''=0 \\ c^2+c'^2+c''^2=1, & bc+b'c''+b''c''=0 \end{array}$$

et l'on tire des formules (5), (6) et (7)

$$ax_1+by_1+cz_1=\frac{(a^2+b^2+c^2)cA^2+(aa'+bb'+cc')c'B^2+(aa''+bb''+cc'')c''C^2}{h},$$

ou

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 = \frac{c A^2}{h},$$

et pareillement

$$a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 = \frac{c' B^2}{h}, \quad a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 = \frac{c'' C^2}{h}$$

ce qui, substitué dans l'équation de l'ellipsoïde donne l'identité

$$\frac{c^2 A^2}{h^2} + \frac{c'^2 B^2}{h^2} + \frac{c''^2 C^2}{h^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

On peut encore vérifier les valeurs (5) et (6), trouvées pour les coordonnées du point de contact, en remarquant que la droite

$$y = \frac{y_1}{x_1} x, \quad z = h,$$

doit être tangente à l'ellipsoïde au point x_1, y_1 et $z = h$, cherchons les points d'intersection de cette droite avec l'ellipsoïde, et substituons à cet effet les valeurs de y et de z dans l'équation (1) celle-ci devient

$$\frac{[(a x_1 + b y_1) x + c h x_1]^2}{A^2} + \frac{[(a' x_1 + b' y_1) x + c' h x_1]^2}{B^2}$$
$$+ \frac{[(a'' x_1 + b'' y_1) x + c'' h x_1]^2}{C^2} = x_1^2,$$

la quelle ne doit donner qu'une seule valeur pour x, $x = x_1$; d'abord elle se réduit à

$$\left\{ \frac{(a x_1 + b y_1)^2}{A^2} + \frac{(a' x_1 + b' y_1)^2}{B^2} + \frac{(a'' x_1 + b'' y_1)^2}{C^2} \right\} x^2 \ldots$$
$$+ 2 h x_1 \left\{ \frac{(a x_1 + b y_1) c}{A^2} + \frac{(a' x_1 + b' y_1) c'}{B^2} + \frac{(a'' x_1 + b'' y_1) c''}{C^2} \right\} x \ldots$$
$$+ h^2 x_1^2 \left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2} \right) = x_1^2$$

ou, ayant égard aux valeurs trouvées plus haut pour $a x_1 + b y_1 + c h$, $a' x_1 + b' y_1 + c' h_1$, etc.,

$$\left\{\frac{c^2(A^2-h^2)^2}{A^2 h^2} + \frac{c'^2(B^2-h^2)^2}{B^2 h^2} + \frac{c''^2(C^2-h^2)^2}{C^2 h^2}\right\} x^2 \ldots$$
$$+ 2 h x_1 \left\{\frac{c^2(A^2-h^2)}{A^2 h} + \frac{c'^2(B^2-h^2)}{B^2 h} + \frac{c''^2(C^2-h^2)}{C^2 h}\right\} x$$
$$+ h^2 x_1^2 \left\{\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right\} = x_1^2,$$

ou

$$\left\{\frac{c^2 A^2 + c'^2 B^2 + c''^2 C^2}{h^2} - \frac{2h^2(c^2+c'^2+c''^2)}{h^2} + h^2\left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\right\} x^2 \ldots$$
$$+ 2 x_1 \left\{c^2 + c'^2 + c''^2 - h^2\left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\right\} x \ldots$$
$$+ h^2 x_1^2 \left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right) = x_1^2,$$

ou

$$\left\{-1 + h^2\left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\right\} x^2 + 2 x_1 \left\{1 - h^2\left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\right\} x \ldots$$
$$= x_1^2 \left\{1 - h^2\left(\frac{c^2}{A^2} + \frac{c'^2}{B^2} + \frac{c''^2}{C^2}\right)\right\}$$

ou, divisant les trois termes par leur facteur commun,

$$x^2 - 2 x_1 x + x_1^2 = 0,$$

laquelle, en effct, donne la valeur unique $x = x_1$, et il s'en suit $y = y_1$.

Les valeurs que l'on vient de trouver pour x_1 et y_1 peuvent en vertu des relations (2') d'où $a'' c'' = - a' c' - a c$ etc s'écrire

$$x_1 = \frac{a c (A^2 - C^2) + a' c' (B^2 - C^2)}{h},$$

$$y_1 = \frac{b c (A^2 - C^2) + b' c' (B^2 - C^2)}{h}$$

et donnent

$$^2+y_1{}^2=\frac{(1-c^2)c^2(A^2-C^2)^2+(1-c'^2)c'^2(B^2-C^2)^2-2cc'.cc'(A^2-C^2)(B^2-C^2)}{h^2},$$

ou

$$^2+y_1{}^2=\frac{c^2(A^2-C^2)^2+c^2(B^2-C^2)^2-\{c^2(A^2-C^2)+c'^2(B^2-C^2)\}^2}{h^2},$$

tandis que la relation (4) devient

$$h^2=(A^2-C^2)c^2+(B^2-C^2)c'^2+C^2 \quad \ldots\ldots (4')$$

de sorte que l'on a pour le rayon vecteur ϱ, qui va du pied de la perpendiculaire au plan fixe à un point quelconque de l'herpolhodie, ce plan étant parallèle au plan des xy, $\varrho^2=x_1{}^2+y_1{}^2$, ou

$$\varrho^2=\frac{c^2(A^2-C^2)^2+c'^2(B^2-C^2)^2-(h^2-C^2)^2}{h^2}. \ldots (8)$$

Introduisons maintenant à la place des neuf cosinus $a, b, \ldots, a'$ etc. les trois angles d'Euler ψ, φ et θ; ψ étant l'angle que fait avec Ox la trace du plan $x'Oy'$ sur le plan xOy: θ l'inclinaison du plan $x'Oy'$ sur le plan xOy (ou l'angle entre les axes Oz et Oz'): et φ l'angle de l'axe Ox' avec la trace du plan $x'Oy'$ sur le plan xOy; on aura les formules d'Euler

$$a=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\quad a'=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$b=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\quad b'=--\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$
$$c=\sin\varphi\sin\theta,\qquad c'=\cos\varphi\sin\theta,$$
$$a''=\sin\psi\sin\theta,$$
$$b''=-\cos\psi\sin\theta,$$
$$c''=\cos\theta.$$

avec lesquelles (4') devient

$$h^2=(A^2-C^2)\sin^2\varphi\sin^2\theta+(B^2-C^2)\cos^2\varphi\sin^2\theta+C^2 \ldots (4'')$$

et le rayon vecteur (8)

$$\varrho^2 = \frac{\sin^2\varphi \sin^2\theta (A^2 - C^2)^2 + (B^2 - C^2)^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta - (h^2 - C^2)^2}{h^2},$$

ce qui se réduit à

$$\varrho^2 = \frac{(A^2 - C^2)^2 \sin^2\theta + [B^4 - A^4 - 2C^2(B^2 - A^2)] \cos^2\varphi \sin^2\theta - (h^2 - C^2)^2}{h^2},$$

mais de (4″) on tire

$$\cos^2\varphi \sin^2\theta = \frac{(A^2 - C^2)\sin^2\theta - (h^2 - C^2)}{A^2 - B^2}$$

en sorte que substituant ceci dans la valeur pour ϱ^2 l'on obtient

$$\varrho^2 = \frac{(A^2 - C^2)^2 \sin^2\theta - [A^2 + B^2 - 2C^2][(A^2 - C^2)\sin^2\theta - (h^2 - C^2)] - (h^2 - C^2)^2}{h^2}$$

ce qui se réduit à

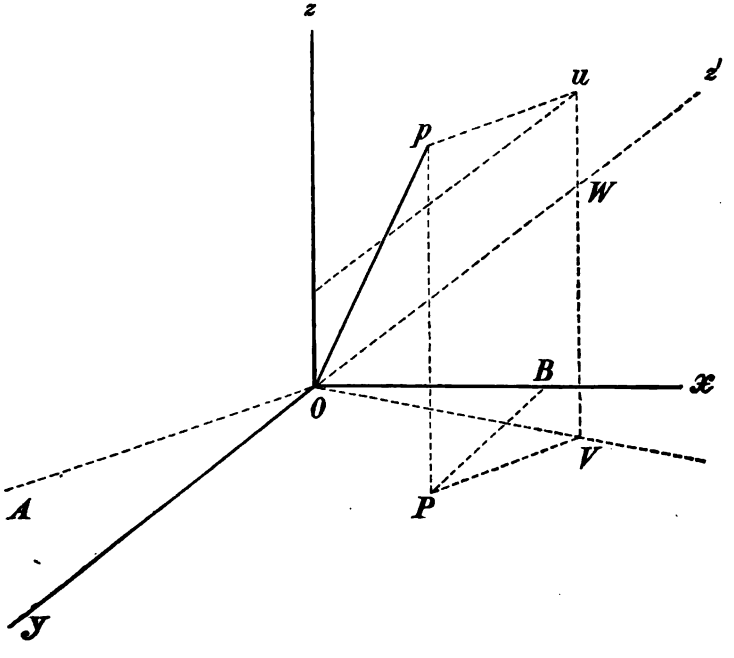
$$\varrho^2 = \frac{(h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - C^2 - h^2) - (A^2 - C^2)(B^2 - C^2)\sin^2\theta}{h^2} \quad . \; . \; (8')$$

La relation (4″) est indépendante de l'angle ψ, que fait avec Ox la trace du plan $x'Oy'$ sur le plan xOy, et cet angle n'entre non plus dans la valeur (8′) trouvée pour ϱ^2; il s'en suit que cette valeur est indépendante de cet angle, et en effet, lorsque l'ellipsoïde dans une certaine position est tangente au plan fixe, elle restera tangente à ce plan quand on la fait tourner, avec ses axes principaux, autour de l'axe fixe Oz; tandis qu'alors l'axe Oz' décrit un cône circulaire droit autour de l'axe Oz, le point de contact décrit un cercle autour du pied de la perpendiculaire abaissée du centre fixe sur le plan fixe, lequel nous avons pris parallèle au plan xOy, et pendant ce mouvement l'angle φ, qui en vertu de (4″) est déterminé quand l'angle θ est donné, ne change pas de valeur.

Il faudra donc encore une relation qui exprime que le

déplacement de l'ellipsoïde, quand le point de contact décrit l'herpolhodie, se fait à chaque instant par roulement, qui doit avoir pour axe instantané la droite, qui va du centre fixe au point de contact, lequel, comme ce centre, reste également en repos pendant un temps infiniment petit.

Pour obtenir cette relation nous remarquons que les quantités indépendantes ψ, φ et θ s'augmentent de l'une position de l'ellipsoïde à la suivante, des quantités infiniment petites $d\psi$, $d\varphi$ et $d\theta$, c'est-à-dire, que l'ellipsoïde peut être amenée d'une certaine position à la suivante par trois rotations infiniment petites, savoir: $d\psi$ autour de l'axe fixe Oz: $d\varphi$ autour de l'axe Oz' et $d\theta$ autour de la trace du plan $x'Oy'$ sur xOy. Si donc on décompose une rotation quelconque autour de la droite, qui va du centre fixe au point de contact, en trois autres autour des droites nommées, ces rotations devront être proportionnelles à $d\psi$, $d\varphi$ et $d\theta$.



Soit à cet effet, sur la figure, Op le rayon vecteur qui va du centre fixe au point de contact; Ox, Oy et Oz les axes fixes,

OA la trace du plan $x'Oy'$ sur le plan xOy, autour de la quelle l'axe Oz doit tourner d'un angle $\theta = zOz'$, jusqu'a ce qu'elle vienne dans la position Oz', en sorte que l'intersection OV du plan zOz' avec le plan xOy est perpendiculaire à OA, qui elle même est perpendiculaire au plan zOz'; et décomposons une rotation infiniment petite représentée par Op en trois rotations infiniment petites respectivement autour de Oz, Oz' et OA. Pour cela menons par le point p une droite pu parallèle à OA, jusqu'a ce qu'elle rencontre en u le plan des deux autres droites Oz et Oz', puis par u une parallèle uV à Oz, qui coupe Oz' en W, et une droite parallèle à Oz'; les trois rotations composantes d'une rotation Op seront uW, OW et pu. Remarquons encore que, P étant la projection sur le plan xy du point de contact p, on aura $pP = uV = h$; et PV parallèle à OA et pu, sera perpendiculaire à OV, en sorte que $PV = pu$. On aura donc:

$$d\psi : d\varphi : d\theta = uW : OW : pu.$$

Posant les coordonnées dans le plan xy, ou dans le plan fixe qui lui est parallèle, du point de contact $OB = x$, $PB = y$, on a sur la figure:

$$OV = x\cos(\psi - 90^0) + y\sin(\psi - 90^0) = x\sin\psi - y\cos\psi,$$

$$OW = \frac{OV}{\cos VOW} = \frac{x\sin\psi - y\cos\psi}{\sin\theta},$$

$$pu = PV = y\cos(\psi - 90^0) - x\sin(\psi - 90^0) = x\cos\psi + y\sin\psi,$$

$$VW = OV\operatorname{tang} VOW = OV\operatorname{cotg}\theta = (x\sin\psi - y\cos\psi)\operatorname{cotang}\theta;$$

ce qui, substitué dans la proportion ci-dessus, donne

$$d\psi : d\varphi : d\theta = h - (x\sin\psi - y\cos\psi)\operatorname{cotang}\theta : \frac{x\sin\psi - y\cos\psi}{\sin\theta} : x\cos\psi + y\sin\psi;$$

des formules d'Euler l'on tire

$$a\sin\psi - b\cos\psi = -\sin\varphi\cos\theta, \quad a\cos\psi + b\sin\psi = \cos\varphi,$$
$$a'\sin\psi - b'\cos\psi = -\cos\varphi\cos\theta, \quad a'\cos\psi + b'\sin\psi = -\sin\varphi,$$
$$a''\sin\psi - b''\cos\psi = \sin\theta, \quad a''\cos\psi + b''\sin\psi = 0;$$

et celles-ci, avec les valeurs (5) et (6) trouvées pour les coordonnées x et y du point de contact, ayant égard à (4″) donnent

$$\left.\begin{aligned} x\sin\psi - y\cos\psi &= \frac{-A^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - B^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + C^2\sin\theta\cos\theta}{h} \\ \text{»} \quad &= -\frac{(A^2-B^2)\sin^2\varphi + B^2 - C^2}{h}\sin\theta\cos\theta \\ \text{»} \quad &= \frac{-(h^2-C^2)}{h}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

$$x\cos\psi + y\sin\psi = \frac{A^2-B^2}{h}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta \quad \ldots (10)$$

et substituant ces valeurs dans la proportion précédente, on aura premièrement

$$d\varphi : d\theta = -\{(A^2-B^2)\sin^2\varphi + (B^2-C^2)\}\cos\theta : (A^2-B^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,$$

ce qui doit donner entre φ et θ la même relation que (4″). Sans cela, ces deux quantités devraient satisfaire à deux équations distinctes, et seraient par conséquent des constantes. En effet, on tire de la dernière proportion l'équation différentielle :

$$\frac{(A^2-B^2)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(A^2-B^2)\sin^2\varphi + (B^2-C^2)} = -\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta},$$

dont les deux membres sont immédiatement intégrables, et donnent

$$(A^2-B^2)\sin^2\varphi + (B^2-C^2) = \frac{\text{constante}}{\sin^2\theta}$$

ce qui s'accorde avec (4″), car celle-ci donne pour $\varphi = \frac{1}{2}\pi$,

$$\sin^2\theta = \frac{h^2-C^2}{A^2-C^2},$$

en sorte que l'on a pour déterminer la constante

$$A^2-C^2=\frac{A^2-C^2}{h^2-C^2}\times \text{constante},$$

c'est à dire

$$\text{constante}=h^2-C^2,$$

ce qui substitué dans l'intégrale ci-dessus, donne la relation (4').

Ensuite l'on tire de la même proportion, ayant égard à (9) et (10),

$$\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{h^2+\{(A^2-B^2)\sin^2\varphi+(B^2-C^2)\}\cos^2\theta}{(A^2-B^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta}$$

laquelle, ayant égard à (4''), qui donne

$$(A^2-B^2)\sin^2\varphi+(B^2-C^2)=\frac{h^2-C^2}{\sin^2\theta},$$

se réduit à

$$\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{h^2-C^2\cos^2\theta}{(A^2-B^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta}\cdots$$

cette formule, avec les formules (4'') et (8') contiennent la solution du problême.

Avant d'aller plus loin, nous exprimerons tout en ϱ^2 au moyen de la formule (8') qui donne

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\theta&=\frac{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-\varrho^2h^2}{(A^2-C^2)(B^2-C^2)}\\ \cos^2\theta&=\frac{(A^2-h^2)(B^2-h^2)+\varrho^2h^2}{(A^2-C^2)(B^2-C^2)}\end{aligned}\right\},\ \ldots\ldots(11)$$

et de la relation (4''), d'où

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\varphi&=\frac{(h^2-C^2)-(B^2-C^2)\sin^2\theta}{(A^2-B^2)\sin^2\theta}=\frac{B^2-C^2}{A^2-B^2}\,\frac{(h^2-C^2)(h^2-B^2)+\varrho^2h^2}{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-\varrho^2h^2}\\ \cos^2\varphi&=\frac{(A^2-C^2)\sin^2\theta-(h^2-C^2)}{(A^2-B^2)\sin^2\theta}=\frac{A^2-C^2}{A^2-B^2}\,\frac{(h^2-C^2)(A^2-h^2)-\varrho^2h^2}{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-\varrho^2h^2}\end{aligned}\right\},\ldots(12)$$

Des formules générales trouvées l'on peut déduire quelques cas particuliers. Supposons maintenant que des trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde, A soit plus grand que B, et que B soit plus grand que C, donc

$$A > B > C,$$

ensorte que B est l'axe moyen. Si l'ellipsoïde est un sphéroïde applati vers les pôles, on a $B = A$, la formule (4'') donne

$$\sin^2\theta = \frac{h^2 - C^2}{A^2 - C^2}$$

ce qui substitué dans (8'), faisant dans cette dernière $B = A$, donne

$$\varrho^2 = \frac{(h^2 - C^2)(A^2 - h^2)}{h^2};$$

les formules (12) donnent le même résultat; pour $A = B$ le dénominateur devenant zéro, il faut qu'il en soit de même pour le numérateur, et l'on obtient ainsi les valeurs de $\sin^2\theta$ et de ϱ^2 ci-dessus.

Si l'ellipsoïde est un sphéroïde allongé on a $B = C$ et le dénominateur (11) devient zéro, annulant par suite le numérateur, on obtient:

$$\varrho^2 = \frac{(h^2 - B^2)(A^2 - h^2)}{h^2}$$

ce que la formule (8') donne de même.

Dans ces deux cas l'herpolhodie est donc un cercle.

Si l'on supposait $A = C$, il faudrait avoir en même temps $h = B = A = C$, parce que la valeur de B doit toujours être comprise entre A et C, et que h ne peut être ni plus petit que C ni plus grand que A; dans ce cas (8') donne $\varrho^2 = 0$, et le lieu est un seul point.

Quand on a $h = A$, lo formule (4'') donne

$$\cos^2\varphi \sin^2\theta = -\frac{A^2 - C^2}{A^2 - B^2}\cos^2\theta,$$

à la quelle il n'y a pas moyen de satisfaire que par les valeurs $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et alors (8') donne $\varrho = 0$; tandisque si $h = C$ la formule (8') donne

$$\varrho^2 = -\frac{(A^2-C^2)(B^2-C^2)}{C^2} \sin^2\theta,$$

qui n'admet que les valeurs reelles $\sin\theta = 0$ et $\varrho = 0$; donc dans ces deux cas l'herpolhodie est un seul point, ce qui d'ailleurs est évident. Le cas de $h = B$ sera considéré plus tard; mais ici nous pouvons encore déterminer les plus grandes et les plus petites valeurs que ϱ^2 peut acquerir. Il suit de la formule (12) pour $\cos^2\varphi$ que l'on doit toujours avoir

$$\sin^2\theta > \frac{h^2-C^2}{A^2-C^2},$$

en sorte que l'on aura pour la plus grande valeur de ϱ^2, suivant (8'), si dans celle-ci on substitue la plus pétite valeur que peut avoir $\sin^2\theta$,

$$\varrho^2_{\text{maximum}} = \frac{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-(h^2-C^2)(B^2-C^2)}{h^2},$$

ou

$$\varrho^2_{\text{max.}} = \frac{(h^2-C^2)(A^2-h^2)}{h^2}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

et cela que h soit plus grand ou plus petit que B.

Il suit de la formule (12) pour $\sin^2\varphi$, que l'on doit toujours avoir

$$\sin^2\theta < \frac{h^2-C^2}{B^2-C^2}$$

ce qui donne pour la plus petite valeur de ϱ^2, suivant (8') si dans celle-ci l'on substitue la plus grande valeur que $\sin^2\theta$ peut avoir

$$\varrho^2_{\text{minimum}} = \frac{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-(A^2-C^2)(h^2-C^2)}{h^2}$$

ou

$$\varrho^2_{\text{min.}} = \frac{(h^2-C^2)(B^2-h^2)}{h^2}, \text{ au cas } h < B \ldots (14)$$

Au cas où $h > B$ la plus grande valeur de $\sin\theta$ est l'unité, on a donc pour la plus petite valeur de ϱ^2 suivant (8')

$$\varrho^2_{\text{min.}} = \frac{(h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2)-(A^2-C^2)(B^2-C^2)}{h^2}$$

ou

$$\varrho^2_{\text{min.}} = \frac{(A^2-h^2)(h^2-B^2)}{h^2}, \text{ au cas } h > B. \ldots (15)$$

Pour abrévier les formules (11) et (12) nous poserons

$$\left.\begin{array}{ll} (h^2-C^2)(A^2+B^2-C^2-h^2) & = \alpha^4 \\ (A^2-h^2)(B^2-h^2) & = \beta^4 \\ (A^2-C^2)(B^2-C^2) & = \gamma^4 \\ (h^2-C^2)(h^2-B^2) & = \delta^4 \\ (h^2-C^2)(A^2-h^2) & = \varepsilon^4 \end{array}\right\}, \ldots (15')$$

elles deviennent alors

$$\sin^2\theta = \frac{\alpha^4-\varrho^2 h^2}{\gamma^4}, \cos^2\theta = \frac{\beta^4+\varrho^2 h^2}{\gamma^4} \ldots (16)$$

$$\sin^2\varphi = \frac{B^2-C^2}{A^2-B^2}\,\frac{\delta^4+\varrho^2 h^2}{\alpha^4-\varrho^2 h^2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{A^2-C^2}{A^2-B^2}\,\frac{\varepsilon^4-\varrho^2 h^2}{\alpha^4-\varrho^2 h^2}.$$

Nous allons maintenant calculer le coëfficient différentiel du deuxième ordre, lequel égalé à zéro donnera l'équation qui détermine les points d'inflexion. Substituant les valeurs (16) dans les formules (9) et (10) celles-si deviennent

$$x\cos\psi + y\sin\psi = \frac{1}{h}\,\frac{(\delta^4+\varrho^2 h^2)^{1/2}(\varepsilon^4-\varrho^2 h^2)^{1/2}}{(\alpha^4-\varrho^2 h^2)^{1/2}},$$

$$x\sin\psi - y\cos\psi = -\frac{h^2-C^2}{h}\,\frac{(\beta^4+\varrho^2 h^2)^{1/2}}{(\alpha^4-\varrho^2 h^2)^{1/2}};$$

d'où, en posant pour abrévier

$$P = \frac{(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}{h(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}},\ Q = \frac{h^2 - C^2}{h}\frac{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}, \ldots (17)$$

l'on tire

$$x = P \cos\psi - Q \sin\psi,$$
$$y = Q \cos\psi + P \sin\psi;$$

ces valeurs de x et de y donnent, en laissant la variable principale quelconque,

$$dx = P' \cos\psi - Q' \sin\psi,$$
$$dy = Q' \cos\psi + P' \sin\psi:$$

où l'on a posé

$$P' = dP - Q\,d\psi,\quad Q' = P\,d\psi + dQ;$$

et ensuite

$$d^2x = P'' \cos\psi - Q'' \sin\psi,$$
$$d^2y = Q'' \cos\psi + P'' \sin\psi;$$

dans lesquelles

$$P'' = dP' - Q'\,d\psi,$$
$$Q'' = P'\,d\psi + dQ';$$

ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned} dx\,d^2y - dy\,d^2x &= P'Q'' - Q'P'' \\ \text{»} \quad &= (P'^2 + Q'^2)\,d\psi + P'\,dQ' - Q'\,dP \end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

Différentiant par rapport à ϱ la valeur (17) de P, on obtient

$$\frac{dP}{d\varrho} = \frac{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \delta^4 - 2\varrho^2 h^2) + (\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h;$$

de la formule (16) pour $\sin^2\theta$ on déduit

$$\frac{d\theta}{d\varrho} = -\frac{\varrho h^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}, \ldots . (19)$$

et si l'on substitue les valeurs (16) de $\sin\theta$, $\cos\theta$ etc. dans la valeur trouvée précédemment (page 340) pour $\frac{d\psi}{d\theta}$, elle devient

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{\mu^6 + h^2 C^2 \varrho^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2} (\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2} (\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}, \quad . . (20)$$

où l'on a posé

$$\mu^6 = C^2 \beta^4 - h^2 \gamma^4 = (h^2 - C^2)(C^2 h^2 - A^2 B^2) \quad . . (21)$$

en sorte que l'on a

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{d\psi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{(\mu^6 + h^2 C^2 \varrho^2)\, \varrho h^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2} (\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2} (\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}},$$

et par conséquent

$$P' = \frac{dP}{d\varrho} - Q \frac{d\psi}{d\varrho},$$

ou

$$P' = \frac{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \delta^4 - 2\varrho^2 h^2) + (\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2) - (h^2 - C^2)(\mu^6 + h^2 C^2 \varrho^2)}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2} (\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2} (\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}} \varrho h,$$

dont le numérateur, ayant égard à ce que désignent (15') α^4, β^4 . . . etc., se réduit à

$$(h^2 - C^2)\alpha^4 (A^2 + B^2 - h^2) - (2\alpha^4 + C^2(h^2 - C^2))\varrho^2 h^2 + \varrho^4 h^4;$$

cette expression devient zéro pour $\varrho^2 h^2 = \alpha^4$, ce qui donne

$$\alpha^4 \{(h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - h^2) - 2\alpha^4 - C^2(h^2 - C^2)\} + \alpha^8$$

ou

$$\alpha^4 \{\alpha^4 - 2\alpha^4\} + \alpha^8 = 0,$$

elle sera donc divisible par $-\varrho^2 h^2 + \alpha^4$, et l'on trouve en effet pour le quotient

$$(h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - h^2) - \varrho^2 h$$

ou

$$\lambda^4 - \varrho^2 h^2,$$

en posant

$$(h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - h^2) = \lambda^4. \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Ainsi l'on aura

$$P' = \frac{(\lambda^4 - \varrho^2 h^2)\varrho h}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}.$$

La valeur (17) de Q donne

$$\frac{dQ}{d\varrho} = \frac{(h^2 - C^2)\gamma^4}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h,$$

tandis que l'on trouve

$$P\frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{\mu^6 + h^2 C^2 \varrho^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h,$$

et par suite

$$Q' = P\frac{d\psi}{d\varrho} + \frac{dQ}{d\varrho},$$

ou

$$Q = \frac{(h^2 - C^2)\gamma^4 + \mu^6 + h^2 C^2 \varrho^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h,$$

ce qui, en y substituant dans le numérateur pour γ^4 et μ^6 les valeurs (15') et (21), se réduit à

$$Q' = -\frac{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)C^2}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h$$

ou

$$Q' = -\frac{C^2}{(\alpha - \varrho^2 h^2)^{1/2}(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}\varrho h.$$

Divisant les valeurs trouvées pour P' et Q' par $\frac{d\theta}{d\varrho}$, ce qui revient à prendre θ pour la variable indépendante, on obtient

$$P' = \frac{(\varrho^2 h^2 - \lambda^4)(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}}{h(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{1/2}}, \quad Q' = \frac{C^2}{h}, \ldots (23)$$

qui donnent

$$P'^2 + Q'^2 = \frac{(\varrho^2 h^2 - \lambda^4)^2(\beta^4 + \varrho^2 h^2) + C^4(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}{h^2(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)};$$

réduisant le numérateur on obtient

$$\varrho^6 h^6 + (\beta^4 - 2\lambda^4 - C^4)\varrho^4 h^4 + \{C^4(\varepsilon^4 - \delta^4) + \lambda^8 - 2\beta^4\lambda^4\}\varrho^2 h^2 + C^4\delta^4\varepsilon^4 + \beta^4\lambda^8,$$

et, ayant égard aux valeurs (15′) et (22) de β^4, δ^4 et λ^4, on trouvera que cette expression est divisible par $\varrho^2 h^2 - \alpha^4$, et donne pour quotient

$$\varrho^4 h^4 + (\gamma^4 - 2\lambda^4 - C^4)\varrho^2 h^2 - (h^2 - C^2)\beta^4(A^2 + B^2 + C^2 - h^2),$$

de sorte que l'on aura

$$Q'^2 = -(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)\frac{\varrho^4 h^4 + (\gamma^4 - 2\lambda^4 - C^4)\varrho^2 h^2 - (h^2 - C^2)\beta^4(A^2 + B^2 + C^2 - h^2)}{h^2(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)} \ldots (26)$$

et multipliant ceci par la valeur (20), l'on obtient

$$Q'^2)\frac{d\psi}{d\theta} = \varrho^2 h^2)^{1/2} \frac{(\mu^6 + C^2 h^2 \varrho^2)[\varrho^4 h^4 + (\gamma^4 - 2\lambda^4 - C^4)\varrho^2 h^2 - (h^2 - C^2)\beta^4(A^2 + B^2 + C^2 - h^2)]}{h^2(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{3/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}} . (27)$$

De la formule (23) pour P' ondéduit

$$\left\{\frac{(\varrho^2 h^2 - \lambda^4)[(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2) - (\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2) + (\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)]}{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{3/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}} \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2(\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{3/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}}\right\} \varrho h$$

ce qui se réduit encore à

$$= \frac{(\varrho^2 h^2 - \lambda^4)(\varrho^4 h^4 + 2\beta^4 \varrho^2 h^2 - \alpha^4 \beta^4) + 2(\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)^{1/2}(\delta^4 + \varrho^2 h^2)^{3/2}(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)^{3/2}} \varrho h$$

et multipliant ceci par l'inverse de (19), ou

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{(\alpha^4-\varrho^2 h^2)^{1/2}(\beta^4+\varrho^2 h^2)^{1/2}}{\varrho h^2},$$

on obtient

$$\frac{dP'}{d\theta} = -\frac{1}{h}(\alpha^4-\varrho^2h^2)^{1/2}\frac{(\varrho^2h^2-\lambda^4)(\varrho^4h^4+2\beta^4\varrho^2h^2-\alpha^4\beta^4)+2(\beta^4+\varrho^2h^2)(\delta^4+\varrho^2h^2)(\varepsilon^4-\varrho}{(\delta^4+\varrho^2h^2)^{3/2}(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)^{3/2}}$$

et par conséquent

$$Q'\frac{dP'}{d\theta} = -\frac{C^2}{h^2}(\alpha^4-\varrho^2h^2)^{1/2}\left\{\frac{-\varrho^6h^6+(2\varepsilon^4-2\delta^4-\lambda^4)\varrho^4h^4+[2(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)-\alpha^4\beta^4-2\beta^4\lambda^4]\varrho^2h^2 + \alpha^4\beta^4\lambda^4+2\beta^4\delta^4\varepsilon^4}{(\delta^4+\varrho^2h^2)^{3/2}(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)^{3/2}}\right\}$$

Comme Q' (23) est constante l'équation (18) qui détermine les points d'inflexion sera

$$(F^2+Q'^2)\frac{d\psi}{d\theta} - Q'\frac{dP'}{d\theta} = 0,$$

ou, substituant dans celle-ci les valeurs (27) et (27') trouvées ci-dessus, développant, et omettant le facteur et le dénominateur commun,

$$\left\{\begin{array}{l} C^2h^6\varrho^6+[\mu^6+C^2(\gamma^4-2\lambda^4-C^4)]\varrho^4h^4+[\mu^6(\gamma^4-2\lambda^4-C^4)-C^2(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2)]\varrho \\ -C^2h^6\varrho^6+C^2(2\varepsilon^4-2\delta^4-\lambda^4)\varrho^4h^4+C^2[2(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)-\alpha^4\beta^4-2\beta^4\lambda^4]\varrho \\ \qquad -\mu^6(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2) \\ \qquad +C^2\beta^4(\alpha^4\lambda^4+2\delta^4\varepsilon^4) \end{array}\right\} =$$

ou

$$\begin{array}{l} [\mu^6+C^2(\gamma^4-3\lambda^4+2\varepsilon^4-2\delta^4-C^4)]\varrho^4h^4 \\ +[\mu^6(\gamma^4-2\lambda^4-C^4)-C^2(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2)+C^2(2(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)-\alpha^4\beta^4-2\beta^4\lambda^4)] \\ +[-\mu^6(h^2-C^2)(A^2+B^2+C^2-h^2)+C^2(\alpha^4\lambda^4+2\delta^4\varepsilon^4)]\beta^4 = 0, \end{array}$$

ou, ayant égard à ce que désignent α, β etc. μ et λ,

$$\begin{array}{l} [2A^2B^2C^2-h^2(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)]\varrho^4h^4\ldots \\ +(h^2-C^2)[-A^2B^2(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2+2C^2(A^2+B^2-C^2)) \\ +((2A^2+2B^2+C^2)(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)-2(A^2+B^2)C^4)h^2 \\ -2(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)h^4]\varrho^2h^2+\alpha^4\beta^4(h^2-C^2)(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) = \end{array}$$

ou, faisant pour abréger

$$A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2 = \Sigma ,$$

on aura, pour l'équation qui donnera le rayon-vecteur ϱ d'un point d'inflexion

$$\begin{aligned} -2 A^2 B^2 C^2] \varrho^4 h^4 + (h^2 - C^2)[(A^2 B^2 - (2 A^2 + 2 B^2 + C^2) h^2 + 2 h^4) \Sigma + \\ 2 A^2 B^2 C^2 (A^2 + B^2 - C^2) + 2 (A^2 + B^2) C^4 h^2] \varrho^2 h^2 \\ - (h^2 - C^2)^2 (A^2 + B^2 - C^2 - h^2)(A^2 - h^2)(B^2 - h^2) \Sigma = 0, \end{aligned}$$

laquelle se décompose rationnellement en deux facteurs, en sorte qu'elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} -(h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - C^2 - h^2)\} \\ (h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2) \varrho^2 h^2 + (h^2 - C^2)(A^2 - h^2)(B^2 - h^2) \Sigma\} = 0 \ldots (28) \end{aligned}$$

Pour s'en convaincre on n'a qu'à effectuer le produit des facteurs; on voit d'abord que le coëfficient de $\varrho^4 h^4$ et le terme constant s'accordent, tandisque le coëfficient de $\varrho^2 h^2$ est

$$(h^2 - C^2)(A^2 - h^2)(B^2 - h^2) \Sigma - (h^2 - C^2)(A^2 + B^2 - C^2 - h^2)(h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2)$$

ou, omettant le facteur commun $h^2 - C^2$,

$$^2 - (A^2 + B^2) h^2 + h^4) \Sigma - (A^2 + B^2 - C^2) h^2 \Sigma + h^4 \Sigma + 2 A^2 B^2 C^2 (A^2 + B^2 - C^2) - 2 A^2 B^2 C^2 h^2$$

ou

$$^2 - (2 A^2 + 2 B^2 - C^2) h^2 + 2 h^4] \Sigma + 2 A^2 B^2 C^2 (A^2 + B^2 - C^2) - 2 C^2 h^2 (\Sigma - A^2 C^2 - B^2 C^2)$$

ou

$$^2 - (2 A^2 + 2 B^2 + C^2) h^2 + 2 h^4] \Sigma + 2 A^2 B^2 C^2 (A^2 + B^2 - C^2) + 2 (A^2 + B^2) C^4 h^2.$$

Le premier facteur, égalisé séparement à zéro, donnerait pour ϱ^2, à cause de $B > C$, une valeur plus grande que le maximum (13) de ϱ^2, et par consequent ne peut appartenir à aucun point de la courbe; le second facteur donne

$$\varrho^2 h^2 = - \frac{(h^2 - C^2)(A^2 - h^2)(B^2 - h^2) \Sigma}{h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2} \ldots (29)$$

Considérons premièrement le dénominateur; si $h > B$ l'on a

$$h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 > B^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2$$

ou, ayant égard à ce que désigne la somme Σ,

$$\begin{aligned} h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 &> B^2 \{A^2 B^2 + B^2 C^2 - A^2 C^2\}, \\ \text{»} \qquad &> B^2 \{A^2 (B^2 - C^2) + B^2 C^2\}, \end{aligned}$$

donc dans ce cas, le dénominateur est toujours positif. Si h est entre B et C l'on a

$$\begin{aligned} h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 &> C^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 \\ \text{»} \qquad &> C^2 (A^2 C^2 + B^2 C^2 - A^2 B^2), \end{aligned}$$

ce qui est positif tant que

$$C^2 > \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2}.$$

c'est-à-dire tant que l'ellipsoïde est en effet un ellipsoïde d'inertie; le plus grand des moments principaux d'inertie d'un corps étant toujours plus petit que la somme des deux autres, ou

$$\frac{1}{C^2} < \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}$$

ce qui revient à l'inégalité précédente; mais pour un ellipsoïde où

$$C^2 < \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2},$$

on a $C^2 (A^2 C^2 + B^2 C^2 - A^2 B^2) < 0$,
donc, comme dans ce cas-ci

$$B^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 > 0 \quad \text{et} \quad C^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 < 0$$

il y aura des valeurs de h entre B et C pour lesquelles le dénominateur est positif, et d'autres pour lesquelles ce numerateur est négatif.

Supposons donc en premier lieu

$$h > B \quad \text{et} \quad C^2 > \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2};$$

alors on a, en vertu des formules (13), (15) et (29), omettant les facteurs communs,

$$\varrho^2 h^2_{\text{max.}} - \varrho^2 h^2 = 1 + \frac{(B^2 - h^2)\Sigma}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} = \frac{B^2(A^2B^2 + B^2C^2 - A^2C^2}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} > 0,$$

$$\varrho^2 h^2_{\text{min.}} - \varrho^2 h^2 = 1 - \frac{(h^2 - C^2)\Sigma}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} = \frac{C^2(A^2C^2 + B^2C^2 - A^2B^2}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} > 0,$$

ou

$$\varrho^2 h^2 < \varrho^2 h^2_{\text{maximum}} \quad \text{et aussi} \quad \varrho^2 h^2 < \varrho^2 h^2_{\text{minimum}}$$

en sorte que cette valeur $\varrho^2 h^2$ n'appartiendra à aucun point de la courbe, mais quand

$$h > B \quad \text{et} \quad C^2 < \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2},$$

on aura

$$\varrho^2 h^2_{\text{maximum}} - \varrho^2 h^2 > 0 \quad \text{et} \quad \varrho^2 h^2_{\text{minimum}} - \varrho^2 h^2 < 0,$$

ou

$$\varrho^2 h^2 < \varrho^2 h^2_{\text{maximum}} \quad \text{et} \quad \varrho^2 h^2 > \varrho^2 h^2_{\text{minimum}},$$

et dans ce cas la valeur de $\varrho^2 h^2$ appartiendra à un point rêel de la courbe, la quelle dans ce point aura alors un point d'inflexion.

Supposons maintenant

$$h < B \quad \text{et} \quad h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2 > 0$$

on aura, ayant égard à (13), (14) et (29),

$$\varrho^2 h^2 \quad - \varrho^2 h^2 > 0$$

$$\varrho^2 h^2_{\text{min.}} - \varrho^2 h^2 = 1 + \frac{(A^2 - h^2)\Sigma}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} = \frac{A^2(A^2B^2 + A^2C^2 - B^2C^2)}{h^2\Sigma - 2A^2B^2C^2} > 0,$$

la valeur trouvée pour $\varrho^2 h^2$ sera inférieure au minimum, et la courbe n'aura pas de point d'inflexion; enfin, supposons

$$h < B \quad \text{et} \quad h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2 < 0$$

on aura

$$\varrho^2 h^2_{\text{max.}} - \varrho^2 h^2 = 1 + \frac{(B^2 - h^2)\Sigma}{h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2} = \frac{B^2 (A^2 B^2 + B^2 C^2 - A^2 C^2)}{h^2 \Sigma - 2 A^2 B^2 C^2} < 0$$

et par conséquent

$$\varrho^2 h^2 > \varrho^2 h^2_{\text{maximum}},$$

en sorte que la valeur du rayon vecteur n'appartient à aucun point de la courbe, laquelle dans ce cas n'aura pas de point d'inflexion. Nous concluons de ce qui précède ci-dessus, que pour un ellipsoïde d'inertie l'herpolhodie n'aura jamais des points d'inflexion, et que pour les autres ellipsoïdes, pour les quelles

$$C^2 < \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2}$$

l'herpolhodie aura des points d'inflexion, si la distance du centre fixe au plan fixe est plus grande que l'axe moyen de l'ellipsoïde.

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe, on a,

$$\frac{d x^2}{d \theta^2} + \frac{d y^2}{d \theta^2} = P'^2 + Q'^2$$

ou, désignant l'arc de la courbe par s, en vertu de (26),

$$\frac{d s^2}{d \theta^2} = -(\alpha^4 - \varrho^2 h^2) \frac{\varrho^4 h^4 + (\gamma^4 - 2\lambda^4 - C^4)\varrho^2 h^2 - (h^2 - C^2)\beta^4 (A^2 + B^2 + C^2 - h^2)}{h^2 (\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)},$$

et comme on a (19),

$$\frac{d \theta^2}{d \varrho^2} = \frac{\varrho^2 h^4}{(\alpha^4 - \varrho^2 h^2)(\beta^4 + \varrho^2 h^2)},$$

il s'ensuit

$$\frac{ds^2}{d\varrho^2}=-\varrho^2h^2\frac{\varrho^4h^4+(\gamma^4-2\lambda^4-C^4)\varrho^2h^2-(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2)}{(\beta^4+\varrho^2h^2)(\delta^4+\varrho^2h^2)(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)},\ldots(30)$$

ou, désignant par π l'angle polaire compté du rayon vecteur dans le plan xz, et ayant égard à la formule

$$\frac{ds^2}{d\varrho^2}=1+\varrho^2\frac{d\pi^2}{d\varrho^2},$$

on aura

$$\varrho^2\frac{d\pi^2}{d\varrho^2}=-\frac{\varrho^2h^2[\varrho^4h^4+(\gamma^4-2\lambda^4-C^4)\varrho^2h^2-(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2)]}{(\beta^4+\varrho^2h^2)(\delta^4+\varrho^2h^2)(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)}\ldots$$
$$-\frac{(\beta^4+\varrho^2h^2)(\delta^4+\varrho^2h^2)(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)}{(\beta^4+\varrho^2h^2)(\delta^4+\varrho^2h^2)(\varepsilon^4-\varrho^2h^2)};$$

développant le numérateur, il devient d'abord

$$(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4+\gamma^4-2\lambda^4-C^4)\varrho^4h^4\ldots$$
$$+(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4-(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2))\varrho^2h^2$$
$$+\beta^4\delta^4\varepsilon^4,$$

et lorsqu'on y substitue les valeurs (15') et (22) de ε^4, β^4 et λ^4 on trouve

$$\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4+\gamma^4-2\lambda^4-C^4=-h^4,$$
$$\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4-(h^2-C^2)\beta^4(A^2+B^2+C^2-h^2)=-2h^2\beta^4(h^2-C^2),$$
$$\beta^4\delta^4\varepsilon^4=-(h^2-C^2)^2\beta^8,$$

de sorte que ce numérateur devient:

$$-(\varrho^4h^8+2h^4\beta^4(h^2-C^2)\varrho^2+(h^2-C^2)^2\beta^8),$$

ou

$$-h^4\left(\varrho^2h^2+\frac{h^2-C^2}{h^2}\beta^4\right)^2$$

et, substituant tout ceci dans la valeur ci-dessus pour $\varrho^2\frac{d\pi^2}{d\varrho^2}$, on obtient,

$$\frac{d\pi^2}{d\varrho^2} = \frac{h^4\left(\varrho^2 h^2 + \frac{h^2 - C^2}{h^2}\beta^4\right)^2}{\varrho^2(\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}$$

ou

$$\frac{d\pi}{d\varrho} = -\frac{h^2\left(\varrho^2 h^2 + \frac{h^2 - C^2}{h^2}\beta^4\right)}{\varrho\sqrt{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)(\delta^4 + \varrho^2 h^2)(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}} \quad ..(31)$$

où nous avons pris le signe — parce que nous supposerons que le maximum de ϱ à lieu pour $\pi = 0$, et qu'ainsi initialement ϱ diminue quand π s'accroit.

On peut reduire cette formule aux intégrales elliptiques; à cet effet écrivons la

$$d\pi = -\frac{\frac{1}{2}h^4\, d.\varrho^2}{\sqrt{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)\ldots(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}} - \frac{\frac{1}{2}\beta^4(h^2 - C^2)\, d.\varrho^2}{\sqrt{(\beta^4 + \varrho^2 h^2)\ldots(\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2)}},$$

et supposons premièrement $h > B$; comme on a dans ce cas

$$\varrho^2_{\text{max.}} = \frac{(A^2 - h^2)(h^2 - C^2)}{h^2} \quad \text{et} \quad \varrho^2_{\text{min.}} = \frac{(A^2 - h^2)(h^2 - B^2)}{h^2}.$$

on peut poser

$$\varrho^2 = \frac{(A^2 - h^2)(h^2 - B^2)}{h^2} + \zeta\frac{(A^2 - h^2)(B^2 - C^2)}{h^2} \quad ..(32)$$

ζ étant une quantité telle que l'on doit toujours avoir

$$\zeta > 0 \quad \text{et} \quad \zeta < 1,$$

sans exclure l'égalité.

Avec cette valeur de ϱ^2 on trouve

$$\beta^4 + \varrho^2 h^2 = (A^2 - h^2)(B^2 - C^2)\zeta,$$
$$\delta^4 + \varrho^2 h^2 = (h^2 - B^2)(A^2 - C^2) + (A^2 - h^2)(B^2 - C^2)\zeta,$$
$$\varepsilon^4 - \varrho^2 h^2 = (A^2 - h^2)(B^2 - C^2)(1 - \zeta),$$

et

$$d\varrho^2 = \frac{(A^2 - h^2)(B^2 - C^2)}{h^2}\, d \quad ,$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs dans la valeur précédente de $d\pi$, celle-ci devient

$$d\pi = -\frac{\frac{1}{2}h^2\,d\zeta}{\sqrt{\{\zeta(1-\zeta)((h^2-B^2)(A^2-C^2)+(A^2-h^2)(B^2-C^2)\zeta)\}}}\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}(h^2-B^2)(h^2-C^2)\,d\zeta}{[(h^2-B^2)+\zeta(B^2-C^2)]\sqrt{[\zeta(1-\zeta)((h^2-B^2)(A^2-C^2)+(A^2-h^2)(B^2-C^2)\zeta)}}$$

ou, faisant

$$\zeta = \cos^2\varphi, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$d\pi = \frac{h^2\,d\varphi}{\sqrt{[(h^2-B^2)(A^2-C^2)+(A^2-h^2)(B^2-C^2)\cos^2\varphi]}}\cdots$$
$$-\frac{(h^2-B^2)(h^2-C^2)\,d\varphi}{(h^2-B^2)+\cos^2\varphi(B^2-C^2)]\sqrt{[(h^2-B^2)(A^2-C^2)+(A^2-h^2)(B^2-C^2)\cos^2\varphi]}}$$

ou

$$d\pi = \frac{1}{\sqrt{(h^2-C^2)(A^2-B^2)}}\left\{\frac{h^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{h^2-B^2}{1-n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\},$$

dans laquelle

$$k^2 = \frac{(A^2-h^2)(B^2-C^2)}{(A^2-B^2)(h^2-C^2)} < n, \quad n = \frac{B^2-C^2}{h^2-C^2} < 1.$$

Au cas où $h < B$, on obtient de la même manière

$$d\pi = \frac{1}{\sqrt{(A^2-h^2)(B^2-C^2)}}\left\{\frac{h^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{B^2-h^2}{1-n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\}$$

dans laquelle

$$k^2 = \frac{(h^2-C^2)(A^2-B^2)}{(B^2-C^2)(A^2-h^2)} < n, \quad n = \frac{A^2-B^2}{A^2-h^2} < 1.$$

On aura donc, supposant que pour $\varphi = 0$ on a aussi $\pi = 0$, au cas où $h > B$

$$= \frac{1}{\sqrt{(h^2-C^2)(A^2-B^2)}}\left\{h^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}} - (h^2-B^2)\int^\varphi \frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\}.$$

Cette formule montre que π s'accroit sans cesse avec φ, et à cause de la périodicité des intégrales, que si π_0 est sa valeur pour $\varphi = \frac{1}{2}\varpi$, ϖ désignant la demi-circomférense de rayon un; cette valeur pour $\varphi = \varpi$, $\frac{3}{2}\varpi$, 2ϖ, $\frac{5}{2}\varpi$ etc. deviendra $2\pi_0$, $3\pi_0$, $4\pi_0$, $5\pi_0 \ldots$ etc. Le rayon ϱ, d'après (32) et (33) décroitera dans l'angle π_0 du maximum au minimum pour s'accroitre dans l'intervalle de π_0 à $2\pi_0$ du minimum au maximum, et continuera ainsi à decroitre et à accroitre dans chacun des intervalles π_0. La courbe consisterait donc de l'arc dans le premier angle π_0 répeté sans cesse dans chacun des angles π_0 suivants, tellement que deux arcs successifs sont symétriques par rapport au rayon vecteur commun, et si π_0 est commensurable avec la circonférence 2ϖ la courbe serait fermée.

Au cas où $h = B$ les deux formules donnent

$$d\pi = \frac{B^2}{\sqrt{(B^2-C^2)(A^2-B^2)}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

dont l'intégrale est

$$\pi = \frac{B^2}{\sqrt{(A^2-B^2)(B^2-C^2)}} \log \operatorname{cotang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

supposant que pour $\varphi = 0$ on ait $\pi = 0$.

Si l'on pose

$$\frac{(A^2-B^2)(B^2-C^2)}{B^2} = m^2$$

cette valeur de π devient

$$\pi = \frac{B}{m} \log \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

d'où en passant des logarithmes aux nombres,

$$\operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) = e^{\frac{m\pi}{B}},$$

par suit

$$\text{tang}\,(45 - \tfrac{1}{2}\varphi) = e^{-\frac{m\pi}{B}},$$

et, prenant la somme de ces deux équations

$$\frac{2}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} = e^{\frac{m\pi}{B}} + e^{-\frac{m\pi}{B}},$$

ou

$$\cos\varphi = \frac{2}{e^{\frac{m\pi}{B}} + e^{-\frac{m\pi}{B}}}$$

et, comme nous avons dans ce cas (32) et (33)

$$\varrho^2 = \frac{(A^2 - B^2)(B^2 - C^2)}{B^2}\zeta \quad \text{ou} \quad \varrho = m\cos\varphi,$$

on aura

$$\varrho = \frac{2m}{e^{\frac{m\pi}{B}} + e^{-\frac{m\pi}{B}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

résultat qu'on aurait aussi pu déduire de (31) en y faisant $B = h$ et par conséquent $\beta = 0$, $\delta = 0$, ce qui donne

$$d\pi = -\frac{B\,d\varrho}{\varrho\sqrt{m^2 - \varrho^2}} \text{ etc.} \ldots\ldots\ldots (b)$$

d'après l'équation (a) ϱ s'approche indéfiniment de zéro lorsque π devient de plus grand en plus grand. Il s'en suit que la courbe, au cas de $h = B$, est une sorte de spirale, qui fait une infinité de révolutions autour du pôle sans jamais pouvoir l'atteindre Il y a encore une particularité, rémarquée par Poinsot; la formule (b) donnant pour la tangente de l'angle μ de la courbe avec le rayon vecteur,

$$\text{tang}\,\mu = \frac{\varrho\,d\pi}{d\varrho} = -\frac{B}{\sqrt{m^2 - \varrho^2}},$$

on a pour $\varrho = 0$

$$\text{tang}\ \mu = -\frac{B}{m},$$

ce qui est une valeur finie. Pour expliquer cette particularité nous remarquons que quand l'angle polaire π devient de plus en plus grand, le terme $e^{-\frac{m\pi}{B}}$ dans l'équation (a) s'approche sans cesse de zéro, et pour des valeurs trés-grandes de cet angle, l'équation de la courbe sera sensiblement

$$\varrho = 2\, m\, e^{-\frac{m\pi}{B}},$$

laquelle représente une spirale logarithmique, qui donne pour la tangente de l'angle constant qu'elle fait avec le rayon recteur

$$\varrho \frac{d\pi}{d\varrho} = -\frac{B}{m},$$

ou

$$\text{tang}\ \mu = -\frac{B}{m}.$$

L'herpolhodie, au cas de $h = B$, est donc une spirale qui fait une infinité de révolutions autour du pôle et est asymptotique à une spirale logarithmitique, dont le rayon vecteur à l'origine est double de celui de l'herpolhodie.

Nous pouvons encore dans le cas général calculer le rayon R de courbure de l'herpolhodie, qui est donné par la formule

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{d\pi}\right)^3}{\varrho^2 + 2\frac{d\varrho^2}{d\pi^2} - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\pi^2}},$$

ou, si l'on prend ϱ pour variable indépendante,

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{d\varrho}\right)^3}{\varrho^2\frac{d\pi^3}{d\varrho^3} + 2\frac{d\pi}{d\varrho} + \varrho\frac{d^2\pi}{d\varrho^2}} \quad \ldots\ldots\ (c)$$

La formule (31) donne d'abord après réduction

$$= \frac{-[\varrho^2 h^4 - \beta^4(h^2-C^2)](\beta\delta\varepsilon)}{\varrho^2\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}} + \frac{[\varrho^2 h^4 + \beta^4(h^2-C^2)][(\delta\varepsilon)+(\beta\varepsilon)-(\beta\delta)]\varrho^2 h^2}{\varrho^2\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}}$$

ou $(\beta\delta\varepsilon)$, $(\beta\varepsilon)$, $(\beta\delta)$, $(\delta\varepsilon)$ désignent des produits des quantités $\beta^4+\varrho^2 h^2$, $\delta^4+\varrho^2 h^2$, $\varepsilon^4-\varrho^2 h^2$, et ensuite on a pour le dénominateur (c) de R

$$\frac{{}^2h^4 + \beta^4(h^2-C^2)]^3}{\varrho\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}} - \frac{2[\varrho^2 h^4+\beta^4(h^2-C^2)](\beta\delta\varepsilon)}{\varrho\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}} - \frac{[\varrho^2 h^4-\beta^4(h^2-C^2)](\beta\delta\varepsilon)}{\varrho\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}} \cdots$$
$$+ \frac{[\varrho^2 h^4 + \beta^4(h^2-C^2)][(\delta\varepsilon)+(\beta\varepsilon)-(\beta\delta)]\varrho^2 h^2}{\varrho\sqrt{(\beta\delta\varepsilon)^3}},$$

le numérateur de cette expression se réduit à

$$^2h^4+\beta^4(h^2-C^2)][(\varrho^2 h^4+\beta^4(h^2-C^2))^2+2(\beta\delta\varepsilon)-((\delta\varepsilon)+(\beta\varepsilon)-(\beta\delta))\varrho^2 h^2]-$$
$$-[\varrho^2 h^4-\beta^4(h^2-C^2)](\beta\delta\varepsilon)$$

ou, développant les produits $(\beta\delta\varepsilon)$, $(\delta\varepsilon)$ des quantités $\beta^4+\varrho^2 h^2$, $\delta^4+\varrho^2 h^2$, etc.,

$$\left.\begin{array}{r}[\varrho^2 h^4+\beta^4(h^2-C^2)][\varrho^4 h^8+2\varrho^2 h^4\beta^4(h^2-C^2)+\beta^8(h^2-C^2)^2+2\beta^4\delta^4\varepsilon^4 \\ +2(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2+2(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4-2\varrho^6 h^6 \\ -(\delta^4\varepsilon^4+\beta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2-2(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4+3\varrho^6 h^6] \\ [\varrho^2 h^4-\beta^4(h^2-C^2)][\beta^4\delta^4\varepsilon^4+(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2+(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4-\varrho^6 h^2]\end{array}\right\},$$

ou,

$$\left.\begin{array}{r}[\varrho^2 h^4+\beta^4(h^2-C^2)][\varrho^4 h^8+2\varrho^2 h^4\beta^4(h^2-C^2)+\beta^8(h^2-C^2)^2 \\ +2\beta^4\delta^4\varepsilon^4+(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2+\varrho^6 h^6] \\ [\varrho^2 h^4-\beta^4(h^2-C^2)][\beta^4\delta^4\varepsilon^4+(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2+(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4-\varrho^6 h^6]\end{array}\right\},$$

ou

$$\left.\begin{array}{r}\varrho^2 h^4[\varrho^4 h^8+2\varrho^2 h^4\beta^4(h^2-C^2)+\beta^8(h^2-C^2)^2+3\beta^4\delta^4\varepsilon^4+2(\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4)\varrho^2 h^2 \\ +(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4] \\ \beta^4(h^2-C^2)[\varrho^4 h^8+2\varrho^2 h^4\beta^4(h^2-C^2)+\beta^8(h^2-C^2)^2+\beta^4\delta^4\varepsilon^4-(\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)\varrho^4 h^4+2\varrho^6 h^6]\end{array}\right\},$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} -\varrho^2 h^4[\varrho^4 h^4(h^4+\varepsilon^4-\beta^4-\delta^4)+2\varrho^2 h^2(h^2\beta^4(h^2-C^2)+\beta^4\varepsilon^4+\delta^4\varepsilon^4-\beta^4\delta^4) \\ \qquad\qquad\qquad\

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. H. J. HAMBURGER** TE *Utrecht*

GETITELD:

„OVER DE REGELING DER BLOEDBESTANDDEELEN BIJ KUNSTMATIGE HYDRAEMISCHE PLETHORA, HYDRAEMIE EN ANHYDRAEMIE".

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1890.)

De verhandeling, onder dezen titel door Dr. HAMBURGER aan de Kon. Akad. van Wetenschappen ter opneming in de *Verslagen en Mededeelingen* aangeboden, vormt eene voortzetting van de onderzoekingen van denzelfden schrijver over de inwerking van zoutoplossingen op bloedlichaampjes, die reeds herhaalde malen door onze Akademie in haar tijdschrift zijn opgenomen. Zij onderscheidt zich van die vroegere studiën voornamelijk daardoor, dat thans de invloed der zoutoplossingen op het bloed en de bloedlichaampjes in levende dieren onderzocht wordt, terwijl vroeger hare werking op de uit het lichaam genomen bloedlichaampjes werd nagegaan.

In hoofdzaak worden de vroegere door den schrijver verkregen uitkomsten thans bevestigd, doch daarbij tevens aangewezen, welke verschillende inrichtingen het levend lichaam bezit, om de schadelijke werking van veranderingen in de osmotische spanning van het bloed te elimineeren.

Van verschillende kanten en op verschillend gebied blijkt in den laatsten tijd de juistheid van de stelling, dat, waar oplossingen op levende organismen, organen of cellen, niet door hare scheikundige eigenschappen, maar alleen door hare concentratie inwerken, deze invloed onafhankelijk is van den aard der opgeloste stof, en alleen bepaald wordt door de osmotische spanning der oplossing. Volgens dezen regel werken oplossingen op plantencellen en bloedlichaampjes, op de bewegingen van bacteriën en infusoriën, ja zelfs op de werkzaamheid van de traanklieren van den mensch.

Hetzelfde geldt nu ook, volgens de onderzoekingen, beschreven in de ons ter beoordeeling aangewezen verhandeling, van de reactiën, die het gevolg zijn van eene kunstmatige verandering van de samenstelling van het bloed. Dr. Hamburger bracht deze veranderingen ten eerste te weeg door injectie van zoutoplossingen in de bloedvaten van paarden en honden, en wel nu eens van zulke, die eene grootere osmotische spanning hadden dan die van het bloed (»hyperisotonische oplossingen"), dan weer van vochten met geringer aantrekking tot water (»hypisotonische oplossingen"). Ten tweede bereikte hij zijn doel door aftapping van belangrijke hoeveelheden bloed, en ten derde door injectie van pilocarpine en eserine, welke stoffen, door vermeerderde werkzaamheid van speekselklieren, nieren enz., de concentratie van het bloed aanzienlijk verhoogen.

Uit zijne proeven blijkt, dat de oorspronkelijke osmotische spanning van het bloed steeds zeer spoedig hersteld wordt; soms binnen weinige minuten, soms binnen enkele uren. Doch tevens, dat dit niet eenvoudig geschiedt door een herstel van de normale samenstelling van het bloed; deze laatste toch wordt eerst veel later bereikt. Aanvankelijk worden, naast een deel der ingespoten stof, ook bepaalde bestanddeelen van het bloed daaraan onttrokken. En welke bestanddeelen dit zijn, en in welke mate het geschiedt, wordt ons in tal van tabellen aangegeven.

Aan het herstel van de osmotische spanning van het bloed nemen aan de eene zijde de bloedlichaampjes, aan de andere zijde de nieren en de transsudatie van vocht door

de vaatwanden naar de organen des lichaams deel. De rol, die daarbij de bloedlichaampjes spelen, wordt in een afzonderlijk hoofdstuk nagegaan, en, in aansluiting aan de laatste, door onze Akademie gepubliceerde, verhandeling van den schrijver, in hoofdzaak verklaard uit eene, door hem aangenomene permeabiliteit dier lichaampjes voor opgeloste stoffen.

Het komt ons voor, dat de verhandeling van den Heer Dr. HAMBURGER eene belangrijke bijdrage levert tot onze kennis van de eigenschappen van het bloed en de bloedvaten, en dat zij tevens aan de nog zoo jonge leer van de osmotische spanningen van oplossingen en hare toepassing op de levensverschijnselen, eene zeer gewenschte uitbreiding geeft.

Op deze gronden hebben de ondergeteekenden de eer, aan de Afdeeling voor te stellen, de verhandeling van den Heer HAMBURGER op te nemen in de *Verslagen en Mededeelingen.*

Utrecht en *Amsterdam*, Maart 1890.

TH. W. ENGELMANN.
HUGO DE VRIES.

OVER DE REGELING DER BLOEDBESTANDDEELEN

BIJ

KUNSTMATIGE HYDRAEMISCHE PLETHORA, HYDRAEMIE EN ANHYDRAEMIE

DOOR

Dr. H. J. HAMBURGER.

INLEIDING.

In ons vorig opstel *) „Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes in verband met de isotonische coëfficienten" toonden wij aan:

1°. dat de bloedlichaampjes van het gedefibrineerde bloed voor zouten aanzienlijk permeabel zijn;

2°. dat na vermenging van gedefibrineerd bloed met isotonische, hyperisotonische en hypisotonische zout- en suikeroplossingen en met serum, dat vooraf met water verdund is, een uitwisseling van bestanddeelen plaats grijpt tusschen bloedlichaampjes en omgeving, en wel in zoodanige verhouding, dat de wateraantrekkende kracht van geen van beide hierdoor verandering ondergaat, m. a. w. in isotonische verhouding.

Wij hadden ons voorgesteld, na te gaan of die feiten ook voor het circuleerende bloed geldig waren.

---

*) *Verslagen en Mededeelingen* enz. 3e Reeks, Deel VII. p. 15.

In de eerste plaats wilden wij ons de vraag stellen: zijn de blooedlichaampjes van het circuleerende bloed voor zouten permeabel? Deze vraag was niet langs denzelfden zekeren weg te beantwoorden, als dit geschied was voor het gedefibrineerde bloed; immers, bij het laatste bevonden zich de vloeistoffen in een glazen vat met een impermeabelen wand, en een eenvoudige chloor-bepaling in het serum, vóór en na de toevoeging van eene bekende hoeveelheid eener chloorvrije zoutoplossing, was voldoende om uit te maken, of de bloedlichaampjes chloor hadden opgenomen of verloren. Van het bloedvaatstelsel — wij behoeven het niet te zeggen — zijn de wanden alles behalve impermeabel.

Hoever deze permeabiliteit gaat, kan o. a. blijken uit de proeven van Klikowicz *) en uit die van Dastre en Loye †). De eerste toonde aan, dat bij inspuiting van een aanzienlijke hoeveelheid eener geconcentreerde oplossing van Na_2SO_4 in de bloedbaan van honden, reeds na twee minuten de helft er uit verdwenen is. De beide andere onderzoekers lieten uren achtereen een stroom van Na Cl-oplossing van 0.75 pCt. door het vaatstelsel van een konijn gaan, zonder dat het dier schadelijke gevolgen er van ondervond, indien zij slechts zorgden, dat de snelheid van injectie, en verder drukking en temperatuur, goed geregeld waren.

Vóór alles wenschten wij daarom vast te stellen, in hoeverre, na injectie van hyper- en hypisotonische zoutoplossingen, de bloedlichaampjes in een veranderd medium zich bevonden.

Te dien einde bepaalden wij de quantiteit van eenige bestanddeelen van het plasma — of beter gezegd, van het serum — vóór en na de injectie. Al spoedig viel ons op, dat, terwijl van het geïnjicieerde zout een zekere hoeveelheid in het plasma was achtergebleven, andere stoffen in een verminderde quantiteit er in aanwezig waren. Zou het plasma — zoo dachten wij — een neiging hebben, om zijn

---

*) Du Bois-Reymond's *Archiv. Physiol.* Abth. 1886. S. 18.

†) *Archives de Physiologie* 1889, p. 283.

wateraantrekkend vermogen standvastig te houden, gelijk dit gebleken was bij de lichaampjes van het gedefibrineerde bloed het geval te zijn?

In het eerste hoofdstuk hebben wij onder »A. Hydraemische plethora" deze vraag beantwoord en, naar aanleiding van het antwoord, dezelfde vraag gesteld voor het bloedplasma bij kunstmatige Hydraemie (B) en bij kunstmatige Anhydraemie (C).

In het tweede hoofdstuk is de regeling van de bestanddeelen der bloedlichaampjes behandeld en wel: onder A, de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes van het circuleerende bloed en onder B: het wateraantrekkend vermogen der roode bloedlichaampjes bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie.

I. Regeling der bestanddeelen van het plasma.

A. *Hydraemische plethora.*

Verreweg de meeste proeven werden verricht bij het paard, slechts enkele bij den hond;

1°. omdat bij het paard groote quantiteiten voor de analysen kunnen gebruikt worden, wat natuurlijk aan de nauwkeurigheid der resultaten ten goede komt;

2°. omdat het vaak voorkomt, dat hondeserum, in weerwil van goede vooorzorgen, een roode tint heeft, wat ons bij paardeserum geen enkele maal is voorgekomen. Zooals later blijken zal, was rood gekleurd serum voor de meesten onzer proeven weinig geschikt.

Bij het paard werd bloed ontlast, door een vlijm in de V. jugularis te slaan, bij den hond door een canule in genoemde Vena te brengen. Het bloed werd opgevangen, gedefibrineerd en na filtratie door een coleerdoek in de centrifugaalmachine geplaatst. Na eenigen tijd kon het heldere, geelachtige serum afgezogen worden. Van een deel werd het wateraantrekkend vermogen bepaald door middel

van roode bloedlichaampjes, *) slechts twee malen door Tradescantia discolor †) (proef I en IV).

Indien het serum volkomen vrij van bloedkleurstof is, zal men de eerstgenoemde methode verre verkiezen boven de plasmolytische:

1°. omdat ze nauwkeuriger resultaten geeft. Verschillen in wateraantrekkend vermogen van 0.025 pCt. salpeterwaarde konden wij bij het serum gemakkelijk en zeker aantoonen; ja, zelfs verschillen van 0.025 pCt. Wij gebruikten voor iedere proef, met het oog op de beschikbare quantiteit slechts 5 cM.^{3} serum. Hadden we grootere hoeveelheden kunnen aanwenden; m. a. w., hadden we dikkere lagen kunnen onderzoeken, dan zouden we nog veel geringere verschillen hebben kunnen constateeren. Bij Tradescantia is men *beperkt* tot verschillen van 0.1 pCt. salpeterwaarde.

2°. omdat ze minder tijd kost en gemakkelijker is uit te voeren. De salpeterwaarden der Tradescantia-cellen, die zelfs dicht bij elkander zijn gelegen, verschillen vaak aanzienlijk §); het gebeurt soms dat de salpeterwaarde veel hooger of lager is, dan men had ondersteld, zoodat men genoodzaakt is, weer een geheel nieuwe reeks van proeven in te zetten.

Het chloor van het serum bepaalden wij in de eiwitvrije vloeistof door $AgNO_3$, KCNS en ferricyaankalium; het sulfaat, dat na de injectie in het serum was achtergebleven, eveneens in de van eiwitstoffen bevrijde vloeistof door $BaCl_2$ en HCl.

---

a. Injectie van hyperisotonische oplossingen.

Proef I

Bij een oud paard, wegende ongeveer 350 KG., wordt ongeveer $^3/_4$ Liter bloed uit een V. jugularis ontlast en vervolgens worden 5 Liter eener oplossing van Na_2SO_4

*) Du Bois Reymond's *Arch. f. Anat. u. Physiol.* Abth. 1886 p. 39.
†) Zie *Maandbl. v. Natuurwetensch.* 1889, p. 74.
§) Ibid. p. 74.

van 5 pCt. (11, 13 Gr. kristallen van $Na_2 SO_4 + 7$ aq op 100 vloeistof) in de andere V. jugularis gegoten; 10 minuten, 30 minuten, 1 uur, $1^1/_2$, 2, 4, 24 en 44 uren na de infusie worden telkens $^3/_4$ Liter uit de eerstbedoelde halsader ontlast.

Het blijkt, dat van het bloed, dat vóór de infusie is ontlast, 5 cM.^{3} serum met 0,25 cM.^{3} water verdund, geen, en met 0.75 cM.^{3} water verdund, plasmolyse van bijna alle Tradescantia-cellen heeft teweeg gebracht en verder, dat in de cellen, gelegen in de onmiddellijke nabijheid van de zooeven bedoelde, een KNO_3 oplossing van 1.4 pCt. geen plasmolyse en eene van 1.5 pCt. plasmolyse van bijna alle cellen heeft veroorzaakt; dus 5 cM.^{3} serum + 0.5 cM.^{3} water staan in isotonische waarde gelijk met een KNO_3 oplossing van 1.45 pCt., dus het serum als zoodanig met een KNO_3 oplossing van 1.6 pCt.

Door dezelfde methode van onderzoek blijkt, dat het serum, behoorende bij het bloed, dat ontlast is:

10	min.	na	de	infusie,	een	salpeterwaarde	heeft	van		1.68	pCt.
33	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1.6	»
1	uur	»	»	»	»	»	»	»	»	1.55	»
$1^1/_2$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1.6	»
2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1.5	»
24	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1.6	»
44	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1.6	»

Men ziet hieruit, dat 10 minuten na de infusie het wateraantrekkend vermogen van het serum slechts een weinig hooger is, dan vóór de infusie. $^1/_2$ uur na de infusie blijkt het tot den norm te zijn teruggekeerd. Dit resultaat is inderdaad verrassend, wanneer men berekend heeft, hoe groot het wateraantrekkend vermogen van het plasma zou geworden zijn, indien het vaststelsel een systeem ware met met volkomen impermeabelen wand.

Het paard weegt ongeveer 350 KG., dus bevat hoogstens $\frac{350 \times 8}{100} = 28$ KG. bloed, waarvan ongeveer $28 \times \frac{2}{3} = 18.7$ KG.

dus ± 18 Liter serum. Het serum is isotonisch met KNO_3 van 1.6 pCt. Daar nu de geïnfundeerde Na_2SO_4-oplossing isotonisch is met een KNO_3 oplossing van 4.74 pCt. en er 5 L. zijn α ingespoten, zou het plasma in wateraantrekkend vermogen hebben moeten overeenkomen met een K. N. O_3 solutie van $\frac{18 \times 1.5 + 5 \times 4.74}{18 + 5} = 2.29$ pCt. indien de bloedlichaampjes en de wanden van het bloedvaatstelsel volkomen impermeabel waren.

Vanwaar nu dat spoedig herstel van het oorspronkelijke wateraantrekkend vermogen van het serum? Zou al het Na_2SO_4, reeds 30 minuten na de infusie, de bloedbaan verlaten hebben?

Een blik op de volgende tabel leert dat dit niet het geval is:

TABEL I.

Injectie van 5 liter Na_2SO_4-oplossing van 5 pCt. in de V. jugularis van een paard.

Tijd van ontlasting.	Gram Na_2SO_4 in 100 serum.	Salpeterwaarde van het gevonden Na_2SO_4.
Vóór de injectie	sporen	—
10 minuten na de injectie.	0.310	0.293
30 » » »	0.119	0.113
1 uur » »	0.060	0.057
$1^1/_2$ » » »	0.042	0.040
2 » » »	0.032	0.03
24 » » »	sporen	—
44 » » »	sporen	—

Wij zien, dat bijv. 10 minuten na de injectie, het gehalte aan Na_2SO_4 nog 0.31 pCt. bedraagt, wat in wateraantrek-

kend vermogen overeenkomt met een KNO_3-oplossing van 0.293 pCt. Bedenkt men nu, dat, blijkens de proeven met Tradescantia, 10 minuten na de injectie het wateraantrekkend vermogen slechts met 0.68 — 0.6 = 0.08 verhoogd is en dat verschillen in salpeterwaarde van 0.1 pCt door bedoelde methode kunnen worden aangetoond, dan moet het percentgehalte van andere stoffen in het serum gedaald zijn, welke daling, overeenkomt met een salpeterwaarde van 0.293 — 0.08 = 0.213.

Kan hiervoor het Na Cl aansprakelijk gesteld worden?

Zooals uit de volgende tabel (II) blijkt, slechts voor een klein deel.

TABEL II.

Tijd van ontlasting.	cM³ $\frac{1}{10}$ n. $AgNO_3$-opl. overeenkomende met het chloor in 100 cM serum.	Salpeterwaarde van het Na Cl, overeenkomende met het chloor, gevonden in de vorige kolom.	Daling der salpeterwaarde, veroorzaakt door het Na Cl.
Vóór de injectie . .	99.48	0.995	
10 min. na de injectie.	92.48	0.925	0.07
30 » » »	94.76	0.947	0.047
1 uur » »	96.72	0.967	0.027
$1^1/_2$ » » »			
2 » » »	98.02	0.980	0.014

Uit deze tabel blijkt, dat 10 minuten na de injectie, het Na Cl-gehalte van het serum verminderd is met een salpeterwaarde van 0.07 Er moeten dus ook nog andere bestanddeelen van het serum in gehalte verminderd zijn, welke vermindering een salpeterwaarde vertegenwoordig van 0.213—0.07 = 0.143.

Welke kunnen nu deze bestanddeelen zijn? Om dit na te

gaan, laten wij een analyse van paardeserum volgen en schrijven achter ieder bestanddeel de salpeterwaarde. Wij berekenen deze naar de formule:

$$\frac{1}{3} \times 100 \times \frac{\text{procentgehalte} \times \text{isotonische coëfficient}^{*)}}{\text{molecul.gewicht}}.$$

TABEL III.

Bestanddeelen.	Gewichtsdeelen in 100 cM³ serum.	Salpeterwaarde der in de vorige kolom bedoelde bestanddeelen.
K_2O	0.027	0.0192
Na_2O	0.443	0.476
CaO	—	0
MgO	—	0
Cl	0.375	0.7042
P_2O_5	0.0152	0.01427
CO_2	0.0985	0.15

Uit deze tabel blijkt, dat Ca O en Mg O niet bepaald zijn; dit doet hier niets ter zake; want zij hebben toch een isot. coëff. O. Verder ziet men, dat een eventueele vermindering van procentgehalte aan P_2O_5, het getal 0.143 niet kan verklaren, zelfs al verliet het P_2O_5 het plasma geheel; wat echter niet aan te nemen is, daar de lymphe een ongeveer gelijke hoeveelheid P_2O_5 bezit als het bloedvocht en ook de bloedlichaampjes een aanzienlijke hoeveelheid P_2O_5 bevatten. Of het P_2O_5 ook in den vorm van zouten, dan wel, naar Sertoli en anderen uitsluitend

*) Zie omtrent de afleiding dezer formule, Hugo de Vries, Pringsheims *Jahrb.* enz. Bd. XIV, Heft 4, S. 536.

als lecethine in het serum voorkomt, doet hier weinig ter zake.

De druivesuiker vertegenwoordigt een salpeterwaarde, die geheel te verwaarloozen is.

Het CO_2 is naar de algemeen heerschende opvatting geheel in gebonden toestand aanwezig *); van daar, dat wij voor de berekening der salpeterwaarde den isot. coëfficiert 2 hebben durven gebruiken. De procentische vermindering van het CO_2-gehalte, indien deze aanwezig is, zal wel een deel van het getal 0.143 kunnen verklaren, doch niet het geheele, daar de lymph toch ook een niet onaanzienlijke hoeveelheid CO_2 bevat.

Het CO_2 gehalte van het serum is berekend uit het gemiddelde van 8 analysen van FRÉDÉRICQ †).

Telt men nu de partieele salpeterwaarden (laatste kolom) samen, dan krijgt men 1.36, een getal, dat beslist veel kleiner is, dan hetgeen wij bij onze proeven ooit hebben gevonden. In den regel schommelde het om 1.7.

Bij de bepaling van de partieele salpeterwaarden der melk, zagen we iets dergelijks; daar bedroeg de som der partieele salpeterwaarden van de zouten en de melksuiker 1.116, terwijl de totale wateraantrekkende kracht der melk 1.9 bedroeg. Zouden misschien de eiwitstoffen in beide gevallen voor deze verschillen moeten aansprakelijk worden gesteld?

Om deze vraag op te lossen, stelden we ons voor, de salpeterwaarde van het serum te bepalen, nadat de eiwitstoffen er uit waren verwijderd.

Het laatste kon op twee wijzen geschieden nl. 1°. door het serum te verbranden, 2°. door verwarming en toevoeging van verdund zuur. Echter wijkt de asch te zeer in samenstelling van de in het serum aanwezige zouten af, dan dat wij de eerste methode anders dan langs omwegen met vrucht zouden kunnen toepassen. Beter konden we gebruik maken van de tweede methode.

---

*) Verg. ZUNTZ in HERMANN's *Handb. der Physiol.* B. IV. Th. II. S. 80.

†) LÉON FRÉDÉRICQ. *Recherches sur la constitution du plasma sanguin.* Gand. 1878.

50 cM^3 serum werden verdund met 300 cM^3 water en het mengsel in een kolf verwarmd; dan voegden we eenige droppels verdund azijnzuur toe, sloten de kolf, lieten deze onder de waterleiding afkoelen, filtreerden en dampten 300 cM^3 van het heldere filtraat op een waterbad tot droog toe in, teneinde het vrije azijnzuur te verdrijven. Het residu werd dan met een weinig water uit het schaaltje verwijderd en de vloeistof tot $\frac{300}{350} \times 50 = 42.88$ cM^3 met water verdund. Wij hadden hier dus, afgezien van het verdreven CO_2, eiwitvrij serum, waarin de concentratie der zouten niet, of althans uiterst weinig afweek van die van het oorspronkelijke serum. Van deze eiwitvrije vloeistof nu, bepaalden wij het wateraantrekkend vermogen en tegelijkertijd nog eens van het oorspronkelijke serum, door 5 cM^3 te vermengen met 2.75, 3, 3.25 en 3.5 cM^3 water en bij de mengsels een paar droppels gedefibrineerd bloed te voegen. Het bleek, dat zoowel in het oorspronkelijke serum als in het eiwitvrije een begin van kleurstofuittreden te bespeuren was in het mengsel van 5 cM^3 vloeistof en 3.25 water en dat bij verdunning met 3 cM^3 water hoegenaamd geen haemoglobine-uittreding was waar te nemen.

Men zou allicht geneigd zijn, uit het verkregen resultaat (dat nl. het eiwitvrije serum een gelijke salpeterwaarde bezit als het eiwithoudende) te besluiten dat het eiwit aan het wateraantrekkend vermogen van het serum geen deel heeft. Een eenvoudige proef echter leert, dat dit niet het geval kan zijn. Het blijkt toch, dat bij toevoeging van verdund zuur bij het serum, een zekere hoeveelheid van het eerste wordt gebruikt en wel voor twee doeleinden; 1°. voor de omzetting van het Na_2CO_3 en $NaHCO_3$ in het zout, overeenkomende met het zuur, dat toegevoegd is, 2° voor de binding van het alkali van het albuminaat.

Er treedt dus zuur in de vloeistof: maar waarom is dan het wateraantrekkend vermogen niet verhoogd? Voor de carbonaten is dit niet moeielijk te begrijpen, daar het nieuwe zuur het uitgedreven CO_2 vervangt; maar voor het eiwit? Hier moet men wel aannemen, dat het thans neer-

geslagen eiwit, of een deel er van, dat in opgelosten toestand nog de functie van zuur uitoefende, (in paraglobuline) een wateraantrekkend vermogen bezat, overeenkomende met het zuur, dat in de plaats er van trad.

Een voorbeeld zal het bovenstaande duidelijker maken, en spoedig zal dan ook blijken, dat de zaak niet zóó eenvoudig is, als zooeven werd voorgesteld.

Bij 50 cM^3 serum worden 300 cM^3 water gevoegd, het mengsel wordt verwarmd en vervolgens 6 cM^3 azijnzuur toegevoegd, waarvan 10 cM^3 overeenkomen met 47.75 $\frac{1}{10}$ n. KOH. Bij titratie met behulp van het phenolphtaleine blijkt, dat 200 cM^3 van het heldere filtraat 4 cM^3 $\frac{1}{10}$ n. KOH ter verzadiging noodig hebben. 350 cM^3 zouden dus $\frac{350}{200} \times 4 = 7$ cM^3 $\frac{1}{10}$ n. KOH vereischen. Er zijn derhalve verbruikt $\frac{6 \times 47.75}{10} - 7 = 21.65$ cM^3 $\frac{1}{10}$ n. azijnzuur.

Wij hebben deze proef nog eens met zuringzuur en ook met H_2SO_4 herhaald, omdat men bij het gebruik van azijnzuur, de vloeistof niet verwarmen kan (om al het CO_2 uit te drijven), wil men geen gevaar loopen, ook eenig azijnzuur te doen ontwijken. De uitdrijving van al het CO_2 is noodig, omdat phenolphtaleine ook voor dit zuur gevoelig is; m. a. w. door het achterblijvende CO_2 zou het zuurgehalte te hoog gevonden worden.

Het bleek, dat voor 50 cM^3 serum verbruikt waren 22.5 cM^3. $\frac{1}{10}$ n. zuringzuur en 22.9 cM^3 $\frac{1}{10}$ n. H_2SO_4, cijfers, die van het getal 21.65, voor het azijnzuur gevonden, weinig afwijken.

Nu de vraag, welk deel van het zooeven gevonden volume $\frac{1}{10}$ n. zuur heeft gediend om het Na_2CO_3 te ontleden.

Om dit na te gaan, voegden wij bij 50 cM^3 serum 300 cM^3

eener verzadigde oplossing van $(NH_4)_2SO_4$. Hierdoor worden de eiwitstoffen reeds zonder verwarming neergeslagen. Verwarming scheen hier dan ook niet gewenscht; verscheiden onderzoekers toch hebben reeds gewezen op het feit, dat het gehalte aan vrij alkali in eiwitachtige vloeistoffen bij verwarming stijgt. Intusschen is ons gebleken, dat dit in niet zoo aanzienlijke mate het geval is, dat het op onze resultaten een merkbaren invloed zou kunnen uitoefenen.

Na vermenging van 50 cM^3 serum met 300 cM^3 der $(NH_4)_2SO_4$-oplossing dan, werd gefiltreerd en bij 100 cM. van het filtraat 12 cM^3 $^1/_5$ n. H_2SO_4 gevoegd; dan werd gekookt, om het CO_2 uit te drijven en eindelijk de overmaat van H_2SO_4 door KOH en lakmoes getitreerd (phenolphtaleïne is bij aanwezigheid van ammoniumzouten helaas niet bruikbaar).

Het bleek, dat de alkalizouten van 50 cM^3 serum overeenstemden met 6.1 cM^3 $^1/_{10}$ n. zuur.

Wij hebben deze proef herhaald en in de plaats van $(NH_4)_2SO_4$ een verzadigde oplossing van Na_2SO_4 gebruikt. Dit mengsel werd verwarmd. Bij titratie met behulp van phenolphtaleïne bleken thans de alkalizouten van 50 cM^3 serum overeen te stemmen met 6.2 cM^3 $\frac{1}{10}$ n. zuur; d. i. berekend op 100 cM^3 serum, 33.3 cM^3 $^1/_{10}$ norm. azijnzuur. Deze vertegenwoordigen een salpeterwaarde van $\frac{33.3}{150} = 0.221$ pCt.

In weerwil nu, dat een betrekkelijk zoo groot azijnzuurgehalte aan de sereuse vloeistof is toegevoegd, heeft ze toch haar oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen behouden. Is dan misschien door inwerking van het azijnzuur op het Na_2CO_3 en $NaHCO_3$, het wateraantrekkend vermogen der vloeistof met 0.221 pCt. in salpeterwaarde gedaald? Bestudeert men de vergelijking, die de ontleding van Na_2CO_3 door azijnzuur voorstelt en plaatst men onder de formules de bijbehoorende isotonische coëfficienten:

$$\underset{4}{Na_2CO_3} + \underset{(2\times 2)}{2(CH_3COOH)} = \underset{2\times 3}{2(CH_3COONa)} + \underset{+(2)}{CO_2} + H_2O$$

dan ziet men, dat door toevoeging van azijnzuur bij Na_2CO_3 de isotonische coëfficient stijgt van 4 tot 6 wegens de vorming van natriumacetaat.

Bestudeert men de omzetting van $NaHCO_3$ op dezelfde wijze:

$$\underset{3}{Na_2HCO_3} + \underset{(2)}{CH_3COOH} = \underset{3}{CH_3COONa} + \underset{(2)}{CO_2} + H_2O$$

dan ziet men, dat het wateraantrekkend vermogen na inwerking van azijnzuur niet veranderd is; $NaHCO_3$ en CH_3COONa hebben immers denzelfden isotonischen coëfficient.

Uit geen van beide vergelijkingen volgt dus een daling van het wateraantrekkend vermogen; uit de eerste zelfs een rijzing. Deze zal echter een geringe salpeterwaarde vertegenwoordigen; immers het gezamenlijk bedrag aan Na_2CO_3 en $NaHCO_3$ in 100 cM^3 serum beantwoordt aan 12.2 cM^3 $^1/_{10}$ n. alkali (isotonisch met een salpeteroplossing van 0.0407 pCt. Daarvan komt een fractie toe aan het Na_2CO_3 en van deze fractie moet weer een deel worden genomen, om de rijzing in salpeterwaarde uit te drukken, die het gevolg is van de omzetting van Na_2CO_3 en CH_3COONa.

Wij komen weer terug op de vraag: hoe moet men verklaren, dat in weerwil van het intreden van een aanzienlijke hoeveelheid azijnzuur in de sereuse vloeistof, het wateraantrekkend vermogen onveranderd is gebleven?

Men kan niet anders aannemen, dan dat het eiwit, dat door verwarming en toevoeging van azijnzuur is neergeslagen, vroeger toen het nog met de basis tot albuminaat verbonden was, een wateraantrekkend vermogen van 0.221 pCt. KNO_3 vertegenwoordigde.

Het verhield zich toen als zuur en moest ook den coëfficient 2 bezeten hebben.

Stellen wij gemakshalve het molecule albumine voor door HA, dan vindt men, indien het alkalimetaal Na is:

$$\underset{3}{NaA} + \underset{(2)}{CH_3COOH} = \underset{3}{CH_3COONa} + \underset{(2)}{HA}$$

De ontleding van het albuminaat (coëff. 3) en de vorming van natriumacetaat (coëff. 3) brengen dus geen verandering in wateraantrekkend vermogen te weeg.

Deze redeneering kunnen we controleeren, door de eiwitstoffen niet met azijnzuur, maar met zuringzuur neer te slaan:

$$2\,(\mathrm{Na}\,A) + \begin{matrix}\mathrm{COOH}\\ |\\ \mathrm{COOH}\end{matrix} = \begin{matrix}\mathrm{COONa}\\ |\\ \mathrm{COONa}\end{matrix} + 2\,(\mathrm{H}\,A)$$

$$2 \times 3 + (2) = 4 + (2 \times 2)$$

Hier ziet men den coëfficient van $2 + 3$ dalen tot 4. Voegt men dus bij de albuminaathoudende vloeistof, zuringzuur, dan zal het wateraantrekkend vermogen der vloeistof dalen.

Door proeven met paarde- en varkensserum en met melk, hebben wij ons hiervan met volkomen zekerheid kunnen overtuigen. Wij kiezen tot voorbeeld een proef met varkensserum.

Het was verkregen uit den bloedkoek.

a. Een begin van kleurstofuittreden uit de bloedlichaampjes van het gedefibrineerde bloed werd veroorzaakt door een KNO_3-oplossing van 1.15 pCt.

b. Een mengsel van 5 cM_3 serum en 3.75 water bracht hetzelfde te weeg; dus het serum stond in wateraantrekkend vermogen gelijk met een KNO_3-oplossing van $\frac{5 + 3.75}{5} \times 1.15 = 2.01$ pCt.

c. Een mengsel van 50 cM^3 serum en 350 cM^3 water werd verwarmd in een waterbad, daarna werden onder flink omschudden 14 cM^3 $^1/_5$ n. zuringzuur toegevoegd; dan werd gefiltreerd en in 40 cM^3 het zuurgehalte bepaald (phenolphtaleïne). Dit kwam overeen met 0.3 cM^3 $^1/_{10}$ n. KOH.

d. Van de rest van het filtraat maten we $414 \times \frac{40}{50} = 331$ cM^3 af en verzadigden het daarin aanwezige vrije zuur met $\frac{331}{40} \times 0.3 = 2.48$ cM^3 $\frac{1}{10}$ n. KOH. Nu werd de vloeistof ingedampt tot 20 cM^3 ongeveer, in een maatfleschje gebracht

en tot 40 cM^3 met water aangevuld. Wij hadden dus, als het ware, eiwitvrij serum verkregen, natuurlijk vermengd met eenig oxalaat. Van deze vloeistof werden 5 cM^3 vermengd met 2 75, 3, 3.25, 3.5, en 3.75 cM^3 water en de mengsels met 3 droppels gedefibrineerd bloed. Tot contrôle werd bij dergelijke proeven ook steeds de oorspronkelijke vloeistof (dus zonder verdunning met water) met 3 droppels bloed ingezet. Het bleek nu, dat een eerste spoor van kleurstofuittreden zichtbaar werd in het mengsel van 5 serum + 3 water. De oorspronkelijke vloeistof kwam dus in wateraantrekkend vermogen overeen met een KNO_3-oplossing van 1.86 pCt.

Hiervan moet een deel op rekening worden gesteld van de overgebleven 2.48 cM^3 $^1/_{10}$ n. zuringzuur en de ter verzadiging hiervan toegevoegde 2.48 cM^3 $^1/_{10}$ n. KOH. Om de salpeterwaarde van beiden te berekenen, volgen we de eenvoudige praktische methode van De Vries *).

In 40 cM^3 vloeistof zijn voorhanden 2.48 cM^3 $^1/_{10}$ n. KOH, dus in 10 cM^3 $\frac{2.48}{4} = 0.62$. Deze zijn isotonisch met een KNO_3-oplossing van $\frac{0.62}{30} = 0.02066$ pCt. Ook het zuringzuur komt hiermede overeen; dus het toegevoegde kaliumoxalaat met een KNO_3-oplossing van 0.04132 pCt.

Hadden we nu de juiste hoeveelheid zuringzuur toegevoegd en hadden wij dus niet behoeven te verzadigen met KOH, dan zou de salpeterwaarde van het eiwitvrije serum hebben bedragen $1.86 - 0.04 = 1.82$, terwijl het oorspronkelijke eiwithoudende serum een salpeterwaarde bezat van 2.01. Dit stemt met onze uiteenzetting op p. 376 en 377 volkomen overeen.

e. Een mengsel van 50 cM^3 van het serum en 350 cM^3 water wordt verwarmd; daarna worden 6 cM^3 azijnzuur toegevoegd (10 cM^3 van dit azijnzuur $= 47.75$ $^1/_{10}$ n. KOH),

---

*) Eene Methode zin Analyse der Turgorkraft. Pringsheim's *Jaarb.* B. XIV. Heft. 4. S. 565.

de kolf wordt gesloten en afgekoeld. Van het heldere, eenigszins zure filtraat, dampen we $406 \times \frac{40}{50} = 325$ cM³ tot droogwordens in, om het vrije azijnzuur te verdrijven en vervolgens lossen we het residu, onder de noodige voorzorgen, zooveel mogelijk op (een volkomen heldere oplossing krijgt men niet, wegens de sporen eiwit, die in het waterheldere filtraat toch nog aanwezig zijn) en vullen de oplossing tot 40 cM³ met water aan. Het blijkt nu, *dat in een mengsel van* 5 cM³ *van deze vloeistof met* 3.75 cM³ *water een begin van kleurstofuittreden heeft plaats gehad; zooals wij dit ook bij het oorspronkelijke serum hadden waargenomen.*

Voor zoover de eiwitstoffen hier als albuminaten voorkomen, mag men uit het bovenstaande veilig besluiten, dat het als éénbasisch zuur optreedt.

Hoe dit zij, met zekerheid mogen wij uit de voorgaande proeven opmaken, *dat het eiwit een aandeel heeft in het totale wateraantrekkend vermogen van het serum.* Om de grootte van dit aandeel te bepalen, nemen we het gemiddelde van vier proeven met verschillend serum. De volgende tabel geeft van deze een overzicht.

TABEL IV.

Bepaling van de salpeterwaarde van het eiwit in serum.

Gram eiwit in 100 serum.	Salpeterwaarde van het eiwit in 100 serum.
7.452	0.24
7.250	0.21
7.338	0.21
7.784	0.22

Het gemiddelde eiwitgehalte van 100 serum, naar vier proeven berekend, bedraagt 7.45 en de gemiddelde salpeterwaarde 0.22 pCt.

Indien men de eiwitstoffen van het serum, na scheiding, in kristalvorm kon brengen, wat naar de proeven van HOFMEISTER *) mogelijk schijnt, zou men in de eerste plaats kunnen berekenen, welk aandeel de paraglobuline en het serumalbumine ieder voor zich aan het totale wateraantrekkend vermogen der eiwitstoffen heeft en in de tweede plaats ook de moleculairformule van het eiwit kunnen vaststellen.

Om een denkbeeld over dit vraagstuk te krijgen, stellen we eens voor een oogenblik, dat het moleculairgewicht der verschillende eiwitstoffen van het serum hetzelfde is en gelijk x, dan vindt men het moleculairgewicht op de volgende wijze: daar een oplossing van 7.45 pCt. een wateraantrekkend vermogen bezit, dat overeenkomt met een KNO_3-oplossing van 0.22 pCt. en de isotomische coëfficient $= 2$ gesteld mag worden, zal een oplossing van $7.45 \times \frac{1}{0.22}$ pCt., isotonisch zijn met een KNO_3-oplossing van 1 pCt., zoodat

$$x \times \frac{3}{2} = 7.45 \times \frac{1}{0.22} \times 101$$

dus

$$x = 2195.$$

Keeren wij thans terug tot onze eerste beschouwingen over het wateraantrekkend vermogen van het serum na injectie van de Na_2SO_4-oplossing en merken weer op, dat in weerwil van de aanzienlijke hoeveelheid Na_2SO_4, die 10 minuten na de injectie in het serum nog aanwezig was, het wateraantrekkend vermogen van het laatste, ten opzichte van dat van het oorspronkelijke serum slechts een geringe verhooging heeft ondergaan en overwegen wij, dat dit slechts voor een klein deel kon toegeschreven worden aan de vermindering van het chloorgehalte, dan hebben wij thans, in verband met de voorgaande onderzoekingen het recht, te vermoeden, dat niet alleen de carbonaten, maar *ook* en *vooral het eiwit een aandeel heeft in de regeling van het wateraantrekkend vermogen van het plasma.*

---

*) *Zeitschr. f. physiol. chemie.* 1889. B. XIV. H. 2, S. 165.

Ten einde hieromtrent meer zekerheid te verkrijgen en verder de overige resultaten van proef I te contrôleeren, werd een tweede injectie-proef verricht.

Proef II.

Bij een klein paard, wegende ongeveer 300 KG. werd $^3/_4$ liter bloed ontlast. Het door centrifugeeren van het gedefibrineerde bloed verkregen serum, bleek een salpeterwaarde te bezitten van 1.65 pCt. Deze bepaling geschiedde, evenals de overige bepalingen der wateraantrekkende kracht, (behalve bij proef IV) door middel van roode bloedlichaampjes.

Na de genoemde ontlasting van $^3/_4$ liter werden 7 liter eener lauwwarme-oplossing van 5 pCt, geïnjicieerd. Het paard woog 300 KG., bevatte dus 21 KG. bloed en derhalve ongeveer 14 liter serum. Waren de bloedlichaampjes volkomen impermeabel en vormden de bloedvaten een volkomen impermeabel systeem, dan moest het wateraantrekkend vermogen van het plasma gelijk geworden zijn aan dat van een KNO_3-oplossing van $\frac{14 \times 1.65 + 7 \times 4.74}{21} = 2.68$ pCt.

10 minuten na afloop der injectie, die zelf 10 minuten duurde, werd $^3/_4$ liter bloed ontlast en gedefibrineerd. Van het heldere gele serum werden 5 cM^3 verdund met 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4 en 4.25 cM^3 water; bij de mengsels werd gedefibrineerd bloed gevoegd. In het mengsel van 5 cM^3 serum + 3.5 cM^3 water was geen en in dat van 5 cM^3 serum 3.75 cM^3 water was wel eenige kleurstof uit de lichaampjes getreden; daar dit ook het geval was, resp. bij Na Cl-oplossingen van 0.60 pCt. en 0.58 pCt., was het serum isotonisch met KNO_3 van

$$\frac{5 + 3.625}{5} \times 0.59 \times \frac{101}{58.5} = 1.75 \text{ pCt.}$$

Op dezelfde wijze en met behulp van hetzelfde gedefibri-

neerde bloed werd de salpeterwaarde bepaald van het serum, dat verkregen was uit het bloed, dat $^1/_2$, en 2 uur na de injectie was onlast· Van het voorlaatst bedoelde serum ($^1/_2$ uur na de injectie) moesten 5 cM^3 met 3.5, en van het laatst bedoelde (2 uur na de injectie) met 3.25 cM^3 water verdund worden, om een begin van kleurstof uittreden te veroorzaken; zoodat de salpeterwaarde van het serum

Vóór		de	injectie	bedroeg	1.65	pCt.
10 min.	na	»	»	»	1.75	»
$^1/_2$ uur	»	»	»	»	1.7	»
2 »	»	»	»	»	1.65	»

Men ziet, dat 10 minuten na de injectie reeds, het wateraantrekkend vermogen van het plasma zich op 0.1 pCt. salpeterwaarde na, geheel heeft hersteld en wel van een verhooging van 2.68—1.65 = 1.03.

Wij willen nagaan op welke wijze dit is geschied.

Bij 100 cM^3 serum van iedere ontlasting werden 750 cM^3 water gevoegd, het mengsel verwarmd in een kolf, die bijna geheel gesloten was en dan 12 cM^3 azijnzuur toegevoegd (waarvan 10 cc. = 47.75 cM^3 $^1/_{10}$ n. KOH). Na koking en afkoeling werd gefiltreerd. Het filtraat was steeds volkomen helder. Het neergeslagen eiwit werd uitgewasschen met water, alcohol en aether, gedroogd en gewogen. In het heldere filtraat werden de sulfaten en chloriden bepaald naar de vroeger genoemde methoden.

Wat nu de bepaling der eiwitstoffen betreft, deze leidde tot de uitkomst, dat het gehalte kort na de injectie aanzienlijk lager was geworden dan in het oorspronkelijke serum, om zich betrekkelijk spoedig te herstellen en zelfs boven het oorspronkelijke te stijgen. De volgende tabel geeft de resultaten:

TABEL V.

	Gram eiwit in 100 cM³ serum.	Vermindering van het eiwitgehalte in percenten.
Vóór de injectie . . .	7.452	
10 min. na de injectie	5.954	20.1
30 » » »	7.054	5.3
2 uur » »	7.824	— 5 (dus vermeerdering)

Met behulp van de gemiddelde salpeterwaarde, die wij voor een eiwitoplossing van 7.45 pCt. vonden (zie tabel IV, p 379), kunnen we berekenen, hoe groot de wateraantrekkende kracht is, die met het eiwitgehalte der vier ontlastingen, bedoeld in tabel V, overeenkomt. Zekerheidshalve hebben wij de salpeterwaarde ook nog eens afzonderlijk bepaald, en wel, door van het gezamenlijk wateraantrekkend vermogen van eiwitstoffen en CO_2, dat van het CO_2 af te trekken.

Het eerste (bepaling van eiwitstoffen + CO_2) geschiedde door toevoeging van $^1/_5$ n. zuringzuur, en titratie van de geringe overmaat, nadat het CO_2 was verdreven. Het tweede (CO_2) geschiedde, na verwijdering der eiwitstoffen door een gesatureerde oplossing van Na_2SO_4, door toevoeging van een geringe overmaat van $^1/_{10}$ n. H_2SO_4 en titratie van de overmaat.

In tabel VI vindt men een overzicht der resultaten.

Kolom II geeft het eiwitgehalte aan (zie ook tabel V); in kolom III vindt men het aantal cM³ $^1/_{10}$ norm. zuringzuur, verbruikt bij de praecipitatie van het eiwit en voor de uitdrijving van het CO_2; in kolom IV het aantal cM³ $^1/_{10}$ n. H_2SO_4, verbruikt tot uitdrijving van het CO_2 der carbonaten. Kolom V bevat de salpeterwaarden der carbonaten, die beantwoorden aan de in kolom IV gevonden getallen; hierbij is willekeurig aangenomen, dat de carbonaten bestaan: voor de eene helft uit Na_2CO_3 en voor de andere helft uit $NaHCO_3$. In kolom VI vindt men de salpeterwaarde

van het eiwit. Deze waarde is berekend door de overeenkomstige getallen van kolom III met die van kolom IV te verminderen en de verschillen door 150 te deelen. Kolom VII eindelijk, vertegenwoordigt, evenals kolom VI, de salpeterwaarden van het eiwit, maar deze salpeterwaarden zijn berekend uit kolom II, met behulp van de op p. 379 (tab. IV) gevonden gemiddelde salpeterwaarden eener eiwitoplossing van 7.45 pCt.

TABEL VI.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VI
Tijd van ontlasting.	Gr. eiwit in 100 cM serum.	cM³ $^1/_{10}$ n. zuringzuur, verbruikt voor het eiwit en het CO_2.	cM³ $^1/_{10}$ n. H_2SO_4, verbruikt voor het CO_2.	Salpeterwaarde der carbonaten, overeenkomende met de in kolom IV gevonden cijfers.	Salpeterwaarden van het eiwit, berekend uit de verschillen van kolom III en IV.	Salpete den v eiwit, kend kolom vroeger gevens tabel
Vóór de injectie. . .	7.452	47.2	11.2	0.074	0.24	0.2
10 min. na de injectie	5.954	37.9	10.4	0.068	0.183	0.1
30 „ „ „	7.054	44.8	10.8	0.072	0.20	0.2
2 uur „ „	7.824	49	10.9	0.072	0.254	0.2

Uit deze tabel ziet men, dat de cijfers van kolom VI en VII goed met elkaar overeenstemmen; verder merkt men op, dat het serum, 10 minuten na de injectie ontlast, een vermindering in salpeterwaarde aantoont door daling van carbonaatgehalte, en wel van 0.003 (kol. V) en tevens door daling van het eiwitgehalte van 0.05 ongeveer.

30 minuten na de injectie blijkt de vermindering der salpeterwaarden, zoowel door carbonaten als door eiwitstof, geringer, en 2 uur na de injectie is door het eiwit zelfs een vermeerdering ingetreden.

In de volgende tabel vatten wij de uitkomsten der sulfaat- en chloride-bepalingen samen en voegen nog hier aan toe de hoofdresultaten van tabel VI. Men kan dan zien, hoe de verschillende stoffen samenwerken, om het wateraantrekkend vermogen van het plasma te regelen.

TABEL VII.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Tijd van ontlasting.	cM^3 $^1/_1$ n. $AgNO_3$, overeenkomende met het chloor van 100 cM^3 serum.	Salpeterwaarden van het met kolom II overeenkomende Na Cl.	Salpeterwaarden der eiwitstoffen (gemiddelden tusschen de getallen van kolom VI en VII der vorige tabel (VI).	Salpeterwaarden der carbonaten (kolom V van tabel VI).	Gram Na_2SO_4 in 100 serum.	Vermeerdering der salpeterwaarde, door het Na_2SO_4 teweeggebracht.	Werkelijke vermeerdering der salpeterwaarde van het plasma na de injectie (zie p. 392).	Vermindering der salpeterwaarde, door het Na Cl teweeggebracht (zie kol III).	Vermindering der salpeterwaarde, door de carbonaten teweeggebracht (zie kolom V).	Vermindering der salpeterwaarde, door de eiwitstoffen teweeggebracht (zie kol. IV).	Verminderingder salpeterwaarde, teweeggebracht door NaCl, carbonaten en eiwitstoffen (kolom IX + kolom X + kolom XI).
Vóór de injectie. . .	106.5	1.06	0.23	0.074	sporen						
10 min. na de injectie	87.2	0.872	0.179	0.068	0.413	0.31	0.1	0.188	0.006	0,051	0.245
30 " " "	93.5	0.935	0.205	0.072	0.240	0.23	0.05	0.125	0.002	0.025	0.152
2 uur " "	101.16	1.01	0.242	0.072	0.081	0.075	0.	0 05	0.002	—0.012	0.04

Men ziet uit deze tabel:

1°. dat het chloorgehalte spoedig afneemt; 10 minuten na de injectie is het met $\frac{106.5 - 87.2}{106.5} \times 100 = 18$ pCt. gedaald; na 30 minuten nog met 12.2 pCt. en na 2 uur is het nog 5 pCt. bij het oorspronkelijke achtergebleven. De vermindering der salpeterwaarde, die hieraan beantwoordt, vindt men in kol. IX.

Omtrent de vermindering der salpeterwaarde, door de daling van het carbonaat- en eiwitgehalte veroorzaakt, spraken wij reeds boven. Men vindt de hierop betrekking hebbende cijfers in kolom X en XI.

2°. dat tegenover deze vermindering der salpeterwaarde, wier geheel is uitgedrukt in kol. XII, staat een vermeerdering van het wateraantrekkend vermogen door het achtergebleven $Na_2 S O_4$ (kolom VI en VII).

Deze vermeerdering is na 10 minuten en 30 minuten nog vrij aanzienlijk, maar toch gering met betrekking tot hetgeen deze zou zijn, indien de geïnjicieerde vloeistof in haar geheel in het plasma ware gebleven. In dit geval zou het $Na_2 S O_4$-gehalte bedragen hebben $\frac{7 \times 5}{14 + 7} = 1.66$ pCt.

En vragen wij ons nu eindelijk af, welke regeling het wateraantrekkend vermogen van het plasma heeft ondergaan, dan merken wij op, dat 10 minuten na de injectie de vermeerdering van 0.31 (kol. VII) de vermindering 0.245 (kol. XII), met $0.31 - 0.245 =$ **0,065** overtreft; welk verschil dan ook inderdaad vrij nauwkeurig teruggevonden wordt in de verhooging der salpeterwaarde van het geheele serum, welke verhooging **0.1** bedraagt (kol. VIII). En zoo vindt men, dat na 30 minuten de vermeerdering der salpeterwaarde bedraagt 0.23, de vermindering 0.152 (kol. XII). Het verschil $0.23 - 0.152 =$ **0.078** stemt weer vrij goed overeen met de werkelijke verhooging der salpeterwaarde van het geheele serum, welke verhooging **0.05** bedraagt (kol VIII).

Na 2 uur is, blijkens kolom VIII, het wateraantrekkend vermogen van het serum weer tot den norm terruggekeerd,

niet omdat het weer zijn oorspronkelijke samenstelling heeft bereikt, want dit is niet het geval; maar omdat er compensatie is opgetreden; er heeft een verhooging van salpeterwaarde plaats gehad van 0.075 (*kol. VII*) *en eene verlaging van* 0.04 (*kol. XII*).

Proef III.

Deze proef werd verricht met een sterk hyperisotonische Na Cl-solutie: een oplossing van een zout dus, dat in tegenstelling met het Na_2SO_4 in het plasma als het ware t'huis behoort.

Bij een paard van ongeveer 300 KG. werden 9 liter eener Na Cl-oplossing van 3.33 pCt. geïnjicieerd. Het paard bevatte ongeveer 24 KG. bloed en dus 16 liter serum. Het wateraantrekkend vermogen van het serum, dat vóór de injectie was verkregen, bedroeg $\frac{5 + 3.125}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.76$ pCt.

Indien het bloedvaatstelsel een volkomen impermeabel systeem vormde en de bloedlichaampjes ook impermeabel waren, zou het wateraantrekkend vermogen van het plasma na de injectie geworden zijn:

$$\frac{16 \times 1.76 + 9 \times 3.33 \times \frac{101}{58.5}}{9 + 16} = 3.2$$

Echter blijkt, dat het

10 min. na de injectie bedraagt $\frac{5+3.875}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.93$

30 » » » » » $\frac{5+3.625}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.87$

$1^1/_4$ uur » » » » $\frac{5+3.375}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.82$

3 » » » » » $\frac{5+3.125}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.76$

40 » » » » » $\frac{5+3.125}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.76$

Hieruit volgt, dat reeds na ongeveer 2 uren het oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen zich weer geheel hersteld heeft, om dan verder onveranderd te blijven. Deze

terugkeer tot het oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen is niet te verklaren, doordien het serum weer zijn oorspronkelijke samenstelling heeft bereikt; want uit de volgende tabel blijkt, dat het chloornatrium-gehalte, 3 uren na de injectie zelfs, nog 0.198 pCt. in salpeterwaarde hooger is dan vóór de injectie; een salpeterwaarde, die zich door onze methode van onderzoek met groote zekerheid had moeten doen kennen, indien geen stoffen het serum hadden verlaten, die te zamen een ongeveer gelijk wateraantrekkend vermogen vertegenwoordigden.

TABEL VIII.

I. Tijd van ontlasting.	II. $cM^3 AgNO_3$ ($^1/_{10}$ n.) overeenkomende met het chloor in 100 cM^3 serum.	III. Vermeerdering der salpeterwaarde, veroorzaakt door NaCl.
Vóór de injectie	111.16	
10 min. na » »	137.97	0.268
30 min. » » »	130.59	0.194
$1^1/_4$ uur » » »		
3 uur » » »	131.0	0.198
40 uur » » »	110.1	— 0.01

De hoeveelheid chloor (als Na Cl in rekening gebracht), die zelfs 3 uren na de injectie in het serum is achtergebleven, mag aanzienlijk genoemd worden.

Boven zagen wij, dat, 10 minuten na de injectie, de salpeterwaarde van het geheele serum 1.93 bedraagt en vóór de injectie 1.76; de salpeterwaarde is dus 0.17 gestegen. Daar nu uit kolom III blijkt, dat 10 minuten na de injectie het Na Cl-gehalte met 0.268 in salpeterwaarde is gestegen, moet het gehalte van andere bestanddeelen van het serum afgenomen zijn en inderdaad is dit o. a. met de carbonaten en eiwitstoffen het geval.

De volgende tabel geeft een overzicht der proeven.

TABEL IX.

I. Tijd van ontlasting.	II. Gram eiwitstoffen, in 100 cM³ serum.	III. Salpeterwaarde der eiwitstoffen berekend naar tabel IV.	IV. Salpeterwaarde der carbonaten.	V. Vermindering der salpeterwaarde, veroorzaakt door eiwit en carbonaten.	VI. Vermeerdering der salpeterwaarde van het serum, veroorzaakt door het NaCl (kol. III tabel VIII).	VII. Totale verhooging van het wateraantrekkend vermogen van het serum (zie p. 20 boven).	VIII. Kolom VI—Kolom V.
Vóór de injectie . .	7.338	0.216	0.036				
10 min. na de injectie	5.68	0.167	0.031	0.054	0.268	0.17	0.214
30 » » » »	6.85	0.202	0.032	0.018	0.194	0.11	0.176
1¼ uur » » »	7.398	0.209	0.032	0.011		0.06	
3 » » » »	7.587	0.223	0.034	—0.005	0.198	0	0.203
40 » » » »	7.446	0.219	0.036	—0.003	—0.01		—0.007

Uit deze tabel ziet men:

1°. dat, 10 minuten na de injectie, het intreden van Na Cl in het plasma een vermeerdering van 0.268 (kolom VI) in wateraantrekkend vermogen heeft teweeggebracht, maar dat daarentegen het serum een verlies heeft geleden van 0.054 pCt. salpeterwaarde (kolom V) door de daling van het eiwit- en carbonaatgehalte. Het verschil 0.268—0.0554 = 0.213 (kolom VIII) wordt voor verreweg het grootste gedeelte teruggevonden in de totale verhooging 0.17 (kolom VII) van het wateraantrekkend vermogen van het serum.

2°. In het serum, verkregen uit bloed, dat 30 minuten na de injectie is ontlast, bedraagt de algebraïsche som der partieele verhoogingen van het wateraantrekkend vermogen 0.176 (kol. VIII), terwijl blijkens kolom VII de werkelijke verhooging der salpeterwaarde van het serum 0.11 bedraagt.

3°. In het serum, verkregen uit het bloed, dat 3 uren na de injectie is ontlast, bedraagt de algebraïsche som der partieele verhoogingen van het wateraantrekkend vermogen 0.203 (kolom VIII), terwijl blijkens kolom VII de werkelijke verhooging der salpeterwaarde van het serum 0 bedraagt.

4°. 40 Uren na de injectie heeft het serum zijn oorspronkelijke samenstelling nagenoeg volkomen bereikt.

5°. De verschillen tusschen de overeenkomstige cijfers van kolom VII en VIII zijn te groot, om door eventueele fouten in de waarneming te kunnen worden verklaard. Er moeten dus bij de regeling van het wateraantrekkend vermogen van het plasma, na injectie van een sterk hyperisotonische keukenzoutoplossing, nog andere stoffen of momenten in het spel zijn, die wij nog niet kennen.

Proef IV.

Behalve met hyperisotonische oplossingen van Na_2SO_4 en Na Cl, werd ook een injectie-proef verricht met 7 Liter eener $NaNO_3$-solutie van 4 pCt.

De bepaling van het wateraantrekkend vermogen van het serum geschiedde met behulp van Tradescantia discolor.

De salpeterwaarde van het plasma onderging geen ver-

andering, hoewel zelfs 4 uren na de injectie nog duidelijk nitraat in het serum kon aangetoond worden (door een oplossing van diphenylamine in geconc. H_2SO_4). Verreweg de grootste hoeveelheid nitraat echter had de bloedbaan verlaten: reeds tijdens de injectie urineerde het dier aanzienlijke hoeveelheden nitraat; ook in de tranen en in het speeksel was rijkelijk $NaNO_3$ voorhanden.

---

b. Injectie van eene hypisotonische oplossing.

Proef V.

Tot dusverre injicieerden wij hyperisotonische zoutoplossingen; het interesseerde ons te weten, hoe het plasma zich verhield ten opzichte van hypisotonische zoutsoluties. Wij gebruikten Na_2SO_4. Een vergissing bij het afwegen van het zout, eerst na de injectie bemerkt, was oorzaak, dat de concentratie uiterst zwak werd, veel zwakker dan wij hadden *durven* inspuiten, met het oog op het uittreden van kleurstof uit de bloedlichaampjes. De solutie toch had een concentratie van slechts 0.5 pCt, overeenkomende met een salpeterwaarde van 0,474 pCt. Bedenkt men nu, dat in het gedefibrineerde bloed een KNO_3-oplossing van 1 pCt reeds uittreden van kleurstof bewerkt, dan zal men aanvankelijk verbaasd staan over het feit, dat het serum van het bloed, dat na de injectie werd ontlast, geen spoor van een roode tint vertoonde. De uitert snelle regeling van het wateraantrekkend vermogen moet, zooals we spoedig zullen zien, als de oorzaak beschouwd worden.

Het paard woog ongeveer 400 KG en de hoeveelheid geïnjicieerde Na_2SO_4-oplosssing van 0.5 pCt bedroeg 7 liter.

Met het bloed, vóór en na de injectie ontlast, deden we volkomen hetzelfde als bij proef II en III.

Het wateraantrekkend vermogen van het oorspronkelijk serum (vóór de injectie) bedroeg

$$\frac{5 + 3.125}{5} \times 0.63 \times \frac{101}{58.5} = 1.76 \text{ pCt.}$$

Vormde het bloedvaatstelsel een volkomen impermeabel systeem en waren de bloedlichaampjes ook volkomen impermeabel, dan zou het wateraantrekkend vermogen hebben bedragen: $\frac{18 \times 1.76 + 7 \times 0.474}{18 + 7} = 1.4$ pCt.

Wat bleek echter? 10 Minuten, 30 minuten en $1^1/_2$ uur na de injectie had het serum volkomen hetzelfde wateraantrekkend vermogen als het oorspronkelijke (1.76); in alle 4 gevallen moeten 5 cM^3 serum met 3.25 cM^3 water verdund worden, om een even zichtbare kleurstofuittreding uit hetzelfde gedefibrineerde bloed te veroorzaken, terwijl verdunning met 3 cM^3 water nergens uittreden van kleurstof ten gevolge had.

De quantitatieve bepaling van het sulfaat leerde, dat, terwijl in het oorspronkelijke serum slechts sporen voorkwamen,

het Na_2SO_4-gehalte, 10 minuten na de injectie, overeenkwam met een salpeterwaarde van . . . 0.094
het Na_2SO_4-gehalte, 30 minuten na de injectie, overeenkwam met een salpeterwaarde van . . . 0.085
het Na_2SO_4-gehalte, $1^1/_2$ uur na de injectie, overeenkwam met een salpeterwaarde van . . . 1.101

gehalten, die niet veel afwijken van die, welke zouden gevonden zijn, indien de geheele solutie in het plasma gebleven ware. Immers dan zou de salpeterwaarde van het Na_2SO_4 hebben bedragen $\frac{7 \times 0.474}{18 + 7} = 0.135$ pCt.

Het is, alsof het Na_2SO_4 de bloedbaan niet verlaten mag, omdat het moet medewerken om het wateraantrekkend vermogen, dat door inspuiting der hypisotonische oplossing verlaagd werd, zoo hoog mogelijk op te houden.

Opmerkenswaardig was het feit, dat het dier tijdens de injectie niet urineerde en zelfs niet binnen het tijdsverloop van 3 uren na de inspuiting. Ook namen we geen ontlasting van dunne faeces waar. Al die verschijnselen hadden wij wel gezien bij injectie van *hyperisotonische* oplossingen

(proef II, III en IV); ook zelfs bij injectie van een veel geringere hoeveelheid dan 7 liter (proef I). Na injectie van 7 liter eener Na Cl-solutie van 0.35 pCt. (*hypisotonisch*) namen wij ook geen verhoogde vocht-secretie waar. Met deze tegenstelling in de verhouding, door hyper- en hypisotonische oplossingen aan den dag gelegd, is niet volkomen te rijmen de voorstelling van COHNHEIM *) omtrent de oorzaak van vocht-secretie en transsudatie bij hydraemische plethora. Naar aanleiding toch van het feit, dat na opwekking van hydraemie bij honden (door ontlasting van bloed en injectie van een gelijk volume NaCl-oplossing van 1 pCt.), noch verhoogde secretie, noch verhoogde transsudatie is waar te nemen, terwijl dit wel het geval is na opwekking van hydraemische plethora, merkt COHNHEIM op: „Es ist nicht die Verwässerung an sich, d. h. die procen„tische Zunahme des Wassergehalts, welche die Vermehrung „der Secretionen und Transsudationen macht, sondern die „Volumvergröszerung, die Massenzunahme des Blutes."

Indien het alleen „die Volumsvergröszerung, die Massenzunahme des Blutes um die eingebrachte Salzlösung" ware, zouden wij, bij injectie van zwak hypisotonische oplossingen, evenzeer verhoogde secretie van vocht hebben zien optreden als bij injectie van hyperisotonische soluties.

De *hoeveelheid zout* blijkt dus hier een voorname rol te spelen. Na inspuiting eener hyperisotonische oplossing wenscht het plasma zich van het overvloedige zout te ontdoen; het kan dit langs twee wegen: langs dien der weefsels en lymphbanen en langs dien der nieren. Door het eerste middel wordt slechts een tijdelijke verbetering verkregen, althans wat den afvoer langs lymphbanen betreft. Het zout komt dan toch weer in de bloedbaan terug. De nieren zijn dus aangewezen om aan de ophooping van zout een einde te maken. De nierepithelia worden geprikkeld en met die prikkeling gaat — zoo leert ons de ervaring, bij diuretica opgedaan — ook een afscheiding van water gepaard. Wordt echter een zwakke hypisotonische oplossing ingespoten, dan

*) COHNHEIM. Vorlesungen über allgem. Pathol. 2e Aufl. Th. I. S. 443.

is er geen aanleiding tot verwijdering van het zout; integendeel, het terrugblijven in de bloedbaan is zeer gewenscht; want, naar hetgeen onze proeven leeren, moet het dienen om het verlaagde wateraantrekkend vermogen van het plasma weer op de oorspronkelijke waarde te helpen brengen. Er wordt niet geurineerd en het water gaat naar de weefsels.

Wij laten nu een tabel volgen, die de resultaten bevat, welke verkregen zijn bij injectie van 7 liter Na_2SO_4-oplossing van 0.5 pCt. Voor de verklaring der kolommen verwijzen wij naar p. 386, waar men de beteekenis van tabel VII beschreven vindt, die op analoge wijze is ingericht als Tabel X.

TABEL X.

I. Tijd van ontlasting.	II. cM³ 1/10 n. Ag NO_3 overeenkomende met het chloor van 100 cM³ serum.	III. Salpeterwaarde van het met kolom II overeenkomende Na Cl.	IV. Salpeterwaarde der eiwitstoffen (berekend naar tabel IV).	V. Salpeterwaarde der carbonaten.	VI. Gram Na_2SO_4 in 100 cM serum.	VII. Vermeerdering der salpeterwaarde, door Na_2SO_4 teweeggebracht (zie p. 392).	VIII. Werkelijke vermeerdering der salpeterwaarde van het plasma na de injectie (zie p. 392).	IX. Vermindering der salpeterwaarde, door het Na Cl teweeggebracht (zie kol. III).	X. Vermindering der salpeterwaarde, door de carbonaten teweeggebracht (zie kolom V).	XI. Vermindering der salpeterwaarde, teweeggebracht door de eiwitstoffen (zie kol. IV).	XII. Verminderingder salpeterwaarde, teweeggebracht door NaCl, carbonaten en eiwitstoffen (kolom IX + kolom X + kolom XI).
Vóór de injectie. . .	106.5	1.06	0.21	0.035	sporen						
10 min. na de injectie	100.98	1.01	0.18	0.033	0.099	0.094	0	0.005	0.002	0.03	0.082
30 „ „ „	102.2	1.02	0.199	—	0.09	0.085	0	0.043	—	0.01	0.053
1½ uur „ „	99.1	0.99	0.25	—	0.11	0.101	0	0.074	—	0.005	0.079

Deze tabel leert:

1°. Dat, 10 minuten na de injectie, het wateraantrekkend vermogen van het serum een vermindering heeft ondergaan van 0.082 (kol. XII), wegens de daling van het gehalte der chloriden, carbonaten en eiwitstoffen; doch ook een vermeerdering van 0.094 (kol. VII), wegens het terugblijven van Na_2SO_4. Hierdoor wordt voldoende verklaard, waarom het experiment leert, dat door de injectie geen verandering in het oorspronkelijke wateraantrekkend vermogen is opgetreden (kol. VIII).

2°. Dat, 30 minuten na de injectie, de salpeterwaarde van het serum een vermindering heeft ondergaan van 0.053, wegens de daling van het gehalte der chloriden en eiwitstoffen; doch ook een vermeerdering van 0.085 wegens het terugblijven van Na_2SO_4.

3°. Dat, $1^1/_2$ uur na de injectie, de salpeterwaarde van het serum een vermindering heeft ondergaan van 0.079, wegens de daling van het gehalte der chloriden en eiwitstoffen. (Kol. XII); doch ook een vermeerdering van 0.101, wegens het terugblijven van Na_2SO_4 (kol. VII).

De vrij goede overeenstemming tusschen kol. VII en XII verklaart dus voldoende, waarom het wateraantrekkend vermogen van het plasma, in weerwil van de injectie der zwak hypisotonische oplossing, onveranderd is gebleven (kol. VIII).

---

c. Het totale volume bloed bij de proeven onder *a* en *b*.

Een blik op de tabellen V, VI, VII en X, geeft o. a. het verrassende resultaat te zien, dat 2 uren na de injectie van hyperisotonische oplossingen, het eiwitgehalte van het serum hooger is dan vóór de injectie. Dienovereenkomstig bleek ook het specifiek gewicht in waarde gestegen.

Die verhooging van eiwitgehalte kon veroorzaakt zijn òf door diffusie van eiwit uit de weefsels of bloedlichaampjes, òf ook door uittreden van vloeistof, beter gezegd, van water uit het plasma. Deze kwestie was niet moeilijk uit te maken; om het laatste te onderzoeken, hadden we slechts

de verhouding tusschen het volume der bloedlichaampjes en van het serum te bepalen, vóór de injectie en 2 uren daarna. En wat bleek nu? Dat het volume van het serum ten opzichte van dat der bloedlichaampjes, tengevolge van de injectie verminderd was. Wij mogen aannemen, dat deze relatieve vermindering van het volume van het serum, inderdaad is toe te schrijven aan water en niet aan de vergrooting van het volume der bloedlichaampjes of van hun aantal; aan het laatste valt — den korten tijd in aanmerking genomen — niet te denken; en, wat de verandering van het volume der bloedlichaampjes betreft, daarvan kan hier ook geen sprake zijn, daar het gebleken is, dat het plasma in dien tijd (2 uur) zijn oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen weer volkomen heeft bereikt.

De volgende tabel geeft een overzicht van de cijfers, die wij met betrekking tot het bovenstaande hebben verkregen. Kolom I bevat enkele aanwijzingen omtrent de injectie der hyper- en hypisotonische oplossingen; kolom II geeft den tijd der bloedontlastingen aan; Kolom III het specifiek gewicht van het serum bij kamertemperatuur; het was bepaald door middel van een fijn verdeelden areometer. In kolom IV eindelijk vindt men het volume der bloedlichaampjes in 100 cM^3 gedefibrineerd bloed. Dit volume werd bepaald door maatglaasjes van 25 cM^3, van gelijke hoogte, met gedefibrineerd bloed gevuld, gedurende 24 uren aan zich zelve over te laten en vervolgens de scherpe grens tusschen serum en bezonken bloedlichaampjes af te lezen. Deze methode moge voor de vaststelling van het absolute volume der bloedlichaampjes onnauwkeurig zijn; voor vergelijkende bepalingen is ze geschikt: zij geeft constante en, naar wij eenmaal bij wijze van contrôle door telling met het toestelletje van *Zeiss-Melassez* voor bloed van twee ontlastingen hebben vastgesteld, ook juiste resultaten.

De methode zou voor runderbloed, en in het algemeen voor bloedsoorten, waarvan de lichaampjes moeilijk bezinken, bezwaarlijk kunnen aangewend worden.

TABEL XI.

Bepaling van het specifiek gewicht van het serum en van het volume der bloedlichaampjes in 25 cM³ gedefibrineerd bloed.

I. Proef.	II. Tijd van ontlasting.	III. Specifiek gewicht van het serum.	IV. cM³ bloedlichaampjes op 100 cM³ gedefibrineerd bloed.
Injectie van 7 Liter eener Na_2SO_4-oplossing van 5 pCt. bij een paard van ongeveer 400 K.G.	Vóór de injectie . .	1027.25	36
	10 min na de injectie	1024.5	30
	30 » » » »	1027.5	35
	2 uur » » »	1028.5	40
Injectie van 9 Liter eener NaCl-oplossing van 3.3 pCt. bij een paard van ongev. 300 K.G.	Vóór de injectie . .	1027	37.5
	10 min. na de injectie	1023	30
	30 » » » »	1026.5	36
	1¼ uur » » »	1027.5	42
	3 » » » »	1028	47
Injectie van 7 Liter eener Na_2SO_4-oplossing van 0.5 pCt. bij een paard van ongev. 400 K.G.	Vóór de injectie. .	1027	
	10 min. na de injectie	1025	27.5
	30 » » » »	1025.5	26.5
	1½ uur » » »	1027.5	30.5
	20 » » » »	1029.5	30.5

Uit deze tabel blijkt duidelijk, dat na de injectie van een hyperisotonische zoowel als van een hypisotonische zoutoplossing, binnen den tijd van twee uren het specifiek gewicht van het serum tot boven het oorspronkelijke geste-

gen is, hetgeen, in verband met de relatieve vermeerdering van het aantal roode bloedlichaampjes, gerechtigt tot het besluit, dat, tengevolge van de injectie, het volume van het in het lichaam aanwezige plasma, en dus ook het volume van het geheele bloed, na het vermelde tijdsverloop geringer is dan vóór de injectie. Voor hyperisotonische oplossingen is dit feit wel te verklaren: het vele $Na_2 SO_4$ prikkelt de nier-epithelia; er heeft sterke urinesecretie plaats en daarbij worden natuurlijk ook NaCl en andere zouten uitgescheiden. Het bloed verarmt dientengevolge aan zouten, en zal het plasma nu, na verwijdering van het $Na_2 SO_4$, niet beneden het oorspronkelijke in salpeterwaarde dalen, dan moet het als 't ware ingedikt worden, d. w. z. het geheele volume van het plasma moet afnemen.

---

d. Injecties bij honden.

Ook werden nog injecties bij honden verricht, doch het serum, bij verschillende ontlastingen verkregen, werd, uithoofde van de geringe quantiteiten, niet geanalyseerd. Slechts werd het wateraantrekkend vermogen van het serum bepaald en ook dat der bloedlichaampjes, zooals later blijken zal.

1. Bij een hond van 5 KG werden 20 cM^3 eener NaCl oplossing van 3 pCt in de a. femoralis gespoten. Indien de geheele oplossing in het plasma ware gebleven, had de salpeterwaarde moeten gerezen zijn van 1.24 tot 1.55. Toch bleek bij proeven met Tradescantia, dat, 1 uur na de injectie, de salpeterwaarde van het serum 1.24 bedroeg.

2. Bij een hond van 3 KG werden 50 cM^3 eener NaI-oplossing van 3 pCt in de a. femoralis gespoten. 2 Uren na de injectie bleek het wateraantrekkend vermogen van het serum gelijk te zijn aan dat van het oorspronkelijke serum.

3. Bij een hond van 6 KG werden 30 cM^3 eener $Na_2 SO_4$-oplossing van 10 pCt. ingespoten. Hierdoor zou, in de gegeven onderstelling, het wateraantrekkend vermogen van

het serum moeten verhoogd zijn van 1.5 tot 2.08. 10 Minuten en een half uur na de injectie blijkt de salpeterwaarde 1.6 geworden te zijn.

Uit deze proeven blijkt, dat ook bij honden het wateraantrekkend vermogen van het serum zeer spoedig tot den norm terugkeert.

Wij kunnen de uitkomsten, verkregen bij onze proeven over kunstmatige hydraemische plethora bij het paard, aldus samenvatten.

I. Na inspuiting van hyperisotonische oplossingen van Na_2SO_4, NaCl en $NaNa_3$, in zoo groote hoeveelheden, dat het wateraantrekkend vermogen aanzienlijk zou moeten stijgen, indien de wanden van het bloedvaatstelsel en ook de bloedlichaampjes voor zouten en water volkomen impermeabel waren, krijgt het plasma uiterst spoedig zijn oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen terug.

a. Bij inspuiting van 5 liters eener Na_2SO_4-oplossing van 5 pCt., waardoor het wateraantrekkend vermogen van het plasma, in de zooeven gemaakte onderstelling, had moeten stijgen van 1.6 pCt. tot 2.29 pCt., is dit vermogen,

10 minuten	na	de	injectie		1.61
30 »	»	»	»		1.6
1 uur	»	»	»		1.55
$1^1/_2$ »	»	»	»		1.6 enz.

b. Bij inspuiting van 7 liter eener Na_2SO_4-oplossing van 5 pCt., waardoor het wateraantrekkend vermogen, in de bewuste onderstelling, zou hebben moeten stijgen van 1.65 tot 2.68, is dit vermogen:

10 minuten	na	de	injectie		1.75
30 »	»	»	»		1.70
2 uur	»	»	»		1.65

c. Bij inspuiting van 9 liter eener Na Cl-oplossing van 3.3 pCt., waardoor het wateraantrekkend vermogen,

in de bewuste onderstelliug, zou hebben moeten stijgen van 1.76 tot 3.2 is dit vermogen:

10	min.	na	de	injectie	1.93
30	»	»	»	»	1.87
$1^1/_4$	uur	»	»	»	1.82
3	»	»	»	»	1.76
40	»	»	»	»	1.76

II. Bij inspuiting van een hypisotonische oplossing van Na_2SO_4, die het wateraantrekkend vermogen van het plasma, in de bewuste onderstelling, had moeten doen dalen van 1.76 tot 1.4, blijkt dit vermogen reeds 10 minuten na de injectie weer geheel tot de oorspronkelijke waarde (1.76) te zijn teruggekeerd.

III. Bij injectie van hyperisotonische zoutoplossing bij paarden, heeft tijdens en spoedig na de inspuiting sterke secretie van nieren en darmwand plaats; bij injectie van hetzelfde volume eener hypisotonische oplossing niet. Voor de verklaring verwijzen wij naar pag. 393 en 394.

IV. Door het bloed te onderzoeken, ontlast, zeer kort na de injectie van hyper- en hypisotonische zoutoplossingen, kan men waarnemen, hoe de bestanddeelen van het plasma samenwerken om het herstel van het oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen tot stand te brengen. Terwijl toch door en na de injectie van hyperisotonische solutiën het wateraantrekkend vermogen van het plasma door het achtergebleven zout aanzienlijk zou moeten gestegen zijn, werken onmiddellijk $NaCl$, Na_2CO_3 en eiwitstoffen samen, om door hun uittreden uit het bloedvocht, de genoemde stijging zoo veel mogelijk te compenseeren. Ook het water heeft aan de compensatie een belangrijk aandeel en behoudt dit zelfs 2 uren en langer na de injectie. Wij verwijzen hieromtrent naar de proeven, waaruit gebleken is, dat het volume van het plasma 2 uren en langer na de injectie geringer is dan vóór dien tijd (tabel XI op p. 398, verder p. 399).

V. Ongeveeer te gelijk met het wateraantrekkend vermogen, ziet men het plasma ook zijn oorspronkelijke samenstelling weer bereiken, zoodat men allicht tot het denkbeeld zou komen,

het herstel van het wateraantrekkend vermogen als het *gevolg* daarvan aan te zien. Dit denkbeeld zou echter reeds daarom minder juist zijn, omdat op tijden, waarop het plasma zijn oorspronkelijke samenstelling nog niet heeft bereikt en nog afwijkingen daarin voorhanden zijn, die onze methode voor de bepaling van de wateraantrekkende kracht zeker zou hebben kunnen aantoonen, het wateraantrekkend vermogen *wel* tot de oorspronkelijke waarde is teruggekeerd.

Het schijnt dus omgekeerd, dat het wateraantrekkend vermogen het domineerende moment is, dat het plasma tot zijn vroegere samenstelling terugvoert. Misschien is dit te exclusief. Immers aan den eisch, dat het wateraantrekkend vermogen weer tot den norm terugkeert, kan langs zoo vele wegen voldaan worden, m. a. w. men kan zich een oneindige hoeveelheid van combinaties van eiwitstoffen, chloriden, carbonaten, sulfaten enz. denken, die allen te zamen een gelijke salpeterwaarde vertegenwoordigen. Van al die combinaties is er slechts ééne, die het lichaam wenscht en dat is die, welke het vóór de proef bezat. Wij kunnen dit bezwaarlijk op iets anders terugbrengen dan tot het electief vermogen, dat aan het protoplasma eigen is, en dat wij telkens en telkens in de physiologie terug vinden. Misschien staat hier met dit electief vermogen de wateraantrekkende kracht in een nauw verband. Dat het er mede samengaat, is zeker.

VI. Het spoedige herstel van het wateraantrekkend vermogen, bij het plasma van paarden uitvoerig onderzocht, wordt, voor zoover wij dit hebben nagegaan, bij honden volkomen bevestigd.

B. *Het bloedplasma bij hydraemie.*

Was door de voorgaande onderzoekingen gebleken, dat na opwekking van hydraemische plethora door injectie van hyper- en hypisotonische oplossingen, de bestanddeelen van het plasma zich zoodanig regelen, dat reeds spoedig het wateraantrekkend vermogen tot de oorspronkelijke grootte

is teruggekeerd, thans scheen het niet van belang ontbloot, na te gaan, in hoeverre dit ook bij hydraemie het geval was. De hydraemische toestand werd teweeggebracht door onttrekking van bloed.

Wij hebben twee reeksen van proeven verricht.

Proef I.

Bij een oud paard, wegende ongeveer 400 KG., werden achtervolgens ontlast:

1°.		$^3/_4$ liter	(tot onderzoek).
2°.	Onmiddellijk daarna	10 »	(het dier valt bijna, wegens duizeling.)
3°.	$2^1/_2$ uur na de vorige ontlasting	$^3/_4$ »	(tot onderzoek).
4°.	19 » » » » »	$^3/_4$ »	(tot onderzoek).
5°.	Onmiddellijk daarna	$4^1/_2$ »	
6°.	1 uur na de vorige ontlasting	$^3/_4$ »	(tot onderzoek).
7°.	1 uur na de 6e ontlasting wordt het paard door verbloeding afgemaakt en van het allerlaatste bloed wordt opgevangen	$^3/_4$ »	(tot onderzoek).

Het bloed van de 1e, 3e, 4e, 6e en 7e ontlasting wordt gedefibrineerd; het serum, door de centrifugaal-machine afgescheiden, is volkomen helder en vrij van bloedkleurstof.

Het wateraantrekkend vermogen van dit serum wordt bepaald door middel van bloedlichaampjes en wel door middel van de bloedlichaampjes der eerste ontlasting, die een uittreden van kleurstof vertoonen in een Na Cl-oplossing van 0.6 pCt., maar niet in eene van 0.59 pCt.

Het blijkt, dat een mengsel van 5 cM³ serum (1) + 2.5 cM³ water geen, maar van 5 cM³ serum (1) + 2.75 water wel uittreden van eenige kleurstof bewerkt; zoodat het wateraantrekkend vermogen
van serum (1) gelijk is aan

$$\frac{5 + 2.625}{5} \times 0.595 \times \frac{101}{58.5} = 1.56$$

Van serum (3) gelijk is aan:

$$\frac{5 + 2.625}{5} \times 0.595 \times \frac{101}{58.5} = 1.56$$ ($2^1/_2$ uur na de ontlasting van 10 liter).

Van serum (4) gelijk is aan:

$$\frac{5 + 2.625}{5} \times 0.595 \times \frac{101}{58.5} = 1.56$$ (19 uur na ontlasting 3).

Van serum (6) gelijk is aan:

$$\frac{5 + 2.375}{5} \times 0.595 \times \frac{101}{58\ 5} = 1.51$$ (1 uur na ontlasting 4).

Van serum (7) gelijk is aan:

$$\frac{5 + 2.625}{5} \times 0.595 \times \frac{101}{58.5} = 1.56$$ (1 uur na ontlasting 6).

Het wateraantrekkend vermogen van het serum is dus onveranderd gebleven, in weerwil van de aanzienlijke vermindering van het eiwitgehalte, zooals deze uit de volgende tabel blijkt.

TABEL XII.

Eiwitgehalte en specifiek gewicht van het plasma na bloedonttrekking.

I. Nummer der ontlasting.	II. Gram eiwit in 100 cM³ serum.	III. Specifiek gewicht van het serum.	IV. Vermindering van het eiwitgehalte.
1	8.304	1031	
3	7.152	1026.5	15.3 pCt.
4	7.593	1028.5	8.5 »
6	7.011	1026.5	15.9 »
7	6.894	1026	17.57 »

Men ziet uit deze tabel, dat $2^1/_2$ uur na de ontlasting van 10 liter, het eiwitgehalte aanzienlijk gedaald is; 19 uren daarna heeft het verlies zich weer tot de helft hersteld. Bij een volgende ontlasting daalt het weer aanzienlijk en

bij de 7e nog sterker. Met de veranderingen in eiwitgehalte gaan die van het specifiek gewicht hand aan hand. Dit zijn feiten, die herhaaldelijk reeds door anderen zijn geconstateerd. Van de vermindering van het eiwitgehalte zou een daling van het wateraantrekkend vermogen van het serum zeker het gevolg geweest zijn, indien niet het gehalte aan NaCl ware vermeerderd. Dat dit het geval is, blijkt uit de volgende tabel, die tevens een overzicht geeft van de regeling van het wateraantrekkend vermogen van het serum.

TABEL XIII.

Regeling van het wateraantrekkend vermogen na bloedontlastingen (paard).

I. Nummer der ontlasting.	II. $cM^3 AgNO_3$ ($^1/_{10}$ n.), overeenkomende met de chloriden van 100 cM^3 serum.	III. Vermeerdering van het wateraantrekkend vermogen van het serum, teweeggebracht door vermeerdering van het gehalte aan NaCl.	IV. Vermindering van het wateraantrekkend vermogen van het serum, teweeggebracht door vermindering van het eiwitgehalte (zie tabel XII).
1. (vóór de groote ontlasting)	102.3		
3. ($2\frac{1}{2}$ uur na de ontl. van $10\frac{1}{4}$ L).	106	0.037	0.034
4. (19 uur na de vorige ontl.)	104.3	0.02	0.017
6. (1 uur, nadat weer $4\frac{1}{2}$ L. dus in 't geheel 15 L. ontlast zijn)	106.5	0.045	0.038
7. (op het einde der verbloeding, die een uur na de vorige ontlasting plaats had)	108.8	0.065	0.0426

Uit deze tabel blijkt, dat, terwijl door vermindering van het eiwitgehalte het wateraantrekkend vermogen van het plasma daalt, deze daling door vermeerdering van het gehalte van NaCl bijna geheel vergoed wordt. Het ligt voor de hand, dat ook andere stoffen van het plasma aan de compensatie zullen deel hebben, maar de voornaamste rol spelen toch de eiwitstoffen en chloriden.

Proef II.

Een 2e proef heeft bovenstaande resultaten volkomen bevestigd.

De ontlastingen geschiedden bij een paard, dat ongeveer 400 KG woog.

1e ontlasting. . . . . $^3/_4$ liter (tot onderzoek)
2e ontlast. onmiddellijk daarna 13 liter
3e ontlast., 2 uur na de vorige ontl., $^3/_4$ liter (tot onderzoek)
4e » 18 uur » » vorige (3e) » 5 liter
5e » 1 uur » » vorige (4e) » $^3/_4$ liter (tot onderzoek)

Het bloed der 1e, 3e en 5e ontlasting werd op de beschreven wijze onderzocht. Het wateraantrekkend vermogen bleek in de drie gevallen 1.7 te bedragen.

De analysen van eiwit en chloriden vatten wij in de volgende tabel samen.

TABEL XIV.

Regeling van het wateraantrekkend vermogen na bloedontlastingen (paard).

I. Nummer der ontlasting.	II. Specifiek gewicht van het serum.	III. Gram eiwit in 100 cM³ serum.	IV. Vermindering van het eiwitgehalte.	V. cM³ $^1/_{10}$ norm. $AgNO_3$, overeenkomende met de chloriden van 100 cM³ serum.	VI. Verhooging der salpeterwaarde van het serum, veroorzaakt door de vermeerdering van het gehalte aan NaCl (kol. V).	VII. Verlaging salpeterw de van h serum, ver zaakt door verminderi van het gri aan eiwitst fen (kol. I en IV).
1. (Vóór de groote ontlasting).	1030.5	7.955		105.4		
3. (2 uren na de ontlasting van 13 $^1/_4$ Liter).	1026	6.563	17.5 pCt.	110.1	0.053	0.04
5. (1 uur nadat 19 $^1/_2$ Liter zijn ontlast).	1025	6.353	20 1 „	112.3	0.069	0.046

Het resultaat van proef 2 verschilt dus inderdaad weinig van dat van proef I. Het luidt:

Het oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen van het plasma wordt bij kunstmatige hydraemie volkomen bewaard, in weerwil van de aanzienlijke vermindering in specifiek gewicht, die het plasma ondergaat.

De compensatie wordt grootendeels daardoor tot stand gebracht, dat naast een daling van het eiwitgehalte een rijzing van het chloorgehalte plaats heeft.

Ongetwijfeld zullen ook andere stoffen in het serum een aandeel in deze compensatie hebben, doch zeker ieder voor zich in veel geringere mate dan de eiwitstoffen en de chloriden. Van de salpeterwaarde 1.7 van het geheele serum toch, komt 0.22 toe aan het eiwit en 1.06 ongeveer aan het Na Cl.

C. *Het bloedplasma bij anhydraemie.*

Bij een oud paard, wegende ongeveer 400 KG., wordt anhydraemie teweeggebracht door subcutane injectie van een mengsel van 62 5 cgr. pilocarpine en 6.25 cgr. eserine. Het dier speekselt; terwijl een zgn. mondspiegel den mond openhoudt en een helper het hoofd fixeert, wordt het speeksel opgevangen. De hoeveelheid bedraagt na $2^1/_2$ uur ongeveer 8 liter. Intusschen heeft het dier herhaalde malen geurineerd en zeer dunne faeces ontlast; zoodat veilig mag aangenomen worden, dat in die $2^1/_2$ uur minstens 10 liters vocht uit het lichaam zijn verwijderd. Daarna werd $^3/_4$ liter bloed uit de V. jugularis ontlast. Het wateraantrekkend vermogen van het bijbehoorende serum bedraagt $\frac{5 \times 33.75}{5} \times 0\ 63 \times \frac{101}{58.5} = 1.8$ en is volkomen gelijk aan dat van het serum, dat afkomstig was van het bloed, vóór de injectie ontlast.

De volgende tabel bevat een overzicht der analysen van

het eiwit en de chloriden, aanwezig in het serum van de beide ontlastingen,

TABEL XV.

Anhydraemie door injectie van pilocarpine en eserine.

I. Tijd van ontlasting.	II. Gram eiwitstoffen in 100 cM³ serum,	III. cM³ $^1/_{10}$ norm $AgNO_3$, overeenkomende met de chloriden van 100 cM³ serum.	IV. Verhooging der salpeterwaarde, veroorzaakt door de eiwitstoffen.	V. Vermindering der salpeterwaarde van het serum, veroorzaakt door Na Cl.
Vóór de injectie van pilocarpine en eserine . . .	7.78	108.54		
2½ uur na de injectie	8.56	102.5	0.016	0.06

Uit deze tabel blijkt, dat het eiwitgehalte van het serum is toegenomen en het Na Cl-gehalte afgenomen. In overeenstemming met de vermeerdering van het eiwitgehalte, was ook het specifiek gewicht gestegen van 1029.5 tot 1030.5. Het volume der bloedlichaampjes in 100 cM³ serum bedroeg vóór de injectie 30, na de injectie 33 cM³; hieruit volgt, dat het volume van het plasma, en das ook het volume van het geheele bloed, is verminderd.

Proef 2.

Deze proef is slechts een herhaling van de vorige. De volgende tabel geeft de resultaten weer:

TABEL XVI.

Anhydraemie bij een paard.

I.	II.	III.	IV.	V.
Tijd van ontlasting.	Gram eiwitstoffen in 100 cM³ serum.	cM³ 1/10 norm. $AgNO_3$, overeenkomende met de chloriden van 100 c M serum.	Verhooging der salpeterwaarde, veroorzaakt door de eiwitstoffen.	Vermindering der salpeterwaarde van het serum, veroorzaakt door Na Cl.
Vóór de injectie van pilocarpine en eserine . . .	7.88	106.5		
2½ uur na de injectie	9.14	99.5	0.0368	0.07

Ook hier ziet men, dat met een rijzing van het eiwitgehalte, een daling van het chloornatrium-gehalte gepaard gaat.

Het wateraantrekkend vermogen van het serum was vóór en na de injectie gelijk en wel 1.76.

Uit beide proeven volgt dus, dat door het te voorschijn roepen van anhydraemie door middel van pilocarpine en eserine, het wateraantrekkend vermogen van het plasma geen verandering ondergaat, in weerwil van de onttrekking van een aanzienlijke hoeveelheid vocht.

De compensatie blijkt voor een deel daaraan te danken te zijn, dat terwijl het chloornatrium-gehalte van het plasma daalt, dat van het eiwit rijst. Uit beide tabellen ziet men echter, dat de daling een grooter wateraantrekkend vermogen vertegenwoordigt dan de rijzing. Er moeten dus nog andere stoffen in het plasma binnengekomen zijn; immers, de verschillen in salpeterwaarde van de bewuste daling en rijzing in beide gevallen zijn te groot, dan dat ze aan een fout in de methode voor de bepaling van het wateraantrekkend vermogen kunnen worden toegeschreven.

II. Regeling van de bestanddeelen der roode bloedlichaampjes.

A. *Permeabiliteit der roode bloedlichaampjes.*

In de inleiding maakten wij reeds de opmerking, dat de methode tot onderzoek van de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes van het gedefibrineerde bloed niet was aan te wenden voor het circuleerende bloed. Wij moesten dus naar een andere methode omzien en hebben getracht een stof te vinden, die aan de volgende eigenschappen voldeed.

1. Moest ze, in de circulatie gebracht, in de bloedlichaampjes van het circuleerende bloed in zeer geringe hoeveelheid zijn aan te toonen en wel met een reagens, waardoor het leven van het dier niet getroffen werd. Dit reagens zou bijv. de eiwitstoffen van het plasma niet mogen neêrslaan. De reactie zou dus moeten berusten op kleurverandering der bloedlichaampjes.

2. De stof mocht de bloedlichaampjes niet vernietigen.

3. De stof mocht in de bloedlichaampjes van het normale dier niet voorkomen.

Een stof, die aan deze drie eigenschappen geheel voldeed, hebben we helaas niet kunnen vinden. Een oplossing van NaI kwam onzen eischen nog het meest nabij.

Ad 1. Iodium is in uiterst geringe hoeveelheid aan te toonen door nitras palladiosus, waarmede het een bruin neerslag geeft. Echter kan men dit reagens niet in het bloedvaatstelsel spuiten; immers, het eiwit wordt door palladium neergeslagen; dit heeft natuurlijk den dood ten gevolge. Daarom lieten we, nadat de injectie van NaI was geschied, een droppel van het bloed in palladium-oplossing vallen.

Ad 2. NaI, in niet te hooge concentratie in de bloedbaan gespoten, brengt geen waarneembare verandering in de lichaampjes te weeg, noch in die van honden, noch in die van kikvorschen.

Ad 3. NaI komt in de bloedlichaampjes van normale honden en kikvorschen niet voor.

Wij zullen over de wijze van proefneming niet uitweiden,

maar alleen vermelden, dat de bloedlichaampjes, na de injectie van NaI, bij het onderzoek door middel van palladiumoplossing, *nu en dan* een bruine tint vertoonden. Dat de bruine tint slechts nu en dan optrad, bewijst niet, dat in het algemeen de bloedlichaampjes van het circuleerende bloed voor NaI niet permeabel zijn. Immers, uit ons vorig opstel is gebleken, dat bij het gedefibrineerde bloed de graad van permeabiliteit der bloedlichaampjes zeer wisselend was en blijkbaar afhankelijk van de concentratie en het volume der toegevoegde zoutoplossing *).

Hadden wij het in onze hand gehad, beiden ook voor het circuleerende bloed naar willekeur te regelen, dan zouden wij, in verband met de ervaringen, bij het gedefibrineerde bloed opgedaan, zooveel hebben geïnjicieerd, dat de bloedlichaampjes zooveel mogelijk van het zout eventueel hadden opgenomen. Maar uit de beschreven onderzoekingen over de regeling van de bestanddeelen van het plasma is gebleken, hoe spoedig het laatste weer de oorspronkelijke samenstelling bereikt; bovendien kan men de zoutsolutie niet in te geconcentreerden toestand inspuiten, indien men geen gevaar wil loopen, dat de bloedlichaampjes zwellen en kleurstof verliezen.

Het laatste is als argument te beschouwen voor het bestaan der permeabiliteit. Als voorbeeld kunnen we aanvoeren injecties van 1 cM^3 van matig sterke hyperisotonische oplossingen van NaI (3 pCt.), NaCl (1.16 pCt.) en rietsuiker (10 pCt.) in het bloedvaatstelsel van kikvorschen. Door deze oplossingen zagen wij vele lichaampjes zoozeer gezwollen, dat zij den bolvorm hadden aangenomen. De verklaring van dit feit is niet moeielijk te vinden: er treedt zout of suiker in de bloedlichaampjes; de hoeveelheid van deze stoffen is zoo aanzienlijk, dat de lichaampjes, om het wateraantrekkend vermogen van hun inhoud gelijk aan dat der omgeving te maken, water moeten opnemen en zwellen.

Een ander argument, dat men voor de permeabiliteit der

---

*) *Verslagen en Mededeelingen* enz. 3e Reeks. Deel VII, p. 19—21.

roode bloedlichaampjes in het circuleerende bloed kan aanvoeren, is de geringe verhooging in wateraantrekkend vermogen, die de bloedlichaampjes van het paard ondergaan, na injectie van 9 liter NaCl-oplossing van 3.3 pCt. en ook na herhaalde bloedonttrekkingen (zie tabel XVII). Vooral dit argument mag men in deze belangrijk noemen.

Voorts hebben de proeven van KLIKOWICZ *) bewezen, dat bij injectie van Na_2SO_4 in de bloedbaan van honden, soms aanzienlijke hoeveelheden sulfaat in de bloedlichaampjes achterblijven.

Een dergelijk resultaat hebben ook wij verkregen en wel na inspuiting van 7 liter Na_2SO_4-oplossing van 5 pCt. bij een paard. Merkwaardigerwijze vonden we, dat hierbij het sulfaat-gehalte der bloedlichaampjes niet *toe-* maar *af*genomen was. Iets dergelijks vonden wij ook in ons vorig opstel bij het gedefibrineerde bloed.

Wij kunnen ons niet ontveinzen, dat de argumenten, die we hebben aangevoerd voor de permeabiliteit der bloedlichaampjes van het circuleerende bloed, niet zoo streng overtuigend zijn als die, welke wij hebben kunnen aanwijzen bij het gedefibrineerde. Toch hebben wij voor ons de overtuiging verkregen, dat de bloedlichaampjes van het circuleerende bloed inderdaad voor zouten permeabel zijn.

B. *Het wateraantrekkend vermogen der roode bloedlichaampjes bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie.*

In aansluiting met het bovenstaande, wenschten wij te onderzoeken, of het bloed bij hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie, in dezelfde Na Cl-oplossingen een begin van kleurstof uittreding vertoonde als het oorspronkelijke bloed.

---

*) DU BOIS-REYMOND's *Archiv.* 1886. S. 518.

IV

**mmische *plethora*, *hydraemi*
ht, met verwijzing naar de
eerste hoofdstuk.**

)$_4$-opl. van 5 °/$_0$ (proe

)$_4$-opl. van 5 °/$_0$ (proe

-opl. van 3 3 °/$_0$ (proe

)$_3$-opl. van 4 °/$_0$ (proe

)$_4$-opl. van 0.5 °/$_0$ (proe

aCl-opl. van 3 °/$_0$ (proe

a I-opl. van 3 °/$_0$ (proe

a_2SO_4-opl. van 10 °/$_0$ (proe

dontlasting (proef I, pag. 40

dontlasting (proef II, pag. 40

gr. pilocarpine en 6.5 cgr. ese
(pr

gr. pilocarpine en 6.5 cgr. ese
(pro

proeven werden verricht met paarden- en hondenbloed l gelijktijdig met de experimenten over het plasma. roefdieren waren dan ook dezelfde als die, welke voor itstbedoelde onderzoekingen werden gebruikt. Dit was daarom zeer gewenscht, omdat wij dan met zekerheid en, in hoeverre de bloedlichaampjes, na de injecties en astingen, werkelijk in een veranderd medium zich beden. In de nevenstaande tabel (XVII), die de resultaten proeven bevat, is telkens naar de overeenkomstige proef n het eerste hoofdstuk verwezen.

Uit deze tabel blijkt, dat na inspuiting van hyper- en ypisotonische zoutoplossingen in de bloedbaan, de lichaampjes over het algemeen in dezelfde NaCl-oplossingen een begin van kleurstofverlies vertoonen als in het bloed, dat vóór de injectie werd ontlast. Slechts na inspuiting van een groote hoeveelheid eener geconcentreerde oplossing van Na_2SO_4 (2) en van NaCl (3), blijkt het uittreden van kleurstof in een eenigszins hoogere concentratie plaats te hebben dan vóór de injectie ; m. a. w. de bloedlichaampjes zijn een weinig in wateraantrekkend vermogen gestegen. Deze stijging is echter vrij spoedig hersteld ; in het eerste geval na 2, in het tweede geval na 4 uren.

Verder leert de tabel, dat door aanzienlijke bloedontlasting het wateraantrekkend vermogen der bloedlichaampjes een geringe verhooging ondergaat, om na eenigen tijd weer tot den norm terug te keeren, en dan weer te stijgen na een daaropvolgende bloedontlasting. Misschien staat deze verhooging van het wateraantrekkend vermogen wel in eenig verband met het feit, dat de compensatie der salpeterwaarde van het plasma zich niet geheel liet verklaren door vermindering van het eiwit- en vermeerdering van het chloorgehalte.

Bij anhydraemie blijkt het wateraantrekkend vermogen der bloedlichaampjes geheel onveranderd te zijn gebleven.

Het bovenstaande kan men aldus samenvatten :

Bij hydraemische plethora, teweeggebracht door hyperisotonische of door hypisotonische zoutsoluties, bij hydraemie en bij anhydraemie, hebben de roode bloedlichaampjes geen

verandering van wateraantrekkend vermogen ondergaan. Indien de bloedlichaampjes in het circuleerende bloed werkelijk voor zouten permeabel zijn, mag men dus aannemen, dat er een wisseling heeft plaats gehad tusschen de bestanddeelen van het plasma en die der bloedlichaampjes, en wel in isotonische verhouding.

Tegen deze conclusie schijnt de verhooging van het wateraantrekkend vermogen der lichaampjes, na injectie van groote hoeveelheden NaCl en Na_2SO_4, te pleiten. De verhoogingen zijn echter gering. Maar — zal men opmerken — wie geeft de verzekering, dat bij de proeven, waarbij het wateraantrekkend vermogen der bloedlichaampjes is gebleken volkomen onveranderd te zijn gebleven, dit resultaat niet daaraan is toe te schrijven, dat de inhoud der bloedlichaampjes hierbij een zoo onbeduidende verandering had ondergaan, dat deze door onze methode niet kon aangetoond worden? Onze conclusie is dus stricto sensu niet volkomen gerechtvaardigd. Dit was ze *wel* bij het gedefibrineerde bloed. En toch zijn wij geneigd, haar als juist aan te nemen: immers, is het niet onwaarschijnlijk, dat een zoo eenvoudige wet wél voor het gedefibrineerde en niet voor het circuleerende bloed zou gelden en dan, in hoeverre is het bloedlichaampje van het versche defibrineerde bloed *afgestorven*?

III. Résumé.

Het bovenstaande onderzoek samenvattende, komen wij tot de volgende resultaten.

1. De totale wateraantrekkende kracht van het serum hebben we teruggevonden in de som der wateraantrekkende krachten zijner bestanddeelen.

Meer dan de helft van het wateraantrekkend vermogen komt op rekening van het Na Cl; verder een aanzienlijk deel op rekening der carbonaten en eiwitstoffen. Het aandeel der phosphaten en sulfaten en van de druivesuiker is gering.

2. Door bepaling van de hoeveelheid zuur, die noodig

is om het eiwit van albuminaten neer te slaan, zal men het moleculair gewicht van het bijbehoorende eiwit kunnen berekenen (zie pag. 380). Een eerste vereischte hierbij is natuurlijk, dat het albuminaat volkomen zuiver zij, liefst in kristalvorm verkeere.

Het verkregen cijfer kan gecontrôleerd worden door hetgeen men bij toepassing van de methode van HUGO DE VRIES verkrijgt *).

3. *a.* Na opwekking van hydraemische plethora bij paarden en honden, door inspuiting van sterke *hyperisotonische* oplossingen van Na_2SO_4, $NaCl$ en $NaNO_3$ in zoo groote volumina, dat het wateraantrekkend vermogen van het plasma aanzienlijk zou hebben moeten stijgen, indien de bloedlichaampjes en de wanden van het bloedvaatstelsel volkomen impermeabel waren voor water en voor zouten, krijgt het plasma uiterst spoedig (in onze gevallen binnen 1 tot 2 uren) zijn oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen terug (zie p. 368, 382, 387, 390, 399, 400 en 401).

b. Na opwekking van hydraemische plethora bij paarden, door inspuiting van een zwakke *hypisotonische* oplossing van Na_2SO_4 en van $NaCl$, in zoo groote volumina, dat het wateraantrekkend vermogen van het plasma aanzienlijk zou moeten gedaald zijn, indien de bloedlichaampjes en de wanden van het bloedvaatstelsel volkomen impermeabel waren voor water en voor zouten, krijgt het plasma zeer spoedig (in onze gevallen binnen 10 minuten) zijn oorspronkelijk wateraantrekkend vermogen terug (zie p. 392).

c. Tot het herstel van het wateraantrekkend vermogen, bedoeld in *a* en *b*, blijken verschillende bestanddeelen, zoowel van het oorspronkelijke bloed als van de geïnjicieerde oplossing en van het weefselvocht saam te werken.

Terwijl namelijk door en na de injectie van hyperisotonische oplossingen het wateraantrekkend vermogen van het plasma wegens het achtergebleven zout aanzienlijk zou moe-

*) Zie o. a. de bepaling van het molec. gew. van raffinose, in het *Maandbl. v. Natuurwetensch.* 15e Jaarg. p. 8.

ten gestegen zijn en door injectie van hypisotonische oplossingen wegens het achtergebleven water gedaald, werken onmiddellijk na de injectie $NaCl$, $NaSO_4$, Na_2CO_3, eiwit, water en waarschijnlijk ook andere stoffen, die wij niet onderzocht hebben, samen, om door onderlinge uitwisseling genoemde stijging, resp. daling te compenseeren.

Opmerkenswaardig is, dat het plasma, 2 uren na de injectie, minder water bevat dan vóór de injectie. Dit feit, in verband met de relatieve vermeerdering der roode bloedlichaampjes, rechtigt tot het besluit, dat, tengevolge van de injectie van hyper- en hypisotonische oplossingen, het geheele bloed-quantum van het dier voor eenigen tijd is afgenomen (zie p. 399).

d. Ongeveer tegelijk met het wateraantrekkend vermogen, ziet men het plasma zijn oorspronkelijke samenstelling weer bereiken: zoodat men allicht tot het denkbeeld zou komen, het herstel van het wateraantrekkend vermogen als het *gevolg daarvan* aan te zien. Dit denkbeeld zou echter reeds daarom minder juist zijn, omdat op tijden, waarop het plasma zijn oorspronkelijke samenstelling nog niet heeft bereikt en nog afwijkingen daarin voorhanden zijn, die onze methode voor de bepaling der wateraantrekkende kracht zeker zou hebben kunnen aantoonen, het wateraantrekkend vermogen *wel* tot de oorspronkelijke waarde is teruggekeerd (tab. I op p. 369; tab. VII op p. 385; tab. IX op p. 389; tab. X op p. 395).

e. De voorstelling van Cohnheim (*Vorl. über Allg. Path.* 2e Aufl. II. S. 443), als zou bij hydraemische plethora de vermeerdering van secretie en transsudatie veroorzaakt worden door volume-vergrooting van het bloed, zonder meer, moet, naar de resultaten onzer proeven, in den volgenden zin worden aangevuld.

Niet alleen de volume-vergrooting van het bloed heeft invloed op de secretie en transsudatie, maar ook de absolute hoeveelheid van het geïnjicieerde *zout*.

Immers, bij inspuiting van hyperisotonische zoutoplossingen, treedt onmiddellijk na, zelfs tijdens de injectie, aanzienlijke urine-secretie en dunne defaecatie op. Bij het gebruik van

hypisotonische oplossingen neemt men dit niet waar. Men kan 3 uren en langer na de injectie wachten; men ziet geen urineloozing, geen dunne defaecatie.

Daar nu het overvloedige vocht de bloedbaan toch heeft verlaten, moet het in de weefsels zijn getranssudeerd. Om het kort uit te drukken: na injectie van hyperisotonische oplossingen, verhoogde secretie; na injectie van hypisotonische soluties, verhoogde transsudatie. De oorzaak van dit verschil laat zich verklaren door de neiging van het plasma, zijn wateraantrekkend vermogen constant te houden (zie p. 393).

4. Bij *hydraemie*, teweeggebracht door aanzienlijke bloedontlastingen (paard), blijkt het wateraantrekkend vermogen van het plasma ten opzichte van dat van het oorspronkelijke plasma onveranderd te zijn gebleven, in weerwil van de aanzienlijke vermindering, die het specifiek gewicht van het plasma door die bloedontlastingen heeft ondergaan.

De compensatie der wateraantrekkende kracht wordt grootendeels tot stand gebracht, doordien naast een aanzienlijke daling van het eiwitgehalte, een rijzing van het chloorgehalte plaats heeft (zie tabel XIII en XIV).

5. Bij *anhydraemie*, teweeggebracht door subcutane injectie van pilocarpine en eserine (paard), blijkt het wateraantrekkend vermogen van het plasma ten opzichte van dat van het oorspronkelijke plasma onveranderd te zijn gebleven, in weerwil van de onttrekking van aanzienlijke hoeveelheid vocht. Deze onveranderlijkheid van het wateraantrekkend vermogen moet voor een deel daaraan worden toegeschreven, dat het gehalte van het eiwit toeneemt en dat der chloriden afneemt (zie tabel XV en XVI).

6. De bloedlichaampjes van het circuleerende bloed zijn voor zouten permeabel (p. 411 en 412).

7. Het wateraantrekkend vermogen der roode bloedlichaampjes ondergaat, door opwekking van hydraemische plethora (door hyper- en hypisotonische oplossingen), hydraemie en anhydraemie, weinig of geen verandering (tabel XVII); hetgeen, indien de permeabiliteit, bedoeld onder „5", aanzienlijk is, recht geeft tot het besluit, dat tusschen de

bestanddeelen der bloedlichaampjes en die van het plasma een uitwisseling heeft plaats gehad in isotonische verhoudingen (p. 414).

BESLUIT.

De meest belangrijke feiten, die het bovenstaande onderzoek heeft aan het licht gebracht, zijn:

1. *De wand van het vaatstelsel heeft de eigenschap, het wateraantrekkend vermogen van het plasma constant te houden.*

Of deze eigenschap aan de vaten van *alle* organen toekomt, en of hier de capillaria *alleen* in het spel zijn, enz., hebben we nog niet nagegaan. Zeker is het, dat de niervaten een belangrijke rol spelen en zeer waarschijnlijk, dat de vaatstelsels der verschillende organen zich ten opzichte van zoutoplossingen verschillend gedragen. Dit hebben injectie proeven van COHNHEIM aangetoond. Deze toch vond constant, dat bij injectie van groote hoeveelheden eener NaCl-oplossing in de bloedbaan van honden, in sommige organen geen, in andere wel transsudaat was ontstaan *).

2. *De bloedlichaampjes van het circuleerende bloed bezitten de eigenschop, hun wateraantrekkend vermogen constant te houden. Hetzelfde vonden we vroeger voor de lichaampjes van het gedefibrineerde bloed.*

Inderdaad mag het middel, waarvan de natuur zich blijkt te bedienen, om na ingrijpende veranderingen van het bloed, deszelfs bestanddeelen te regelen en weer tot de vroegere maat terug te brengen, hoogst doelmatig worden genoemd.

Bij een dergelijke uitspraak mag de wetenschap zich echter niet neerleggen. Zij wenscht een verklaring. Deze kan de physica of chemie ons op het oogenblik niet geven.

Wij mogen aannemen, dat we hier te doen hebben met een eigenschap van levende cellen, een eigenschap, die wij, wel is waar, niet doorgronden, maar waarvan de physiologie ons talrijke analoga aanbiedt.

---

*) VIRCHOW's *Archiv* B. LIX. (1877). S. 125.

Men denke slechts aan de merkwaardige eigenschappen van het glomerulus-epithelium; men denke slechts aan het vermogen van de epitheelcellen der tubuli contorti, om van den kant der tunica propria stoffen uit het bloed op te nemen, die te verzamelen als specifieke urinebestanddeelen en ze dan in het lumen van het buisje af te geven; men denke aan de eigenschap van maagepithelium, om aan den eenen kant bestanddeelen aan het alkalische bloed- of weefselvocht te onttrekken en aan den anderen kant zoutzuur af te geven; men denke aan de interessante proeven van HOFMEISTER, die aangetoond hebben, dat aan de *levende* mucosa van maag en darm de eigenschap toekomt, pepton tot eiwit te regenereeren en aan de daarop gevolgde proeven van SALVIOLI. Bracht deze pepton in den darm en voerde hij bloed door een tak der *a.* meseraïca, dan ging het pepton over in eiwit. Vermengde hij echter het pepton met het bloed en voerde het dan door de *a.* meseraica van den ledigen darm, dan werd het pepton niet omgezet *). Daaruit volgde, dat de levende cellen wel de genoemde functie verrichtten, wanneer het pepton zich bevond tegen het naar het darmlumen gekeerde gedeelte der cel, maar niet wanneer het pepton van de andere zijde werd aangevoerd. En eindelijk, om nog één voorbeeld te noemen. Welke omzettingen moeten al niet plaats hebben in de epitheliumcel der melkklier, zal deze het doelmatige secretum kunnen leveren, dat zoozeer in samenstelling van het bloed verschilt; hoe fijn moet die functie niet geregeld zijn, opdat het secretum steeds dezelfde samenstelling verkrijge.

En zoo zien wij, dat verschillende soorten van cellen, in verschillende lichaamsdeelen haar eigen functie hebben. De arbeid, noodig om het individu en de soort in stand te houden, is onder haar verdeeld. Hoe lager het organisme staat, des te minder verdeeling van arbeid, en zoo weet men, dat de hoogsteenvoudige ééncellige wezens aan hun

---

*) DU BOIS-REYMOND's *Archiv.* 1880. Suppel. S. 112.

vegetatieve functiën zelfs nog psychische processen verbinden *).

Wanneer men dit alles bedenkt, kan men dan nog verbaasd staan, wanneer het blijkt, dat aan het roode bloedlichaampje is opgedragen, zijn eigen wateraantrekkend vermogen, en aan den vaatwand, dat van het plasma constant te houden?

Physiol. Laborat. der Rijksveeartsenijschool,
Februari 1890.

---

*) Zie o. a. Pflüg. *Archiv.* B. II. 1869 S. 307.

INHOUD.

Inleiding . . . . . pag. 364.

I. Regeling van de bestanddeelen van het plasma. " 366—410.

A. Hydraemische Plethora. . . . . " 366—402.

a. Injectie van hyperisotonische oplossingen. " 367.

b. Injectie van hypisotonische oplossingen . " 391.

c. Het totale volume bloed bij de proeven onder a en b . . . . . " 396.

d. Injecties bij honden . . . . . " 399.

B. Het bloedplasma bij Hydraemie . . . . " 402.

C. Het bloedplasma bij Anhydraemie . . . . " 407.

II. Regeling van de bestanddeelen der roode bloedlichaampjes. . . . . " 410—414.

A. Permeabiliteit der roode bloedlichaampjes . " 410.

B. Het wateraantrekkend vermogen der roode bloedlichaampjes bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie . " 412.

III. Résumé . . . . . " 414.

Besluit . . . . . " 418.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN **Dr. R. SISSINGH**,

GETITELD:

METINGEN OVER KERR'S VERSCHIJNSEL BIJ MAGNETISATIE EVENWIJDIG AAN HET SPIEGELEND OPPERVLAK.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1890).

De verhandeling van den Heer SISSINGH, die aan de Akademie ter plaatsing in hare werken is aangeboden, bevat het verslag van een proefondervindelijk onderzoek over het door KERR ontdekte verschijnsel, dat de magnetisatie van een spiegelend ijzeroppervlak invloed heeft op het daardoor teruggekaatste licht. De schrijver heeft zich thans tot de zoogenaamde aequatoriale reflectie bepaald en is met een onderzoek over de polaire terugkaatsing zoo ver gevorderd, dat hij de uitkomsten daarvan weldra zal kunnen mededeelen.

Ofschoon na KERR verscheidene natuurkundigen zich met het onderwerp hebben beziggehouden, laat onze kennis nog veel te wenschen over en is nog geene overeenstemming tusschen de theorie en de waarnemingen verkregen. Wij verheugen er ons daarom over, dat een nieuw onderzoek heeft plaats gehad, vooral nu dit verricht is door iemand, die door zijne vroegere metingen over de terugkaatsing door metalen geheel voorbereid was, het met goed gevolg ter hand te nemen.

Men kan rekenen, dat het verschijnsel bekend is, als men bij elken hoek van inval en bij elke wijze van magnetisatie van den spiegel de *sterkte* van de magnetische lichtcomponent en de *phase* heeft bepaald. De theorie van den tweeden ondergeteekende, door den Heer VAN LOGHEM uitgewerkt, geeft het middel aan de hand om beide grootheden à priori te berekenen. Met de aldus verkregen waarden waren echter de uitkomsten van Dr. KAZ, die het eerst bij de polaire reflectie intensiteit en phase experimenteel bepaalde, niet in overeenstemming. De Heer SISSINGH komt tot dezelfde slotsom, maar zijne metingen bij een tiental invalshoeken, van 86^0 tot 6^0, leeren, dat de afwijkingen zich hiertoe bepalen, dat de theorie de phase een bepaald constant bedrag fout levert. Mocht dit ook bij de polaire terugkaatsing bevestigd worden, dan zou dit voor de verbetering der theorie eene belangrijke vingerwijzing zijn.

Evenals de Heer KAZ, heeft ook de schrijver de gezochte grootheden uit het bedrag der minimum- en nuldraaiingen van den polarisator en den analysator afgeleid. Daarbij heeft hij eene groote nauwkeurigheid bereikt door eene methode, die ook reeds vroeger door hem werd gevolgd. Vóór den polarisator stond namelijk een collimator en achter den analysator een op oneindigen afstand ingestelde kijker; men neemt dan in het gezichtsveld een donkeren band waar, die zich bij elke verplaatsing der Nicols verschuift en dien men bij de meting der minimum- en nuldraaiingen zoo donker mogelijk trachtte te maken en in het midden van het veld bracht. Dat nu op deze wijze voor de kleine draaiingen, die hoogstens 4′ bedroegen, waarden verkregen konden worden, die tot op ongeveer $^1/_3$′ betrouwbaar zijn, is aan de nauwgezetheid te danken, waarmede de waarnemingsmethode werd onderzocht. Wat dit laatste betreft, stippen wij slechts één punt aan. Bij de definitieve proeven werden de nul- en minimumdraaiingen verkregen door eerst bij eene positieve en dan bij eene negatieve magnetisatie de standen der Nicols op te zoeken, voor welke de lichtsterkte 0 of een minimum wordt. De standverandering, die men dan bij den overgang van de eene magnetisatie tot de andere

aan de Nicols moet geven, zal het dubbel der gezochte draaiing zijn, indien men weet, dat deze bij omkeering der magnetisatie alleen van richting, maar niet in grootte verandert. Dit werd bewezen door een uitvoerig onderzoek bij één invalshoek, waarbij beurtelings de spiegel gemagnetiseerd en ontmagnetiseerd werd en in het laatste geval de uitdoovingsstanden der Nicols werden opgezocht. De ontmagnetisatie geschiedde door steeds zwakkere stroomen van afwisselende richting door de windingen van den electromagneet te leiden; dat het magnetisme voldoende was verdwenen werd hierdoor bewezen, dat dezelfde uitdoovingsstanden werden verkregen, welke richting ook de laatste zwakke stroom had. Bovendien bleken de uitdoovingsstanden der Nicols na de ontmagnetisatie overeen te stemmen met die, welke gevonden werden, als de ijzerspiegel door een zilverspiegel met denzelfden stand werd vervangen.

Het bovenstaande moge voldoende zijn om een denkbeeld te geven van de nauwgezetheid, waarmede de Heer Sissingh heeft gewerkt. Wij achten zijn onderzoek in alle opzichten voortreffelijk en stellen gaarne voor, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen.

Voor zij gedrukt wordt, wenschen wij echter een paar opmerkingen omtrent de wijze, waarop de positieve en negatieve phase-verschillen gedefinieerd worden, aan den schrijver mede te deelen.

J. D. VAN DER WAALS.
H. A. LORENTZ.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN Dr. J. DE VRIES,

GETITELD:

„CYCLISCHE VEELHOEKEN OP VLAKKE KUBISCHE KROMMEN".

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN F. J. VAN DEN BERG.

Ingevolge de aan ons verstrekte opdracht hebben wij de eer u het volgende mede te deelen.

Schrijver neemt op eene vlakke kubische kromme drie collineaire buigpunten, en projecteert die op deze kromme uit een harer punten; dan ontstaan er de inflexie-tripels van KÜPPER; dat is, het tangentiaalpunt van elk dezer punten ligt op de verbindingslijn der beide andere. Evenzoo beschouwt schrijver in de kubische kromme beschreven veelhoeken met de eigenschap, dat elke zijde het tangentiaalpunt van het *naastgelegen* hoekpunt bevat (§ 1) of van het *voor-naast-gelegen* hoekpunt (§ 2) of van het *tegenover-liggend* hoekpunt (§ 3). De toppen van zulke *cyclische veelhoeken* behooren tot involutorische puntengroepen.

Om hiertoe te geraken gebruikt schrijver, volgens BOBEK, de betrekkingen in θ-functiën tusschen de homogeene coördinaten der kubische kromme. De parameters u van de $3n$ snijpunten der kromme met eene kromme van den n-den

graad, moeten, in verband met de argumenten ω en ω_1 der θ-functiën, voldoen aan

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

Voor de bestaanbare buigpunten is dus

$$3u \equiv 0 \pmod{\omega},$$

zoodat de parameters zijn $0, \frac{1}{3}\omega, \frac{2}{3}\omega$. Schrijver blijft nu telkens bij denzelfden tak, zoodat bij de twee-takkige kromme alleen de serpentine wordt beschouwd, doch niet het ovaal, waartoe echter de verkregen uitkomsten gemakkelijk kunnen worden uitgestrekt.

Schrijver leidt nu de voorwaarde af, dat twee punten v en w met het tangentiaalpunt van een derde punt op een rechte lijn liggen $2u \equiv v + w \pmod{\omega}$, en verder die, dat drie punten een cyclischen driehoek vormen. Hunne projectiën op de kromme uit een buigpunt vormen wederom een cyclischen driehoek; en de toppen van deze twee cyclische driehoeken vormen, te zamen met de buigpunten, eene bijzondere desmische conf. 9_3. Algemeen: bevatten $n-1$ zijden van een n-hoek in de kubische kromme elk het tangentiaalpunt van den voorgaanden top, zoo is dit ook met de laatste zijde het geval.

De voorwaarden der cyclische vierhoeken van dit opstel voeren tot eene osculatiegroep O_2 der tweede orde; en deze bepaalt weder vijf zulke vierhoeken.

De voorwaarden der cyclische vijfhoeken voeren tot eene osculatiegroep der vierde orde O_4; en deze levert elf paren van zulke vijfhoeken, die twee aan twee perspectief gelegen zijn ten opzichte van het tangentiaalpunt van het elfde punt der groep, en de diagonalen van den eenen vijfhoek bevatten de tangentiaalpunten van den anderen.

Uit de voorwaarden van de cyclische zeshoeken blijkt, dat er twee verschillende soorten zijn. De eerste soort bevat drie maal zeven zeshoeken met concurrente hoofddiagona-

len; die der tweede soort kunnen tot drietallen vereenigd worden, waarbij de drie figuren op cyclische wijze van elkander afhangen, en de tangentiaalpunten der toppen van elken zeshoek op de nevendiagonalen van een tweeden liggen, terwijl daarentegen zijne nevendiagonalen de tangentiaalpunten der toppen van den derden zeshoek bevatten.

Bij de voorwaarden van den cyclischen n-hoek voert schrijver de functie

$$\varrho(n) = \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]$$

in, waarbij

$$2\varrho(n-1) = \varrho(n+1) - \varrho(n)$$

is. Elke diagonaal van den cyclischen n-hoek snijdt de kromme in het tangentiaalpunt van een punt, dat tot dezelfde cyclische groep behoort; alleen is zulks niet het geval, wanneer een punt met zijn tangentiaalpunt zamenvalt tot een *plethorisch* punt. Uit den cyclischen n-hoek kan men een anderen afleiden, die, wanneer n deelbaar is, een aantal zijden kan hebben, gelijk aan een deeler van n; als n even is, kunnen alle hoofddiagonalen door een punt der kromme gaan. Is n het produkt van twee priemgetallen p en q, zoo zijn $\varrho(p)$ en $\varrho(q)$ eveneens priemgetallen, en deelers van $\varrho(n) = r\varrho(p)\varrho(q)$; de cyclische groep moet dan de toppen van cyclische p-hoeken en van cyclische q-hoeken bevatten. De cyclische groep bezit dan drie soorten van cyclische n-hoeken. Van de eerste soort behooren de toppen tot een r-puntige groep; van de tweede soort tot een groep van $\varrho(p$ $\varrho(q)$ punten, zóó dat elk punt van een groep, overeenkomend met een p-hoek, wordt aangevuld tot een groep, die tot een q-hoek behoort, en omgekeerd; van de derde soort zijn zij niet in een dier groepen bevat.

Schrijver bewijst nu een stelling uit de getallenleer. Is p een priemgetal > 2, en $a + b$ een veelvoud van p^k, dan is $a^{p^l} + b^{p^l}$ altijd deelbaar door p^{k+l}. Daaruit leidt hij als voorbeelden af:

$(2^5)^{11} + 1$ is deelbaar door 11^2; er zijn dus cyclische 55-

hoeken, waarvan de toppen behooren tot een groep, gevormd uit elf osculatiegroepen O_4.

$(2^2)^5 + 1$ en $\frac{1}{3}(2^{20}-1)$ zijn deelbaar door 5^2.

$(2^3)^{3k-1} + 1$ is deelbaar door 3^{k+1}. Er zijn dus, in het bijzonder, cyclische negenhoeken, waarvan de toppen uit drie inflexie-tripels bestaan.

Wanneer men met EULER het aantal getallen, kleiner dan en ondeelbaar met $\varrho(n)$, voorstelt door $\varphi[\varrho(n)]$, dan behoort elk punt eener kubische kromme tot $\varphi[\varrho(n)]$ onderscheidene cyclische n-hoeken, welker toppen een involutorische groep vormen, die *of* een osculatiegroep, *of* een centraalgroep is, *of* uit zulke groepen is zamengesteld.

In § 2 gaat schrijver over tot het tweede geval.

Bij een vierhoek komt de vorige cyclische vierhoek terug.

Bij een vijfhoek dier *tweede orde* verkrijgt men vier cyclische vijfhoeken, die echter twee aan twee zamenvallen.

Bij een n-hoek der tweede *orde* voert schrijver de functie $\sigma(p) = \frac{1}{5}[4^p - (-1)^p]$ in, en verkrijgt dan, dat het aantal punten der cyclische groep wordt aangewezen,

voor een $4p$-hoek door $5\ \sigma(p)$;
voor een $(4p+1)$-hoek door $2\ \sigma(2p) + (-1)^p\, 2\ \sigma(p) + 1$;
voor een $(4p+2)$-hoek door $2\ \sigma(2p) + 1$;
voor een $(4p+3)$-hoek door $2\ \sigma(2p+1) + (-1)^{p+1} 2\sigma(p+1)$.

Hierbij valt op te merken, dat een cyclische $(4p+2)$-hoek der tweede orde slechts van een parameter afhangt, terwijl de drie andere soorten twee parameters bezitten.

Wat de cyclische n-hoeken van hooger orde betreft, merkt schrijver in § 3 op, dat de behandeling in het algemeen op onoverkomelijke bezwaren schijnt te stuiten, behalve alleen bij die n-hoeken, welke schrijver noemt *tegenveelhoeken*, en waarbij elke top van den veelhoek zijn tangentiaalpunt heeft *of* op de overstaande zijde bij n oneven, *of* bij n even op een der zijden, die elkander alsdan in het tegenoverliggende hoekpunt snijden.

Bij een $(2n+1)$-hoek behoort elk punt der kromme tot $\frac{1}{2}\varphi(2n+1)$ onderscheidene tegen- $(2n+1)$-hoeken.

Bij een $2n$-hoek voert schrijver de functie

$$\chi(n) = \frac{1}{2}\{3^n + (-1)^n\}$$

in, en vindt dan, dat alle door diagonalen afgeleide veelhoeken het snijpunt der hoofddiagonalen met den gegeven veelhoek gemeen hebben. Elk punt der kromme behoort tot $\varphi[\chi(n)]$ onderscheidene tegen-n-hoeken; bij elke daarvan komen de hoofddiagonalen in een punt der kromme te zamen.

In deze belangrijke verhandeling gebruikt schrijver uitkomsten en methoden vroeger door hem behandeld, en sluit zij zich dus aan de vorige. Wij aarzelen dan ook niet de Afdeeling aan te raden, ook dit opstel in hare Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Leiden en *Hilversum*,
Maart 1890.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

CYCLISCHE VEELHOEKEN

OP

VLAKKE KUBISCHE KROMMEN.

DOOR

Dr. JAN DE VRIES.

Worden drie collineaire buigpunten eener vlakke kubische kromme uit een punt dier kromme op haar geprojecteerd, dan verkrijgt men drie punten, welke de eigenschap bezitten, dat elke verbindingslijn van twee hunner het tangentiaalpunt van het derde punt bevat *).

In de volgende bladzijden beschouw ik meer algemeen veelhoeken, welke zoodanig in eene kubische kromme zijn beschreven, dat elke zijde het tangentiaalpunt van het voorgaande hoekpunt insnijdt; daarbij blijkt, dat de toppen van zulk eenen *cyclischen* veelhoek tot bekende involutorische groepen behooren. De tweede § bevat een onderzoek naar cyclische veelhoeken, waarvoor het tangentiaalpunt van het i^{de} hoekpunt gelegen is op de lijn, welke het $(i + 2)^{de}$ en $(i + 3)^{de}$ hoekpunt verbindt, terwijl in § 3 de gevallen worden nagegaan, dat het tangentiaalpunt op de overstaande zijde, of, voor een even aantal zijden, op eene der beide overstaande zijden ligt.

---

*) Eene uitvoerige beschouwing van zulke drietallen van punten vindt men in DURÈGE's werk *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (TEUBNER, 1871); zij worden daar „inflexietripels" genoemd en als vinding van KÜPPER vermeld (blz. 286 enz.).

§ 1.

1. De homogene coördinaten van elk punt der kubische kromme met de kanonische vergelijking

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = c\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots\ldots (1)$$

kunnen als volgt worden voorgesteld door dubbel periodieke functies van een reëelen parameter u *):

$$\left.\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \Theta_1\left(u-\frac{2}{3}\omega\right)\Theta_1\left(u-\frac{1}{3}(2\omega+\omega')\right)\Theta_1\left(u-\frac{1}{3}(2\omega-\omega')\right)\\
\varrho x_2 &= \Theta_1\left(u+\frac{2}{3}\omega\right)\Theta_1\left(u+\frac{1}{3}(2\omega+\omega')\right)\Theta_1\left(u+\frac{1}{3}(2\omega-\omega')\right)\\
\varrho x_3 &= \Theta_1(u)\,\Theta_1\left(u-\frac{1}{3}\omega'\right)\Theta_1\left(u+\frac{1}{3}\omega'\right)
\end{aligned}\right\} .(2)$$

Tengevolge van deze substitutie moeten de parameters $u_i\,(i = 1$ tot $3\,n)$, welke bij de snijpunten der kromme met eene kromme van den graad n behooren, de volgende congruentie bevredigen †):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 \ (\text{mod. } \omega,\ \omega') \ldots (3)$$

Voor de bestaanbare buigpunten heeft men dus $3\,u \equiv 0$ (mod. ω), zoodat zij door de parameters 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ worden aangewezen.

Daar ik elk punt der kromme alleen met de overige punten van denzelfden tak in verband wil brengen, vergelijk ik de parameters enkel met den modulus ω, zoodat bij de tweetakkige kromme enkel de serpentine beschouwd wordt; de verkregen uitkomsten kunnen gemakkelijk tot de punten van het ovaal worden uitgebreid.

---

*) Zie Bobek *Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen* (Teubner, 1884), S. 249.

†) Verg. Bobek, S. 253, waar ook de omkeering dezer eigenschap wordt aangetoond.

De parameter u' van het tangentiaalpunt van u hangt met dezen samen door de congruentie

$$2u + u' \equiv 0 \pmod{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Daar verder door

$$u' + v + w \equiv 0 \pmod{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

de collineaire ligging der punten u', v, w wordt aangewezen, is

$$2u \equiv v + w \pmod{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

de voorwaarde, welke vervuld moet zijn, wanneer de punten v en w in eene rechte liggen met het tangentiaalpunt van u.

2. Is nu

$$\begin{cases} 2u_1 \equiv u_2 + u_3 \\ 2u_2 \equiv u_3 + u_1 \end{cases}$$

derhalve

$$2u_1 + 2u_2 \equiv 2u_3 + u_1 + u_2.$$

dan heeft men ook

$$2u_3 \equiv u_1 + u_2$$

en de punten u_1, u_2, u_3 vormen eenen cyclischen driehoek.

Uit de beide eerste congruenties volgt

$$3u_3 \equiv 3u_1$$

dus

$$u_3 \equiv u_1 + \frac{1}{3}\alpha\omega \quad (\alpha \equiv 1, 2)$$

en dan uit de derde

$$u_2 \equiv u_1 + \frac{2}{3}\alpha\omega$$

Elk punt u_1 levert dus slechts eenen reëelen cyclischen driehoek; immers de verwisseling van $\alpha = 1$ met $\alpha = 2$ heeft alleen tengevolge, dat u_2 door u_3 wordt vervangen.

Voor de parameters v_1, v_2, v_3 der punten, welke door projectie van u_1, u_2, u_3 uit het buigpunt $u \equiv 0$ worden gevonden, heeft men blijkbaar ($\alpha = 2$),

$$v_1 \equiv -u_1,\ v_2 \equiv -u_1 - \frac{1}{3}\omega,\ v_3 \equiv -u_1 - \frac{2}{3}\omega;$$

de drie nieuwe punten vormen dus mede een cyclischen driehoek. Verder is

$$\begin{cases} u_1 + v_2 + \frac{1}{3}\omega \equiv 0,\ u_2 + v_3 + \frac{1}{3}\omega \equiv 0,\ u_3 + v_1 + \frac{1}{3}\omega \equiv 0 \\ u_1 + v_3 + \frac{2}{3}\omega \equiv 0,\ u_2 + v_1 + \frac{2}{3}\omega \equiv 0,\ u_3 + v_2 + \frac{2}{3}\omega \equiv 0, \end{cases}$$

d. w. z. de punten u_1, u_2, u_3 worden uit de buigpunten $\frac{1}{3}\omega$ en $\frac{2}{3}\omega$ achtereenvolgens in de punten v_2, v_3, v_1 en v_3, v_1, v_2 geprojecteerd (Küpper; verg. Durège l. c.); de toppen der beide cyclische driehoeken vormen met de buigpunten eene bijzondere desmische configuratie 9_3 *).

3. Voldoen de parameters u_1, u_2, u_3, u_4 aan de congruenties:

$$\begin{cases} 2\,u_1 \equiv u_2 + u_3 \\ 2\,u_2 \equiv u_3 + u_4 \\ 2\,u_3 \equiv u_4 + u_1 \\ 2\,u_4 \equiv u_1 + u_2, \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

waarvan de vierde een gevolg is van de overige, omdat de som der vier congruenties eene identiteit levert, dan vormen de vier punten, 1, 2, 3, 4, waartoe die parameters behooren, eenen vierhoek, waarvan de zijden 12, 23, 34, 41 achtereenvolgens de tangentiaalpunten van 4, 1, 2, 3 dragen. Dat de vier congruenties een afhankelijk stelsel moeten

*) Zie J. de Vries, Over de desmische configuratie 9_3 (*Versl. en Med.* Deel. VI, bl. 175).

vormen, blijkt hieruit: de vier zijden kunnen als eene kromme van den vierden graad beschouwd worden, hetgeen eveneens geldt voor het stelsel der raaklijnen in de hoekpunten; snijden nu de rechten 23, 34 en 41 de tangentiaalpunten 1′, 2′ en 3′ in, zoodat de beide krommen van den vierden graad elf punten der kubische kromme gemeen hebben, dan moeten zij deze in hetzelfde twaalfde punt ontmoeten, m. a. w. het tangentiaalpunt 4′ ligt op de lijn 12.

Evenzoo bewijst men de algemeene eigenschap:

Bevatten $n-1$ zijden van eenen in de kubische kromme beschreven n-hoek elk het tangentiaalpunt van den voorgaanden top, dan geldt dit ook voor de laatste zijde.

4. Om het stelsel (7) op te lossen, stel ik

$$u_2 \equiv u_1 + t,$$

dan wordt

$$u_3 \equiv u_1 - t$$

en

$$u_4 \equiv u_1 + 3\,t,$$

zoodat de derde congruentie overgaat in

$$2\,u_1 - 2\,t \equiv 2\,u_1 + 3\,t.$$

Derhalve is $t \equiv \frac{1}{5}\,\alpha\,\omega$ ($\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4$), en heeft men voor u_2 de keus tusschen vier punten. Door substitutie vindt men:

$$\left\{\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + \frac{1}{5}\,\alpha\,\omega \\ u_3 &\equiv u_1 + \frac{4}{5}\,\alpha\,\omega \\ u_4 &\equiv u_1 + \frac{3}{5}\,\alpha\,\omega \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Nu rijst de vraag naar de beteekenis van het punt $u_5 \equiv u_1 + \frac{2}{5}\,\alpha\,\omega$. Uit (8) volgt

$$u_1 + u_3 \equiv u_2 + u_4 \equiv 2\,u_1 + \frac{4}{5}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_5,$$

d. w. z. het tangentiaalpunt van u_5 is het snijpunt der diagonalen van vierhoek $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$.

Verder blijkt uit $u_2 \equiv u_1 + \frac{1}{5}\,\alpha\,\omega$, dat $5\,u_2 \equiv 5\,u_1$; stelt men $5\,u_1 + r \equiv 0$, waar r het punt aanwijst, dat de kubische kromme gemeen heeft met de kegelsnede, welke haar in u_1 vijfpuntig osculeert, dan is ook $5\,u_2 + r \equiv 0$, zoodat de vier door u_1 bepaalde punten met dit punt tot eene *osculatiegroep der tweede orde* O_2 vereenigd zijn. *)

De vijf punten der O_2 *vormen nu de volgende cyclische vierhoeken, waarvan het snijpunt der diagonalen telkens met het tangentiaalpunt van het overblijvende punt samenvalt.*

$$\left.\begin{array}{llll}
u_1 & u_1 + \frac{1}{5}\,\omega & u_1 + \frac{4}{5}\,\omega & u_1 + \frac{3}{5}\,\omega \\
u_1 & u_1 + \frac{2}{5}\,\omega & u_1 + \frac{3}{5}\,\omega & u_1 + \frac{1}{5}\,\omega \\
u_1 & u_1 + \frac{3}{5}\,\omega & u_1 + \frac{2}{5}\,\omega & u_1 + \frac{4}{5}\,\omega \\
u_1 & u_1 + \frac{4}{5}\,\omega & u_1 + \frac{1}{5}\,\omega & u_1 + \frac{2}{5}\,\omega \\
u_1 + \frac{1}{5}\,\omega & u_1 + \frac{3}{5}\,\omega & u_1 + \frac{4}{5}\,\omega & u_1 + \frac{2}{5}\,\omega
\end{array}\right\} \quad \ldots (9)$$

5. Voor eenen cyclischen vijfhoek geldt:

$$\left.\begin{array}{l}
2\,u_1 \equiv u_2 + u_3 \\
2\,u_2 \equiv u_3 + u_4 \\
2\,u_3 \equiv u_4 + u_5 \\
2\,u_4 \equiv u_5 + u_1 \\
2\,u_5 \equiv u_1 + u_2
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

---

*) Zie J. DE VRIES, Over vlakke configuraties, welke uit de osculatiegroepen der kubische kromme kunnen gevormd worden. (*Versl. en Med.* Deel VI, bl. 236).

Wordt als boven $u_2 \equiv u_1 + t$ gesteld, dan komt

$$\begin{aligned} u_3 &\equiv u_1 - t \\ u_4 &\equiv u_1 + 3\,t \\ u_5 &\equiv u_1 - 5\,t, \end{aligned}$$

waardoor de vierde congruentie overgaat in $2u_1 + 6t \equiv 2u_1 - 5t$ of $11\,t \equiv 0$, dus

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + \frac{1}{11}\,\alpha\,\omega \\ u_3 &\equiv u_1 + \frac{10}{11}\,\alpha\,\omega \\ u_4 &\equiv u_1 + \frac{3}{11}\,\alpha\,\omega \\ u_5 &\equiv u_1 + \frac{6}{11}\,\alpha\,\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

De elf punten u, welke men voor $\alpha = 0$ tot 10 uit $u_1 + \frac{1}{11}\,\alpha\,\omega$ verkrijgt, voldoen aan de betrekking $11\,u + r \equiv 0$; zij vormen derhalve eene osculatiegroep der vierde orde.

Uit (11) vindt men:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_3 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{5}{11}\,\alpha\,\omega\right) \equiv 2\,u_{13} \\ u_2 + u_4 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{2}{11}\,\alpha\,\omega\right) \equiv 2\,u_{24} \\ u_3 + u_5 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega\right) \equiv 2\,u_{35} \\ u_4 + u_1 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{7}{11}\,\alpha\,\omega\right) \equiv 2\,u_{41} \\ u_5 + u_2 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{9}{11}\,\alpha\,\omega\right) \equiv 2\,u_{52} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (12)$$

d. w. z. de diagonalen van een cyclischen vijfhoek snijden

de kromme in de tangentiaalpunten van een tweeden tot dezelfde O_4 behoorenden cyclischen vijfhoek.

Dat de betrekking tusschen deze beide vijfhoeken wederkeerig is, blijkt uit:

$$\left.\begin{array}{l} u_{13} + u_{35} \equiv 2\,u_1 + \frac{2}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_2 \\ u_{24} + u_{41} \equiv 2\,u_1 + \frac{9}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_3 \\ u_{35} + u_{52} \equiv 2\,u_1 + \frac{6}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_4 \\ u_{41} + u_{13} \equiv 2\,u_1 + \frac{1}{11}\,\alpha\,\omega \quad 2\,u_5 \\ u_{52} + u_{24} \equiv 2\,u_1 + \alpha\ \ \omega \ \equiv 2\,u_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (13)$$

Ten slotte wordt de samenhang der beide vijfhoeken met het elfde punt der O_4, d. i. $u_0 \equiv u_1 + \frac{4}{11}\,\alpha\,\omega$, duidelijk uit:

$$\left.\begin{array}{l} u_{13} + u_4 \equiv 2\,u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_0 \\ u_{24} + u_5 \equiv 2\,u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_0 \\ u_{35} + u_1 \equiv 2\,u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_0 \\ u_{41} + u_2 \equiv 2\,u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_0 \\ u_{52} + u_3 \equiv 2\,u_1 + \frac{8}{11}\,\alpha\,\omega \equiv 2\,u_0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (14)$$

Elke osculatiegroep der vierde orde bevat dus elf paren van cyclische vijfhoeken; van elk paar liggen de beide vijfhoeken perspectief t. o. v. het tangentiaalpunt van het elfde punt der groep, terwijl de diagonalen van den eenen vijfhoek de tangentiaalpunten van den anderen insnijden.

6. Voor eenen cyclischen zeshoek levert de boven gebezigde handelwijze het stelsel:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + \frac{1}{21}\alpha\omega \\ u_3 &\equiv u_1 + \frac{20}{21}\alpha\omega \\ u_4 &\equiv u_1 + \frac{3}{21}\alpha\omega \\ u_5 &\equiv u_1 + \frac{16}{21}\alpha\omega \\ u_6 &\equiv u_1 + \frac{11}{21}\alpha\omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

De 21 punten $u \equiv u_1 + \frac{1}{21}\alpha\omega$, ($\alpha = 0$ tot 20), vormen blijkbaar zeven cyclische driehoeken met toppen

$$u_1 + \frac{1}{21}\beta\omega,\ u_1 + \frac{1}{21}(\beta+7)\omega,\ u_1 + \frac{1}{21}(\beta+14)\omega \quad (\beta = 0 \text{ tot } 3)$$

Zij kunnen ook gerangschikt worden in drie gesloten groepen van zeven punten, n. l.

$$\left\{\begin{aligned} & u_1 + \frac{1}{21}\gamma\omega \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+3)\omega \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+6)\omega \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+9)\omega \qquad (\gamma = 0,\ 1,\ 2) \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+12)\omega \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+15)\omega \\ & u_1 + \frac{1}{21}(\gamma+18)\omega \end{aligned}\right. \quad \ldots (16)$$

De punten van elke dezer drie groepen voldoen aan de betrekking $7\,u \equiv 7\,u_1 + \frac{1}{3}\gamma\,\omega$; stelt men nu $7u + v + w \equiv 0$ en $s + v + w \equiv 0$, dan is s de parameter van het centrum der involutie, welke op de gegeven kromme wordt ingesneden door de kubische krommen, die haar in u zevenpuntig osculeeren; voor elke waarde van γ duidt (16) derhalve eene centraalgroep der derde orde, S_3, aan *).

De boven gevonden groep van 21 punten ontstaat dus als men de punten eener S_3 aanvult tot inflexietripels, (verg. de eerste noot).

7. Nu volgt uit (15)

$$\begin{cases} u_1 + u_4 \equiv 2\,(u_1 + \frac{12}{21}\,\alpha\,\omega) \equiv 2\,u_{14} \\ u_2 + u_5 \equiv 2\,(u_1 + \frac{19}{21}\,\alpha\,\omega) \equiv 2\,u_{25} \\ u_3 + u_6 \equiv 2\,(u_1 + \frac{5}{21}\,\alpha\,\omega) \equiv 2\,u_{36} \end{cases} \quad \ldots \quad (17)$$

Daar $u_{36} \equiv u_{25} + \frac{1}{3}\,\omega \equiv u_{14} - \frac{1}{3}\,\omega$, vormen deze drie punten een inflexietripel, en geldt dit ook voor hunne tangentiaalpunten, welke door de hoofddiagonalen van den cyclischen zeshoek worden bepaald. Is evenwel $\alpha = 3\,\beta$, dan vereenigen zich de punten u_{14}, u_{25}, u_{36}, wegens de betrekkingen $u_{14} \equiv u_1 + \frac{5}{7}\,\beta\,\omega \equiv u_{25} \equiv u_{36}$, tot één punt u_0, en snijden de hoofddiagonalen elkander in het tangentiaalpunt van u_0. Het punt u_0 behoort dan met de hoekpunten van den zeshoek tot de door u_1 aangewezen centraalgroep.

Er zijn derhalve twee soorten van cyclische zeshoeken: de 3×7 zeshoeken met concurrente hoofddiagonalen, welke uit de puntengroep $u \equiv u_1 + \frac{1}{21}\,\alpha\,\omega$ ($\alpha = 0,\ 1$ tot 20) kunnen gevormd worden, noem ik *zeshoeken der eerste soort.*

---

*) Zie het laatst aangehaalde opstel, bl. 238.

8. Uit (15) volgt verder:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 + u_3 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{10}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{13}\\
u_2 + u_4 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{2}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{24}\\
u_3 + u_5 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{18}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{35}\\
u_4 + u_6 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{7}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{46}\\
u_5 + u_1 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{8}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{51}\\
u_6 + u_2 &\equiv 2\left(u_1 + \frac{6}{21}\alpha\omega\right) \equiv 2\,u_{62}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

De zes diagonalen $\overline{u_i\, u_{i+2}}$ snijden derhalve de kromme in de tangentiaalpunten van de punten $u_{i,\, i+2}$, die blijkbaar tot dezelfde groep behooren en weer een cyclischen zeshoek vormen. Voor dezen nieuwen zeshoek is nu:

$$\left.\begin{aligned}
u_{13} + u_{35} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{14}{21}\alpha\omega\right)\\
u_{24} + u_{46} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{15}{21}\alpha\omega\right)\\
u_{35} + u_{51} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{13}{21}\alpha\omega\right)\\
u_{46} + u_{62} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{17}{21}\alpha\omega\right)\\
u_{51} + u_{13} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{9}{21}\alpha\omega\right)\\
u_{62} + u_{24} &\equiv 2\left(u_1 + \frac{4}{21}\alpha\omega\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

Past men op den nu gevonden cyclischen zeshoek dezelfde

handelwijze toe, dan komt weêr de oorspronkelijke zeshoek van (15) te voorschijn, en wel in de volgorde $u_4\, u_5\, u_6\, u_1\, u_2\, u_3$.

Voor $\alpha = 3\,\beta$ gaat (18) over in:

$$\left.\begin{aligned}
u_{13} &\equiv u_1 + \frac{3}{7}\beta\,\omega \equiv u_4\\
u_{24} &\equiv u_1 + \frac{2}{7}\beta\,\omega \equiv u_5\\
u_{35} &\equiv u_1 + \frac{4}{7}\beta\,\omega \equiv u_6\\
u_{46} &\equiv u_1 + \beta\,\omega \equiv u_1\\
u_{51} &\equiv u_1 + \frac{1}{7}\beta\,\omega \equiv u_2\\
u_{62} &\equiv u_1 + \frac{6}{7}\beta\,\omega \equiv u_3
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

d. w. z. de afgeleide zeshoek is met den oorspronkelijken identiek; dit geeft een nieuw middel om de beide soorten van zeshoeken te onderscheiden, daar immers de zeshoeken der tweede soort tot drietallen kunnen vereenigd worden, zoodat de drie figuren op cyclische wijze van elkander afhangen.

Voor $\alpha = 3\,\beta \pm 1$ wordt $u_2 \equiv u_1 + \frac{1}{7}\beta\,\omega \pm \frac{1}{21}\omega$ en $u_3 \equiv u_1 + \frac{6}{7}\beta\,\omega \mp \frac{1}{21}\omega$, zoodat drie opvolgende hoekpunten tot verschillende S_3 behooren; wegens $u_4 \equiv u_1 + \frac{1}{7}\alpha\,\omega$, $u_5 \equiv u_2 + \frac{5}{7}\alpha\,\omega$ en $u_6 \equiv u_3 + \frac{4}{7}\alpha\,\omega$ zijn overstaande hoekpunten steeds in dezelfde S_3 begrepen.

Van de 20 verschillende punten, welke als u_2 aan het willekeurig gekozen punt u_1 kunnen toegevoegd worden, bepalen er twee ($\alpha = 7$ en $\alpha = 14$) met u_1 een cyclischen driehoek, zes andere ($\alpha = 3\,\beta$, $\beta = 1$ tot 6) elk een zes-

hoek der eerste soort, de twaalf overige elk een zeshoek der tweede soort. Samenvattende heeft men dus:

9. *Uit de puntengroep, welke ontstaat, als men de punten eener centraalgroep der derde orde tot inflexietripels aanvult, kunnen* 21 *cyclische zeshoeken der eerste soort en* 42 *cyclische zeshoeken der tweede soort gevormd worden.*

Van een zeshoek der eerste soort behooren de toppen tot dezelfde centraalgroep en komen de hoofddiagonalen samen in het tangentiaalpunt van het zevende punt dier groep, terwijl de overige diagonalen de tangentiaalpunten der toppen insnijden.

Van een zeshoek der tweede soort behooren de drie overstaande puntenparen tot drie verschillende centraalgroepen en snijden de hoofddiagonalen de toppen van een cyclischen driehoek in. Elke zeshoek der tweede soort vormt met twee zeshoeken derzelfde soort eene gesloten groep, waarin de tangentiaalpunten der toppen van elken zeshoek op de nevendiagonalen van een tweeden liggen, terwijl zijne nevendiagonalen de tangentiaalpunten der toppen van den derden zeshoek dragen.

10. Uit de congruentie $2\,u_1 \equiv u_2 + u_3$ volgt

$$u_3 - u_2 \equiv (-2)\,(u_2 - u_1).$$

Wordt als boven $u_2 - u_1 \equiv t$ gesteld, dan levert het stelsel van congruenties, dat de voorwaarden bevat voor een *cyclischen n-hoek*, achtereenvolgens

$$\left.\begin{array}{lll} u_3 & -u_2 & \equiv (-2)\;\;\;

Met het oog op deze congruentie vindt men nu uit

$$2\,u_{n-1} \equiv u_n + u_1$$

voor t de voorwaarde:

$$2\,u_1 + \frac{1}{3}(2-2\,(-2)^{n-2})\,t \equiv 2\,u_1 + \frac{1}{3}(1-(-2)^{n-1})\,t,$$

of, na eenvoudige herleiding,

$$\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)\,t \equiv 0 \pmod{\omega} \quad \ldots\ldots (23)$$

Wordt ter bekorting gesteld

$$\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n) = \varrho\,(n), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

dan heeft men voor den cyclischen n-hoek

$$\left.\begin{array}{l} u_2 \equiv u_1 + \alpha\,\omega : \varrho\,(n) \\ u_3 \equiv u_1 - \alpha\,\omega : \varrho\,(n) \\ u_4 \equiv u_1 + 3\,\alpha\,\omega : \varrho\,(n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_i \equiv u_1 + (-1)^i\,\varrho\,(i-1)\,\alpha\,\omega : \varrho\,(n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n \equiv u_1 + (-1)^n\,\varrho\,(n-1)\,\alpha\,\omega : \varrho\,(n) \end{array}\right\} \quad \ldots (25)$$

De $\varrho\,(n)$ verschillende punten, die voor $\alpha = 0$ tot $\varrho\,(n)-1$ door (23) bepaald zijn, vat ik samen door de benaming *cyclische groep*.

11. Krachtens de betrekking

$$2\,u_i \equiv u_{i+1} + u_{i+2}$$

is, wanneer ter bekorting gesteld wordt

$$\alpha\,\omega : \varrho\,(n) = v,$$

$$2u_1+(-1)^i.2v\varrho(i-1) \equiv 2u_1+(-1)^{i+1}v\varrho(i)+(-1)^{i+2}v\varrho(i+1),$$

derhalve:

$$2\,\varrho\,(i-1) = \varrho(i+1) - \varrho\,(i) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(26)$$

hetgeen ten overvloede door rechtstreeksche substitutie bevestigd wordt.

In het algemeen snijdt elke diagonaal van een cyclischen n-hoek de kromme in het tangentiaalpunt van een tot dezelfde cyclische groep behoorend punt. Immers:

$$u_i + u_{i+k} \equiv 2u_1 + (-1)^i v\,\{\varrho(i-1) + (-1)^k \varrho(i+k-1)\} \,..\,(27)$$

derhalve, wederom met behulp van de notatie $u_i + u_{i+k} \equiv 2u_{i,\,i+k}$,

$$2\,u_{i,\,i+k} \equiv 2\,u_1 \pm 2\,\beta\,\omega : \varrho\,(n)$$

waar

$$0 < \beta < \varrho\,(n).$$

Deze regel gaat alleen dan niet door, wanneer het punt $u_{i,\,i+k}$ met zijn tangentiaalpunt samenvalt; in dat geval is $u_i + u_{i+k} + u_{i,\,i+k} \equiv 0$, waaruit gereedelijk volgt, dat u_1 congruent is met een veelvoud van een deel der periode ω, dus tot een plethorisch punt behoort; de cyclische veelhoek gaat dan over in een tangentiaalveelhoek *).

12. De punten $u_{i,\,i+k}$, welke voor eene bepaalde waarde van k uit den cyclischen n-hoek der punten u_i worden afgeleid, vormen weder een dergelijken veelhoek. Uit

$$2\,u_{i,\,i+k} \equiv 2\,u_1 + (-1)^i v\,\{\varrho\,(i-1) + (-1)^k \varrho\,(i+k-1)\} \,..\,(28)$$

volgt toch:

$$2\,u_{i,\,i+k} + 2\,u_{i+1,\,i+k+1} \equiv 4\,u_1 + (-1)^{i+1} v\,\{[\varrho(i) - \varrho(i-1)] + \\ + (-1)^k\,[\varrho\,(i+k)\,\varrho\,(i+k-1)]\}$$

---

*) Verg. het laatst aangehaalde opstel, en A. Schoenflies „Ueber regelmässige Configurationen n_3 auf den Curven dritter Ordnung" (*Göttinger Nachrichten* 1889, N°. 12), waar verdere litteratuur over dit onderwerp genoemd wordt.

of, met het oog op (26),

$$\equiv 4\, u_1 + 2(-1)^{i+1}\, v\{\varrho\,(i-2) + (-1)^k\, \varrho\,(i+k-2)\},$$

dus volgens (28),

$$u_{i,\,i+k} + u_{i+1,\,i+k+1} \equiv 2\, u_{i-1,\,i+k-1}.$$

Hierbij valt op te merken, dat de nieuwe veelhoek een aantal zijden kan bezitten, dat een deeler van n is, terwijl voor even waarden van n de mogelijkheid bestaat, dat alle hoofddiagonalen door één punt der kromme gaan.

13. Is n het produkt van twee priemgetallen p en q, dan moet de cyclische groep $u_1 + \alpha\,\omega : \varrho\,(n)$ ook de toppen van cyclische p-hoeken en van cyclische q-hoeken bevatten; m. a. w. $\varrho\,(n)$ moet deelbaar zijn door de getallen $\varrho\,(p)$ en $\varrho\,(q)$, die beide om dezelfde reden priemgetallen moeten wezen. Zoo is b.v.

$$\varrho\,(15) = 10923 = 3 \times 11 \times 331 = 331\, \varrho\,(3)\, \varrho\,(5).$$

Voor

$$\alpha = \beta\, \varrho\,(n) : \varrho\,(p)$$

wordt nu

$$u_2 \equiv u_1 + \beta\, \omega : \varrho\,(p),$$

derhalve, zie (25),

$$u_{p+1} \equiv u_1 + (-1)^{p+1}\, \beta\, \omega,$$

d. w. z. de punten u_1 tot u_p vormen eenen cyclischen p-hoek.

Is verder $\alpha = \beta\, \varrho\,(p)\, \varrho\,(q)$ en $\varrho\,(n) = \varrho\,(p)\, \varrho\,(q)\, r$, dan wordt $u_2 \equiv u_1 + \beta\, \omega : r$ en de door u_2 aangewezen n-hoek behoort tot eene gesloten groep van r punten, overeenkomstig de congruentie $r\, u \equiv r\, u_1$.

Voor $r = 3\, s - 1$ is er een punt met parameter v, zoodat $(3\, s - 1)\, u + v \equiv 0$; de bedoelde groep is dan eene osculatiegroep der orde s.

Voor $r = 3\, s - 2$ en $(3\, s - 2)\, u + x + y \equiv 0$ bepalen de krommen van den graad s, welke in u de gegeven kromme $(3\, s - 2)$-puntig osculeeren, eene centrale involutie

met puntenparen x, y; is t de parameter van het centrum der involutie, dus $x + y + t \equiv 0$, dan hebben de punten der bedoelde groep, blijkens $(3s - 2)\, u \equiv t$, het punt t gemeen, en vormen eene centraalgroep der orde s. *)

Uit het voorafgaande volgt, dat r grooter moet zijn dan n; dit geldt ook voor het produkt $\varrho\ (p)\ \varrho\ (q)$; immers, stelt men $\alpha = \beta r$, zoodat $u_2 \equiv u_1 + \beta\, \omega : \varrho\ (p)\ \varrho\ (q)$, dan moet u_2 een eigenlijken n-hoek leveren, hetgeen alleen mogelijk is, als $\varrho\ (i)$ minstens $n - 1$ verschillende waarden kan verkrijgen, welke naar den modulus $\varrho\ (p)\ \varrho\ (q)$ incongruent zijn.

De cyclische groep zal derhalve, daar r steeds van 1 verschilt, drie soorten van cyclische n-hoeken bevatten, n. l. n-hoeken, waarvan de toppen tot eene r-puntige groep behooren, n-hoeken met toppen uit eene groep van $\varrho\,(p)\,\varrho\,(q)$ punten, welke in de cyclische groep bepaald wordt door elk punt van eene met een p-hoek overeenkomende groep aan te vullen tot eene bij een q-hoek behoorende groep (of omgekeerd) — en eindelijk n-hoeken, welke niet geheel en al zijn opgesloten in eene dier groepen.

14. Van belang is het geval, waarin $\varrho\ (n)$ de tweede macht bevat van $\varrho\ (p)$, en p een enkelvoudige faktor is van n. Stelt men $\varrho\,(n) = c\ \varrho^2\,(p)$, en $\alpha = \beta\, c$, dan wordt $u_2 \equiv u_1 + \beta\ \omega : \varrho^2\ (p)$, en het punt u_2 bepaalt een n-hoek, waarvan de toppen behooren tot eene groep van $\varrho^2\ (p)$ punten, welke uit $\varrho\ (p)$ cyclische groepen is samengesteld; dit wordt duidelijk, als men β door $\gamma\, \varrho\,(p) + \delta$ vervangt waardoor $u_2 \equiv u_1 + \gamma\, \omega : \varrho\,(p) + \delta\, \omega : \varrho^2\ (p)$ met $\gamma = 1$ tot $\varrho\ (p)$ en evenzeer $\delta = 1$ tot $\varrho\ (p)$. Voor eene bepaalde waarde van δ verkrijgt men dan, door de verschillende waarden van γ, eene cyclische groep behoorende bij den p-hoek.

Om aan te toonen, dat het genoemde geval werkelijk voorkomt, lasch ik hier het bewijs in voor eene algemeene eigenschap der getallenleer.

---

*) Wat hier omtrent de groep van r punten gezegd werd, geldt natuurlijk ook voor de groepen van $\varrho\ (p)$ en $\varrho\ (q)$ punten.

Is p een priemgetal > 2, dan heeft men

$$a^p + b^p = (a+b)^p - pab(a^{p-2}+b^{p-2}) - p.\frac{p-1}{2}a^2b^2(a^{p-4}+b^{p-4})$$

$$\ldots - \binom{p}{\frac{1}{2}(p-1)} a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} (a+b),$$

of daar alle binomiaalcoefficienten door p deelbaar zijn,

$$a^p + b^p = (a+b)^p - p\,z\,(a+b) \ldots\ldots (29)$$

Wanneer nu $a + b$ door p deelbaar is, dan kan $a^p + b^p$ blijkbaar gedeeld worden door p^2. Meer algemeen:

Is $a + b$ een veelvoud van p^k, dan heeft $a^p + b^p$ den deeler p^{k+1}.

Wegens $2^5 + 1 = 3 \times 11$ zal dus $(2^5)^{11} + 1$ door 11^2 kunnen gedeeld worden; wegens $\varrho(55) = \frac{1}{3}(2^{55} + 1)$ zijn er derhalve cyclische 55-hoeken, waarvan de toppen behooren tot eene uit elf O_4 gevormde groep.

Zoo volgt verder uit $2^2 + 1 = 5$, dat $(2^2)^5 + 1$, dus ook $\varrho(20) = \frac{1}{3}(2^{20} - 1)$ een deeler 25 bezit.

Ten slotte is $2^3 + 1 = 3^2$, bijgevolg kan

$$\varrho(3^k) = \frac{1}{3}\left\{ (2^3)^{3^{k-1}} + 1 \right\}$$

gedeeld worden door 3^k.

Er zijn dus, in het bijzonder, cyclische negenhoeken, waarvan de toppen uit drie inflexietripels bestaan. Dit blijkt ook gemakkelijk uit $u_2 \equiv u_1 + \frac{1}{9}\alpha\omega$; men vindt n. l. $u_1 + u_4 \equiv 2u_7$, $u_4 + u_7 \equiv 2u_1$, $u_7 + u_1 \equiv 2u_4$.

Bij uitbreiding volgt uit het bovenstaande nog:

Wanneer $a + b$ een veelvoud is van p^k, dan bevat

$$a^{p^l} + b^{p^l}$$

$(k + l)$ faktoren p.

15. De lijn, welke de punten u_{i+1} en u_{i+m+1} van een cyclischen $2\,m$-hoek vereenigt, ontmoet de kromme in een punt w, waarvoor

$$w \equiv -2u_1 + \frac{(-1)^i}{3}(2^i - (-1)^i)v + \frac{(-1)^{i+m}}{3}(2^{i+m} - (-1)^{i+m})v,$$

$(v = \alpha\,\omega : \varrho\,(n))$, of na eene eenvoudige herleiding,

$$w \equiv -2u_1 - \frac{2}{3}\alpha\omega : \varrho(2m) + \frac{1}{3}(-1)^{i+m}\,2^i(2^m + (-1)^m)\alpha\omega : \varrho(2m). \quad (30)$$

Daar $\varrho\,(2\,m) = (2^m + (-1)^m)\varrho\,(m)$, zal men voor α slechts een veelvoud van $\varrho\,(m)$ behoeven te nemen, om het rechter lid der congruentie onafhankelijk te maken van de waarde van i, d. w. z. *in elke cyclische groep voor een $2\,m$-hoek komen veelhoeken voor, waarvan de hoofddiagonalen elkander in een punt der kromme snijden.*

Convergeeren de hoofddiagonalen van een $2\,m$-hoek niet naar één punt, dan snijden zij de toppen van een cyclischen m-hoek uit, wanneer m ondeelbaar is, of in het tegengestelde geval α onderling ondeelbaar is met $\varrho\,(m)$; is bijvoorbeeld m een veelvoud van q, dus $\varrho\,(m)$ een veelvoud van $\varrho\,(q)$, dan kan men voor α steeds zoodanige waarden kiezen, dat de hoofddiagonalen een cyclischen q-hoek bepalen.

16. *Elk punt der kromme behoort als hoekpunt tot*

$$\varphi\left(\frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)\right) \text{*)}$$

verschillende cyclische n-hoeken, en vormt met hunne toppen eene involutorische groep, die òf eene osculatiegroep, òf eene centraalgroep is, òf uit zoodanige groepen is samengesteld.

Er zijn evenveel soorten van cyclische n-hoeken als het getal $\frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ verschillende faktoren bezit.

---

*) φ is de EULER'sche functie, d. w. z. het aantal getallen kleiner dan en ondeelbaar met het argument. SYLVESTER noemt haar het *totient*.

Voor veelhoeken met een even aantal zijden worden die soorten het gemakkelijkst onderscheiden door den aard der figuren, welke de hoofddiagonalen op de kromme bepalen.

17. De punten eener in de kubische kromme beschreven regelmatige configuratie $(3n)_3$ met de lijnen $a_i\ b_i\ c_{i+1}$, $b_i\ c_i\ a_{i+1}$ en $c_i\ a_i\ b_{i+1}$ vormen steeds drie cyclische n-hoeken, die in het bijzonder ook tangentiaal-n-hoeken kunnen wezen. Immers uit

$$\left\{\begin{matrix} a_i & b_i & c_{i+1} \\ a_i & c_i & b_{i+1} \\ \alpha_i & a_{i+1} & a_{i+2} \end{matrix}\right\}$$

(waar elke regel en elke kolom de punten van eene lijn bevat), blijkt, dat het tangentiaalpunt α_i van a_i gelegen is op de lijn $\overline{a_{i+1}\ a_{i+2}}$.

Eene cf. der genoemde soort zal dus geconstrueerd kunnen worden door de toppen van een cyclischen n-hoek te verbinden met de toppen van een tweeden cyclischen n-hoek, en uit de n^2 snijpunten dier lijnen met de kromme n punten te kiezen, welke een derden cyclischen n-hoek bepalen. Immers, zijn u, v, w de parameters van drie collineaire punten der kromme, dan moeten voor elk drietal collineaire toppen de getallen α, β, γ voldoen aan de congruentie

$$(u + \alpha\,\omega : \varrho(n)) + (v + \beta\,\omega : \varrho(n)) + (w + \gamma\,\omega : \varrho(n)) \equiv 0 \;..\; (31)$$

---

§ 2.

18. Het ligt voor de hand, te vragen naar veelhoeken, die zoodanig op de kromme rusten, dat het tangentiaalpunt van het hoekpunt u_i gelegen is op de zijde $\overline{u_{i+2}\ u_{i+3}}$. Vierhoeken van zoodanige samenstelling verschillen natuurlijk niet van de cyclische vierhoeken der vorige §.

Voor een *cyclischen vijfhoek der tweede orde*, (zooals ik dezen ter onderscheiding van de tot dusver behandelde cyclische vijfhoeken zal noemen), geldt het stelsel congruenties;

$$\left.\begin{array}{l} 2\,u_1 \equiv u_3 + u_4 \\ 2\,u_2 \equiv u_4 + u_5 \\ 2\,u_3 \equiv u_5 + u_1 \\ 2\,u_4 \equiv u_1 + u_2 \\ 2\,u_5 \equiv u_2 + u_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

waarvan weer elke congruentie een gevolg is van de overige vier, in overstemming met den in N°. 3 gegeven algemeenen regel.

Hieruit volgt gemakkelijk:

$$u_2 \equiv u_1 + \frac{1}{5}\,\alpha\,\omega,$$

zoodat eene osculatiegroep der tweede orde op vier verschillende wijzen ($\alpha = 1$ tot 4) aanleiding geeft tot de vorming van een cyclischen vijfhoek der tweede orde. Daar evenwel de zijde $u_3\,u_4$ over den top u_1 staat, zullen deze vier rangschikkingen der vijf punten paarsgewijze denzelfden veelhoek opleveren. Dit blijkt ook uit het volgende schema, waar de punten u_i telkens vervangen zijn door den faktor van $\frac{1}{5}\,\omega$.

$$\left.\begin{array}{lllll} 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\ 0, & 2, & 4, & 1, & 3 \\ 0, & 3, & 1, & 4, & 2 \\ 0, & 4, & 3, & 2, & 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

19. Het stelsel

$$\left.\begin{array}{l} 2\,u_1 \equiv u_3 + u_4 \\ 2\,u_2 \equiv u_4 + u_5 \\ 2\,u_3 \equiv u_5 + u_6 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2\,u_{n-1} \equiv u_1 + u_2 \\ 2\,u_n \equiv u_2 + u_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

bevat de voorwaarden voor een *cyclischen n-hoek der tweede orde.*

Uit de eerste dezer congruenties volgt

$$u_4 - u_1 \equiv -(u_3 - u_1),$$

uit de tweede

$$u_5 - u_1 \equiv 2(u_2 - u_1) - (u_4 - u_1).$$

Wordt nu ter bekorting

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + t \\ u_3 &\equiv u_1 + v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

gesteld, dan is

$$\left.\begin{aligned} u_4 &\equiv u_1 - v \\ u_5 &\equiv u_1 + 2t + v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Door het dubbel van de tweede congruentie van (34) af te trekken van het dubbel der eerste, en bij de uitkomst te voegen de derde congruentie van dat stelsel, vindt men

$$u_6 + 4u_2 \equiv u_5 + 4u_1.$$

Derhalve is algemeen

$$u_{4+k} + 4u_k \equiv u_{4+l} + 4u_l \quad \ldots\ldots (37)$$

dus

$$u_{4+k} - u_{4+l} \equiv (-4)(u_k - u_l)$$

en

$$u_{4p+k} - u_{4p+l} \equiv (-4)^p (u_k - u_l).$$

Wordt nu l door 1, k achtereenvolgens door 2, 3, 4, 5 vervangen, dan volgt hieruit, met het oog op de boven ingevoerde bekortingen,

$$\left.\begin{aligned} u_{4p+2} &\equiv u_{4p+1} + (-4)^p t \\ u_{4p+3} &\equiv u_{4p+1} + (-4)^p v \\ u_{4p+4} &\equiv u_{4p+1} - (-4)^p v \\ u_{4p+5} &\equiv u_{4p+1} + (-4)^p (2t + v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

De laatste congruentie levert blijkbaar

$$u_{4p+1} \equiv u_1 - \frac{1}{5}[(-4)^p - 1](2t + v).$$

Met behulp van de notatie

$$\sigma(p) = \frac{1}{5}[4^p - (-1)^p] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

heeft men dus

$$u_{4p+1} \equiv u_1 - (-1)^p \sigma(p)(2t + v). \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

20. Voor den cyclischen $4p$-hoek der tweede orde is $u_{4p+1} \equiv u_1$, dus volgens (40)

$$\sigma(p)(2t + v) \equiv 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Tevens is dan $u_{4p+2} \equiv u_2$, dus, met het oog op (38) en (35),

$$(-4)^p t \equiv t \pmod{\omega},$$

waaruit

$$t \equiv \alpha\omega : 5\sigma(p). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Nu levert (41)

$$2t + v \equiv \beta\omega : \sigma(p),$$

derhalve is

$$v \equiv (5\beta - 2\alpha)\omega : 5\sigma(p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Voor een cyclischen $4p$-hoek der tweede orde heeft men dus:

$$\left.\begin{array}{l}
u_2 \equiv u_1 + \alpha\omega : 5\sigma(p) \\
u_3 \equiv u_1 + (5\beta - 2\alpha)\omega : 5\sigma(p) \\
u_4 \equiv u_1 - (5\beta - 2\alpha)\omega : 5\sigma(p) \\
u_5 \equiv u_1 + \beta\omega : \sigma(p) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{4k+1} \equiv u_1 - (-1)^k \sigma(k)\beta\omega : \sigma(p) \\
u_{4k+2} \equiv u_1 + [(-4)^k \alpha - 5(-1)^k \sigma(k)\beta]\omega : 5\sigma(p) \\
u_{4k+3} \equiv u_1 + [(-4)^k(5\beta - 2\alpha) - 5(-1)^k \sigma(k)\beta]\omega : 5\sigma(p) \\
u_{4k+4} \equiv u_1 - [(-4)^k(5\beta - 2\alpha) + 5(-1)^k \sigma(k)\beta]\omega : 5\sigma(p) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \ldots \quad (44)$$

21. Voor een cyclischen $(4p+1)$-hoek is $u_{4p+2} \equiv u_1$ en $u_{4p+3} \equiv u_2$, dus volgens (38) en (40),

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{5}((-4)^p - 1)(2t + v) + (-4)^p t \equiv 0\,; \\ -\frac{1}{5}((-4)^p - 1)(2t + v) + (-4)^p v \equiv t. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (45)$$

Worden deze beide congruenties achtereenvolgens vermenigvuldigd met de onderling ondeelbare getallen $\frac{1}{5}(4^{p+1} - (-1)^{p+1})$ en $\frac{1}{5}(4^p - (-1)^p)$, dan verdwijnt door aftrekking v en men vindt:

$$\frac{1}{5}(2^{4p+1} + (-1)^p \,.\, 2^{2p+1} + 1)\, t \equiv 0 \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

De cyclische groep bestaat dus uit

$$\tau(p) = \frac{1}{5}(2^{4p+1} + (-1)^p \,.\, 2^{2p+1} + 1)$$

punten, terwijl

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + \alpha\,\omega : \tau(p) \\ u_3 &\equiv u_1 + (4^p + (-1)^p)\,\alpha\,\omega : \tau(p) + \beta\,\omega : 4^p. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (47)$$

De argumenten der overige hoekpunten worden hieruit gemakkelijk gevonden.

22. De voorwaarden $u_{4p+3} \equiv u_1$ en $u_{4p+4} - u_{4p+3} \equiv t$, welke voor een cyclischen $(4p+2)$-hoek moeten vervuld worden, geven:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{5}(4^p - (-1)^p)(2t + v) + 4^p v &\equiv 0 \\ -2(-4)^p v &\equiv t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (48)$$

waaruit gemakkelijk volgt:

$$\frac{1}{5}(4^{2p+1} + 1)\, v \equiv 0,$$

dus

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + (-1)^{p+1}\, 2^{2p+1}\, \alpha\, \omega : \frac{1}{5}\,(4^{2p+1} + 1) \\ u_3 &\equiv u_1 + \alpha\, \omega : \frac{1}{5}\,(4^{2p+1} + 1) \end{aligned}\right\} \ldots (49)$$

De cyclische groep van den $(4\,p + 2)$-hoek wordt derhalve door $\frac{1}{5}\,(4^{2p+1} + 1)$ punten gevormd.

23. Voor den cyclischen $(4\,p + 3)$-hoek is ten slotte

$$u_{4p+4} \equiv u_1 \quad \text{en} \quad u_{4p+5} - u_{4p+4} \equiv u_2 - u_1$$

dus:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{5}\,((-4)^p - 1)\,(2\,t + v) + (-4)^p\, v \equiv 0 \\ &(-4)^p\,(2\,t + 2\,v) \equiv t \end{aligned}\right\} \ldots (50)$$

Worden deze beide congruenties achtereenvolgens vermenigvuldigd met $2\,(-4)^p$ en $\frac{1}{5}\,(6(-4)^p - 1)$, dan levert eene aftrekking

$$\frac{1}{5}\,(2^{4p+3} + (-4)^{p+1} + 1)\, t \equiv 0$$

waardoor:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\equiv u_1 + \alpha\, \omega : \frac{1}{5}\,(2^{4p+3} + (-4)^{p+1} + 1) \\ u_3 &\equiv u_1 - (2^{2p+1} + (-1)^{p+1})\, \alpha\, \omega : \\ &\quad \frac{1}{5}\,(2^{4p+3} + (-4)^{p+1} + 1)\, 2^{2p+1} + \beta\, \omega : 2^{2p+1} \end{aligned}\right\} \ldots (51)$$

Merkwaardig is het, dat de cyclische $(4\,p + 2)$-hoek der tweede orde na de keuze van een hoekpunt, evenals de veelhoeken der eerste orde, slechts van *een* parameter α afhangt, terwijl voor de bepaling der overige veelhoeken van de tweede orde nog over den faktor β naar willekeur kan beschikt worden.

. Voor de cyclische veelhoeken der tweede orde gelden, opzichte van hunne verdeeling in soorten, de opmer- en, welke bij de veelhoeken der eerste orde zijn ge- t.

eeft de veelhoek b. v. een aantal zijden gelijk aan een aar getal, dan bevat zijn cyclische groep de cyclische pen overeenkomende met de deelers van dat getal. Het al punten der groep van den twaalfhoek is b. v.

$$\sigma(3) = 4^3 - (-1)^3 = 65 = 5 \times 13;$$

bestaat dus uit 5 cyclische groepen voor den zeshoek, r tevens uit 13 groepen voor den vierhoek; de deeler ijft buiten aanmerking, daar er geen cyclische driehoe- der tweede orde mogelijk zijn.

e boven gevonden functies voor het aantal punten der ische groepen kunnen allen worden uitgedrukt in de tie σ. Men heeft dan den regel:

5. *Voor de cyclische veelhoeken der tweede orde wordt het al punten, waaruit de cyclische groep bestaat, voorgesteld*

$(p) = 4^p - (-1)^p$	*voor den* $4p$*-hoek,*
$(2p) + (-1)^p \cdot 2\sigma(p) + 1$	*voor den* $(4p+1)$*-hoek,*
$(2p) + 1$	*voor den* $(4p+2)$*-hoek,*
$(2p+1) + (-1)^{p+1} \cdot \sigma(p+1)$	*voor den* $(4p+3)$*-hoek.*

---

§ 3.

6. De samengesteldheid der voor cyclische veelhoeken tweede orde verkregen uitkomsten voorspelt weinig goeds r het onderzoek naar cyclische veelhoeken der orde i; r $i = 3$ ben ik reeds niet meer geslaagd in het vinden algemeene uitdrukkingen voor het aantal punten der ische groep. Daarentegen kan het geval, waar elke top een veelhoek met een oneven aantal zijden zijn tangen- lpunt op de overstaande zijde heeft, en het geval, dat

dit punt bij een even aantal zijden op eene door het overstaande hoekpunt begrensde zijde ligt, volkomen algemeen behandeld worden; ik zal deze veelhoeken aanduiden als *cyclische tegenveelhoeken.*

27. Wanneer van een $(2n+1)$-hoek de zijde $u_i\, u_{i+1}$ het tangentiaalpunt van u_{i-n} draagt, is er voldaan aan het stelsel:

$$\left.\begin{array}{ll} 2\,u_1 & \equiv u_{n+1} + u_{n+2} \\ 2\,u_2 & \equiv u_{n+2} + u_{n+3} \\ \cdots & \cdots \\ 2\,u_k & \equiv u_{n+k} + u_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots \\ 2\,u_{2n+1} & \equiv u_n \quad + u_{n+1} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (52)$$

Wordt nu $u_{n+1} \equiv u_1 + t$ gesteld, dan levert de eerste congruentie

$$u_{n+2} \equiv u_1 - t,$$

de $(n+2)^{de}$ congruentie

$$u_2 \equiv 2\,u_{n+2} - u_1 \equiv u_1 - 2\,t,$$

de 2de congruentie

$$u_{n+3} \equiv 2\,u_2 - u_{n+2} \equiv u_1 - 3\,t,$$

de $(n+3)^{de}$

$$u_3 \equiv 2\,u_{n+3} - u_2 \equiv u_1 - 4\,t.$$

Dus algemeen voor $k \leq n$

$$\left.\begin{array}{ll} u_{n+k} & \equiv u_1 - (2\,k-3)\,t \\ u_k & \equiv u_1 - (2\,k-2)\,t \end{array}\right\}.$$

Derhalve vindt men

$$u_{2n} \equiv u_1 - (2\,n-3)\,t \text{ en } u_n \equiv u_1 - (2\,n-2)\,t.$$

Uit de laatste congruentie van (52) volgt dan

$$2\,u_{2n+1} \equiv 2\,u_1 - (2n-3)\,t$$

t de n^{de}

$$u_{2n+1} \equiv u_1 - (2n-1)\,t;$$

lve

$$2\,u_1 - (2n-3)\,t \equiv 2\,u_1 - (4n-2)\,t,$$

$$(2n+1)\,t \equiv 0 \pmod{\omega}$$

$$t \equiv \alpha\,\omega : (2n+1),$$

lgemeen

$$u_k \equiv u_1 - (2k-2)\,\alpha\,\omega : (2n+1). \quad \ldots\ldots (53)$$

s

$$_1 \equiv u_1 - 4\,n\,\alpha\,\omega : (2n+1) \equiv u_1 + 2\,\alpha\,\omega : (2n+1).$$

en vindt denzelfden veelhoek, in tegengestelde richting oopen, door den faktor β, waarvoor

$$u_1 + 2\,\alpha\,\omega : (2n+1) \equiv u_1 + \beta\,\omega : (2n+1),$$

t

$$\beta \equiv 2\,\alpha \pmod{2n+1}.$$

t aantal verschillende eigenlijke $(2n+1)$-hoeken (im- voor het geval dat $2n+1$ deelbaar is, levert de che groep ook veelhoeken van kleiner aantal zijden) agt derhalve voor elk punt der groep $\frac{1}{2}\varphi(2n+1)$.

k punt der kromme behoort tot $\frac{1}{2}\varphi(2n+1)$ verschil- cyclische $(2n+1)$-hoeken, waarin telkens het tangenti- nt van elken top op de overstaande zijde ligt.

. Zal van een $2n$-hoek de zijde $u_{n+i-1}\,u_{n+i}$ door het ntiaalpunt van u_i gaan, dan moet er voldaan zijn aan:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,u_1 \equiv u_n + u_{n+1} \\ 2\,u_2 \equiv u_{n+1} + u_{n+2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2\,u_{n+1} \equiv u_{2n} + u_1 \\ 2\,u_{n+2} \equiv u_1 + u_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2\,u_{2n} \equiv u_{n-1} + u_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Wordt $u_{n+1} \equiv u_1 + t$ gesteld, dan levert de eerste congruentie van dit stelsel:

$$u_n \equiv u_1 - t,$$

de $(n+1)^{\text{ste}}$

$$u_{2n} \equiv u_1 + 2t,$$

de $2n^{\text{de}}$

$$u_{n-1} \equiv u_1 + 5t,$$

de n^{de}

$$u_{2n-1} \equiv u_1 - 4t,$$

de $(2n-1)^{\text{ste}}$

$$u_{n-2} \equiv u_1 - 13t,$$

de $(n-1)^{\text{ste}}$

$$u_{2n-2} \equiv u_1 + 14t.$$

Met het oog op de reeks van verschillen:

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &\equiv 3t \\ u_{2n-1} - u_{n-1} &\equiv -9t \\ u_{2n-2} - u_{n-2} &\equiv 27t \end{aligned}$$

is er aanleiding tot de onderstelling:

$$\left.\begin{aligned} u_{n-k} &\equiv u_1 + \tfrac{1}{2}(1 + (-3)^{k+1})t \\ u_{2n-k} &\equiv u_1 + \tfrac{1}{2}(1 - (-3)^{k+1})t \end{aligned}\right\}.$$

Door substitutie in de $(2n-k)^{\text{de}}$ en de $(n-k)^{\text{de}}$ congruentie verkrijgt men dan:

$$\left.\begin{aligned} u_{n-k-1} &\equiv u_1 + \tfrac{1}{2}(1 + (-3)^{k+2})t \\ u_{2n-k-1} &\equiv u_1 + \tfrac{1}{2}(1 - (-3)^{k+2})t \end{aligned}\right\}$$

waardoor de juistheid der onderstelling blijkt.

Worden de hiermede overeenkomende uitdrukkingen voor u_2 en u_{n+2} in de $(n+2)^{\text{de}}$ congruentie gesubstitueerd, dan komt er na herleiding:

$$\tfrac{1}{2}(1 + (-3)^n)t \equiv 0 \pmod{\omega}. \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Stelt men ter bekorting

$$\tfrac{1}{2}(3^n + (-1)^n) = \chi(n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

t uit het bovenstaande

$$\left.\begin{array}{ll} u_1 + (-1)^{n-i+1}\,\chi(n-i+1) & \alpha\omega : \chi(n) \\ u_1 + [(-1)^{n-i}\,\chi(n-i+1)+1]\alpha\omega : \chi(n) & \end{array}\right\} \ldots (57)$$

(waar $i = 1$ tot n).

al de cyclische groep voor een tegen-2 n-hoek ook
v-hoeken leveren, dan moet de zijde $\overline{u_v\, u_{v+1}}$ van den
als n^{de} zijde kunnen beschouwd worden van een
doorloopen v-hoek; derhalve moet $v + m \,.\, 2\,v = n$,
$: (2\,m + 1)$ zijn. De groep voor den tegen-achthoek
lus geen vierhoeken; wel komen deze voor in de
oor den twaalfhoek.

s $u_{i,\ n+i}$ de parameter van het punt der cyclische
waarvan het tangentiaalpunt op de hoofddiagonaal
van eenigen tegen-2 n-hoek ligt, dan is naar (57):

$$2\,u_{i\ n+i} \equiv 2\,u_1 + \alpha\,\omega : \chi\,(n) \ldots\ldots (58)$$

de hoofddiagonalen komen samen in een punt der
.

Evenals voor de cyclische veelhoeken der eerste
ewijst men gemakkelijk voor de tegenveelhoeken de
aap, dat de diagonalen $\overline{u_i\, u_{i+k}}$ de tangentiaalpunten
n van de toppen van een nieuwen, tot dezelfde
ehoorenden, veelhoek. Het snijpunt der hoofddiago-
van den afgeleiden veelhoek is het tangentiaalpunt
punt v waarvoor:

$$2\,v \equiv u_{1,\,1+k} + u_{n+1,\,n+1+k},$$

$$2\,u_{1,\,1+k} \equiv u_1 + u_{1+k}$$

$$u_{n+1,\,n+1+k} \equiv u_{n+1} + u_{n+1+k}\,,$$

$$4\,v \equiv (u_1 + u_{n+1}) + (u_{1+k} + u_{n+1+k});$$

r (58)

$$2\,v \equiv 2\,u_1 + \alpha\,\omega : \chi\,(n) \ldots\ldots\ldots (59)$$

Derhalve: *Alle door diagonalen uit een tegenveelhoek met even aantal zijden afgeleide veelhoeken hebben het snijpunt der hoofddiagonalen met den oorspronkelijken veelhoek gemeen.*

32. Voor den tegenachthoek is $u_5 \equiv u_1 + \alpha\,\omega : 41$. Wordt uit den achthoek, die met eene bepaalde waarde van α overeenkomt, een tweede afgeleid met behulp van de diagonalen $\overline{u_i\,u_{i+2}}$, uit dezen tweeden op dezelfde wijze een derde veelhoek enz., dan blijkt de achthoek, die zoodoende uit den vijfden wordt gevonden, met den eersten identiek te zijn. Worden de toppen dier achthoeken aangeduid door de coëfficienten van $\alpha\,\omega : 41$ in de uitdrukking voor hunne parameters, dan wordt de bedoelde gesloten groep van vijf tegen-achthoeken voorgesteld door:

0	23	13	12	16	
28	34	10	24	9	
5	3	11	20	25	
40	27	38	35	6	. . . . (60)
1	19	29	30	26	
14	8	32	18	33	
37	39	31	22	17	
2	15	4	7	36	

Het 41ste punt der groep $u_1 + \frac{21}{41}\alpha\,\omega$ is het antitangentiaalpunt van het gemeenschappelijk snijpunt der 20 hoofddiagonalen.

33. Dat niet elke cyclische tegengroep een dergelijk stelsel van veelhoeken met gemeenschappelijk hoofddiagonalen-snijpunt levert, blijkt uit het volgende.

Is p een ondeelbaar getal, dan geeft de stelling van Fermat:

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

waardoor

$$\chi(p) \equiv 1 \pmod{p}$$

eene macht van 2, zoodat $\varphi(n) = \frac{1}{2} n$, dan volgt
$\equiv 1$ (mod. n) weer

$$\chi(n) \equiv 1 \text{ (mod. } n).$$

k ander geval is óf $\chi(2n) = \frac{1}{2}(3^{2n} - 1) + 1$ óf
$+ 1) = \frac{1}{2}(3^{2n+1} - 3) + 1$, terwijl $3^{\varphi(2n)} \equiv 1$
$2n)$ resp. $3^{\varphi(2n+1)} \equiv 1$ (mod. $2n + 1$). Maar nu is
geen deeler van $2n$, noch $\varphi(2n + 1)$ een deeler van
zoodat χ naar den modulus $2n$ resp. $2n + 1$ incon-
is met 1. Eene gesloten groep van veelhoeken, als
voor den achthoek werd gevonden, is derhalve al-
ogelijk voor het geval dat n priem of eene macht
s.

Elk punt der kromme behoort tot $\varphi(\frac{1}{2}(3^n + (-1)^n))$
ende tegen-2 n-hoeken; van elken veelhoek komen de
agonalen in één punt der kromme samen.

pen, Januari 1890.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

NINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

ERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

ONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

DERDE REEKS.

ACHTSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1891.

LSoc 3061.25

Harvard College Library
May 17, 1900
Transferred from the
Astronomical Observatory.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS

INHOUD

VAN HET

ACHTSTE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

---

gadering gehouden op 25 April 1890 . . . . . blz. 1.
" " " 31 Mei " . . . . . " 7.
" " " 28 Juni " . . . . . " 28.
" " " 27 September " . . . . . " 72.
" " " 25 October " . . . . . " 147.
" " " 29 November " . . . . . " 202.
" " " 27 December " . . . . . " 287.
" " " 31 Januari 1891 . . . . . " 317.
" " " 28 Februari " . . . . . " 328.
" " " 28 Maart " . . . . . " 395.

VERSLAGEN.

Verslag over de verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER: „Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid"; uitgebracht in de vergadering van 28 Juni 1890 . . . . . blz.

Verslag over de verhandeling van den Heer J. CARDINAAL: „Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbel-kegelsnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad"; uitgebracht in de vergadering van 27 September 1890. . . . . „

Rapport over de verhandeling van Dr. H. VAN CAPPELLE: „Geologische resultaten van eenige in West-Drenthe en in het oostelijk deel van Overijssel verrichte grondboringen. Eene bijdrage tot de kennis der ontwikkelingsgeschiedenis van het Nederlandsch diluvium"; voorgedragen in de vergadering van 25 October 1890. . . . „

Rapport aan de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, aangaande eene Missive van den Minister van Binnenl. Zaken, betreffende natuurkundige onderzoekingen in Nederlandsch-Indië; voorgedragen in de vergadering van 25 October 1890 . . . . . „

Rapport over het aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven antwoord op Z. Exc. brief van 15 Augustus 1890, waarin gehandeld wordt over het kiezen van een eersten meridiaan . . . . . „

Rapport over het aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven antwoord op Z. Exc. brieven van 31 October en 18 November 1890, waarin gehandeld wordt over het invoeren van eene nieuwe tijdregeling voor bepaalde gedeelten van Europa en over de invoering van eenheid van tijd bij de spoorweg-administratiën. . . . . „

lag aan de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke
kademie van Wetenschappen, omtrent de verhandeling
n den Ingenieur van den Waterstaat J. C. RAMAER:
De omvang van het Haarlemmermeer en de meren waar-
t het ontstaan is" . . . . . blz. 212.
lag over de verhandeling van Dr. F. DE BOER: "Toe-
ssing van de methode DARBOUX op de differentiaalver-
lijking $s = f(r, t)$;" uitgebracht in de vergadering van
5 November 1890 . . . . . " 218.
port over de bestemming van het verslag, door den Heer
r. F. A. F. C. WENT aan de Afdeeling overgelegd, na
n terugkeer van het botanisch Station te Buitenzorg . " 294.
lag omtrent de onderzoekingen, verricht aan het bota-
sch Station te Buitenzorg, van 15 Maart—1 Augustus
890; door Dr. F. A. F. C. WENT . . . . . " 295.
lag over eene verhandeling van den Heer E. ENGELEN-
URG: "Hyetographie van Nederland"; uitgebracht in de
rgadering van 27 December 1890 . . . . . " 300.
lag der Commissie voor het geologisch onderzoek van
ederland over het jaar 1890 . . . . . " 328.
lag omtrent de verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER:
Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den
erden graad en de eerste soort"; uitgebracht in de ver-
dering van 31 Januari 1891. . . . . " 341.
lag over de verhandeling van Dr. J. W. RETGERS: "De
menstelling van het duinzand van Nederland"; uitge-
acht in de vergadering van 28 Februari 1891 . . . " 391.
port over een onderzoek van versteeningen, afkomstig van
va; uitgebracht in de vergadering van 28 Maart 1891. " 400.

MEDEDEELINGEN.

C. OUDEMANS JR. Bijdrage tot de kennis der Cupreïne. blz. 14.
. KLUYVER. Over stralenstelsels, die uit vier elkaar
uisende lijnen kunnen worden afgeleid . . . . . " 41.

J. CARDINAAL. Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbelkegelsnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad. blz. 88.
G. VAN DIESEN. Verlegging van de uitmonding der Maas, van Woudrichem naar den Amer. . . . . " 161.
E. MULDER. Over de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride . . . . . " 171.
Dr. F. DE BOER. Toepassing van de methode DARBOUX op de differentiaalvergelijking $s = f(r, t)$ . . . . . " 221.
M. W. BEIJERINCK. De levensgeschiedenis eener pigmentbacterie . . . . . " 307.
Dr. J. LORIÉ. Rapport over de in de maanden September en October 1890 gedane onderzoekingen . . . . . " 330.
H. VAN CAPPELLE. Kort verslag van eenige, dezen zomer in West-Drenthe gedane geologische waarnemingen . . " 334.
J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK. Onderzoek naar de verspreiding der kristallijne erratica in de noordoostelijke provinciën van Nederland. (19 Sept.—23 Oct. 1890) . . " 337.
J. C. KLUYVER. Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort. . . . . " 346.
J. D. VAN DER WAALS. De grootte der drukking bij coëxisteerende phasen van mengsels, in het bijzonder bij zoutoplossingen . . . . . " 409.
J. D. VAN DER WAALS. De formule der electrolytische dissociatie. . . . . " 448.
M. W. BEIJERINCK. Over ophooping van atmospherische stikstof in culturen van Bacillus radicicola . . . . . " 460.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

E VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Vrijdag 25 April 1890.

enwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voor- FRANCHIMONT, VERLOREN, VAN BEMMELEN, HOFFMANN, DE LA RIVIÈRE, BAEHR, STOKVIS, FORSTER, RAUWEN- PLACE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, MICHAËLIS, VAN , MAC GILLAVRY, GRINWIS, PEKELHARING, DE VRIES, N, KAMERLINGH ONNES, MARTIN, LORENTZ, SCHOUTE, VEG, HUBRECHT, HOOGEWERFF, J. A. C. OUDEMANS en J. A. OUDEMANS, Secretaris.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen dgekeurd.

Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ont- werken der Akademie van de navolgenden:
H. DU MONCEAU, Bibliothecaris van Z. M. den Koning, enhage, 19 April 1890; 2⁰. Burgemeester en Wethou- r stad Amsterdam, 16 April 1890; 3⁰. C. P. BURGER JR., Bibliothecaris van de Bibliotheek der Universiteit van rdam, 12 April 1890; 4⁰. A. J. VAN PESCH, Biblio- s van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide komt alles te boven" te Amsterdam, 12 April 1890; Directeuren van de Nederlandsche Handel-Maatschappij sterdam, 12 April 1890; 6⁰. G. F. WESTERMAN, Di-

recteur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 12 April 1890; 7°. C. C. DELPRAT, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde te Amsterdam, 15 April 1890; 8°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 19 April 1890; 9°. A. R. ARNTZENIUS, Griffier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 12 April 1890; 10°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 12 April 1890; 11°. R. MELVIL VAN LYNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, 15 April 1890; 12°. L. BROEKEMA, Directeur van de Rijkslandbouwschool te Wageningen, 14 April 1890; 13°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 19 April 1890; 14°. Burgemeester en Wethouders der Stad Zutphen, 16 April 1890; 15°. TAETS VAN AMERONGEN, Gouverneur van de koninklijke militaire Akademie te Breda, 16 April 1890; 16°. BOELE, Bibliothecaris van het Friesch Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde te Leeuwarden, 22 April 1890; 17°. J. W. HULKE, Bibliothecaris van de royal medical and chirurgical Society te Londen, 1890; 18°. WIESER, Directeur van het Ferdinandeum te Innsbruck, 12 December 1889; 19°. G. COCCONI, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Bologna, 15 Augustus 1889; 20°. J. W. TENKES, Secretaris van de Boston Society of natural History te Boston, 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Oorlog te 's Gravenhage, 14 April 1890; 2°. R. R. H. TOE LAER, Amsterdam, 15 April 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teylers Stichting te Haarlem, 1890; 4°. P. J. VAN HEERDT, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 17 April 1890; 5°. de Commissie voor de Buma-Bibliotheek te Leeuwarden, Maart 1890; 6°. A. TIELEMAN, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, Januari 1890;

'ÖRSTEMANN, Archivaris van de kön. sächsische Gesell-
t der Wissenschaften te Leipzig, 20 December 1889;
GILBERT, Directeur van de kön. Universitäts-Bibliotheek
reifswald, 3 Januari 1890; 9°. D. STRICKER, Bibliothe-
van de Senckenbergische naturforschende Gesellschaft
ancfort a/M., 10 Maart 1890; 10°. G. W. A. KAHL-
, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Basel,
stus 1889; 11°. A. RILLIET, Secretaris van de Société
'hysique et d'Histoire naturelle te Genève, 25 Maart
; 12°. G. COCCONI, Secretaris van de kön. Akademie
Wissenschaften te Bologna, 15 Augustus 1889; 13°. den
taris van de Accademia delle Scienze fisiche e mate-
che te Napels, 1 November 1889; 14°. H. WILD, Di-
ur van het Observatoire physique central te St. Peters-
, 11 December 1889; 15°. J. C. PILLING, Directeur van
. S. geological Survey te Washington, 28 Januari 1890;
J. W. TENKES, Secretaris van de Boston Society of na-
History te Boston, December 1889; 17°. J F. BRIDE,
othecaris van de Public Library of Victoria te Mel-
ne, 18 November 1889; waarop het gewone besluit valt
schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

De Heeren A. C. OUDEMANS JR., WEBER, MOLL en
LS hebben zich schriftelijk over hunne afwezigheid ver-
chuldigd.

Is ingekomen een brief van den Heer Dr. JAN DE VRIES,
ar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een
l »Over involuties op vlakke en scheeve krommen", met
ek, daaraan eene plaats te verleenen in de werken der
lemie. — De Voorzitter stelt het manuscript in handen
de Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN, om daarover,
mogelijk, in de volgende vergadering te rapporteeren.

De Heer FORSTER heeft vroeger aangetoond, dat tuber-
use stoffen door inzouten haar infecteerend vermogen niet
ezen. Bij nieuwe proeven, door hem en den Heer DE
TAG genomen, bleek, dat ook het rooken van vleesch,
et zouten volgend, tuberkelbacillen niet doodt. Vleesch,

waaraan tuberkuleuse woekeringen vastzaten, werd volkomen op de wijze van het rookvleesch van den handel gezouten en gerookt. Door het brengen van de fijngehakte gerookte tuberkuleuse knobbels in de buikholte van proefdieren, werd bij deze standvastig tuberkulose verwekt. Deze ervaring is uit een sanitair oogpunt niet zonder gewicht; want Spr. kon verder aantoonen, dat niet alleen de tuberkuleuse woekeringen, maar ook vleesch, van parelzieke dieren afkomstig, in vrij hooge mate infectieus is. NOCARD, BÖLLINGER e. a. hadden sap, door persing uit de spieren van parelzieke slachtdieren verkregen, bij een groot aantal proefdieren ingeënt; deze werden echter slechts bij uitzondering tuberkuleus. Spr. heeft, in plaats van vleeschsap, het fijngehakte vleesch zelf in de buikholte van konijnen en Guinea'sche biggetjes ingevoerd. Na het invoeren van vleesch van oogenschijnlijk goede kwaliteit, afkomstig van 7 parelzieke runderen, waarvan het vleesch na het inzouten voor de consumptie goedgekeurd was, zijn de proefdieren tot nu toe driemaal standvastig tuberkuleus geworden, en was dus 43 pCt. van het vleesch infectieus.

— De Heer FRANCHIMONT biedt voor de boekerij der Akademie aan twee dissertaties en licht den inhoud daarvan op de volgende wijze toe.

De Heer SIMON THOMAS heeft twee isomere representanten van zure nitraminen bereid, nl. het *propyl-* en het *isopropylnitramine*, en ook eenige hunner derivaten onderzocht. Onder deze bevindt zich voor 't eerst een gemengd aliphatisch nitramine, het *proplyisopropylnitramine*. Hij verkreeg dit uit zouten der zure nitraminen door dubbele ontleding met halogeenwaterstofzure aethers. De vraag of die zouten ook dubbele ontleding aangaan met zuurchloriden, zoodat langs dien weg eene zuurrest zou kunnen ingevoerd worden, is door den Heer THOMAS, althans voor het propylnitramine, opgelost. Hij heeft aangetoond dat dit niet gebeurt, noch met pikrylchloride, noch met acetyl- of benzoylchloride. Wel heeft er reactie plaats, maar in de beide laatste gevallen met ontwikkeling van stikstofoxydule,

afkomstig kan zijn van het te verwachten product, in-
dit uiteenvalt.

Een eigenaardig verschil ontdekte de Heer THOMAS tus-
en den eersten term der zure nitraminen en de homo-
en. Terwijl nl. het kaliumzout van het methylnitramine
alcoholische oplossing dubbele ontleding aangaat met
ylchloride, heeft dit niet plaats bij de homologen. Hunne
ossingen werken in dit geval als bestonden zij uit kali
uit het nitramine, waarvan het eerste kaliumpikraat
t. Dit schijnt er op te wijzen dat het zure karakter
den eersten term sterker is dan dat van de homologen.
'en slotte heeft de Heer THOMAS van een paar nitra-
en het molecuulgewicht bepaald volgens de methode
RAOULT, met de vereenvoudiging van BECKMANN, en ge-
den dat het met het theoretische voldoende overeenstemt.
De Heer DEKKERS heeft, na mislukte pogingen om het
ekende tetramethyleenglycol te verkrijgen uit derivaten
het aethyleenglycol, zich dit lichaam verschaft uit het
amethyleendinitramine, door koking met zwavelzuurbe-
end water. Hierdoor is eene sedert lang bestaande ga-
eindelijk aangevuld. Tevens levert zijn onderzoek eene
onbelangrijke bijdrage tot de kennis der zure dinitra-
en. Het toont nogmaals, dat bij deze lichamen zich
elijke eigenaardigheden voordoen als onder anderen bij
wee-basische zuren voorkomen; deze nl. dat, wat smelt-
en oplosbaarheid in water betreft, die met een even
al koolstofatomen bij elkaar behooren, evenals die met
oneven aantal. Hetzelfde geldt voor de correspondeeren-
rethanen, maar niet voor hunne nitroderivaten, zooals
dit tabelletje blijkt:

SMELTPUNTEN.

	dimethylurethaan	dinitrodimethylurethaan.	dinitramine.
thyleen	132—133°	132°	174°
ethyleen	74—75°	89—90°	67°
methyleen	128°	61—62°	163°
amethyleen	114°	37°	59—60°

— De Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN verklaart het werktuig, door hem uitgedacht om de persoonlijke fout bij het bepalen van de rechte klimming bij verschillende sterren te leeren kennen, en biedt voor de boekerij de verhandeling aan, waarin èn het instrument èn de daarmede genomen proeven beschreven zijn (Beschreibung eines Apparats zur Bestimmung des absoluten persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen, nebst der damit erhaltenen Resultate).

— De Heer RAUWENHOFF biedt voor de 4⁰ werken eene verhandeling aan van den correspondent der Afdeeling Dr. VAN DER STOK te Batavia: »de Hornsteinsche zes-en-twintigdaagsche periode, afgeleid uit meteorologische en magnetische waarnemingen te Batavia, St. Petersburg en Praag".

— Nog worden voor de boekerij der Akademie aangeboden, door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN: »Détermination de la différence de longitude entre Leyde et Paris", door hemzelven en den Heer BASSOT bewerkt; door den Secretaris, namens den Heer WEBER, diens: »Zoologische Ergebnisse einer Reise in Niederländisch Ost-Indien. 1es Heft. 1890".

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

WONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 31 Mei 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voor-ter, BAKHUIS ROOZEBOOM, MARTIN, HOFFMANN, KAPTEYN, IJERINCK, FORSTER, VAN BEMMELEN, STOKVIS, DE VRIES, ACE, VERLOREN, VAN 'T HOFF, ZAAIJER, BRUTEL DE LA VIÈRE, BIERENS DE HAAN, MICHAËLIS, VAN DIESEN, WEBER, BRECHT, MOLL, PEKELHARING, KOSTER, SCHOUTE, SCHOLS, EHR, RAUWENHOFF, A. C. OUDEMANS JR, KORTEWEG, MAC LLAVRY, ZEEMAN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ont-ngen werken der Akademie van de navolgenden:
1°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teijlers Stichting Haarlem, 7 Mei 1890; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris n het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijs-geerte te Rotterdam, 23 April 1890; 3°. R. HILDEBRAND, ipzig, 17 Mei 1890; 4°. J M. LATINO-COELHO, Secretaris n de Académie royale des Sciences te Lissabon, 31 Maart 90; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 24 Mei 1890; 2°. E. P. Wright, Secretaris van de royal Irish Academy te Dublin, 1890; 3°. E. Regel, Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St Petersburg, 16 Mei 1890; 4°. J. N. Baptisle, Directeur des Lignes télégraphiques de la République des Etats Unis du Brézil te Rio de Janeiro, 26 Maart 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren J. A. C. Oudemans en Hoek, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken, de mededeeling behelzend dat Z. M. de Koning de herbenoeming van de Heeren H. G. van de Sande Bakhuyzen en J. D. van der Waals, respectievelijk tot Voorzitter en Onder-Voorzitter der Afdeeling, heeft goedgekeurd.

3°. Missive van denzelfden Minister, de mededeeling behelzend, dat Z. M. de Koning goedkeurde de benoemingen van de Heeren H. W. Bakhuis Roozeboom, adsistent bij het scheikundig onderwijs aan de Universiteit te Leiden, tot gewoon; Ch. Hermite, Hoogleeraar in de Wiskunde te Parijs, tot buitenlandsch lid, en van de Heeren C. J. van Schelle, mijn-ingenieur en A. P. Melchior, civiel-ingenieur, beiden op Java, tot correspondenten der Afdeeling.

4°. Brieven van de Heeren Bakhuis Roozeboom en Ch. Hermite, waarin zij dank zeggen voor hunne benoeming en verklaren die op hoogen prijs te stellen.

5°. Eene circulaire, onderteekend door de Heeren A. W. van Eeghen, Voorzitter en F. E. Blaauw, Secretaris van het kon. zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra", waarin der Afdeeling mededeeling wordt gedaan van het overlijden op 82-jarigen leeftijd van den Stichter en Directeur van het Genootschap, wijlen den Heer Dr. G. F. Westerman.

— De Heer Bakhuis Roozeboom, ter vergaderzaal binnen-

door de Heeren KAPTEIJN en BEIJERINCK, wordt door
Voorzitter verwelkomd met eene toespraak, waarin hij
nadruk legt op de belangrijke proeven, door den toe-
kene genomen op het gebied der moleculaire theorie,
ebied waarop door de Heeren VAN DER WAALS, VAN 'T
en KORTEWEG bereids allermerkwaardigste uitkomsten
verkregen.

De Heer WEBER handelt over een geval van herma-
itisme bij Fringilla coelebs:
exemplaar, dat in de nabijheid van Harderwijk ge-
n werd, kwam 1° April in handen van den Heer H.
ER, preparateur en adjunct-conservator bij het kon. zoö-
n genootschap Natura Artis Magistra te Amsterdam,
goedheid had, de aandacht van spreker op het voor-
te vestigen en het aan hem ter onderzoeking aftestaan.
ogel vertoont de bijzonderheid, dat zijn veerenkleed zeer
in twee symmetrische helften gescheiden is. De
rzijde heeft de kleuren van het volmaakte mannetje,
l de linkerzijde met de kleuren van het wijfje getooid
Dit zonderlinge verschijnsel moest aanleiding geven tot
ermoeden, dat het voorwerp een hermaphrodiet was, en
inks, — waar normaal bij vogels het eenige ovarium
troffen wordt, — voorzien van een ovarium, terwijl dan
, beantwoordende aan het mannelijke veêrenkleed, een
el aanwezig zou moeten zijn.
juistheid dezer beschouwing werd glansrijk bevestigd
de sectie. Daaruit bleek, dat aan de linkerzijde een
um aanwezig was van 3,5 mm. lengte en 2 mm. breedte,
l rechts een ronde testikel gevonden werd met een
ter van 2 mm.
uittemaken of de beide geslachtsklieren normaal ge-
l waren, onderzocht spr. op dienzelfden dag een nor-
wijfje van Fringilla coelebs. De afmetingen van het
um waren hier: breedte 3,5 mm., lengte 4,5 mm., dus
iderlei richting grooter dan bij het hermaphroditische
du. Daargelaten dit verschil in grootte, dat zeker
ndergeschikte beteekenis is, bleek uit een mikroskopisch

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

NINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

DERDE REEKS.

ACHTSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1891.

LSoc 3061.25

Harvard College Library
May 17, 1900
Transferred from the
Astronomical Observatory.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-B

INHOUD

VAN HET

ACHTSTE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

---

gadering	gehouden	op	25	April	1890	. . . . .	blz.	1.
"	"	"	31	Mei	"	. . . . .	"	7.
"	"	"	28	Juni	"	. . . . .	"	28.
"	"	"	27	September	"	. . . . .	"	72.
"	"	"	25	October	"	. . . . .	"	147.
"	"	"	29	November	"	. . . . .	"	202.
"	"	"	27	December	"	. . . . .	"	287.
"	"	"	31	Januari	1891	. . . . .	"	317.
"	"	"	28	Februari	"	. . . . .	"	328.
"	"	"	28	Maart	"	. . . . .	"	395.

---

kleine overmaat van alkali is opgelost, de massa geheel vloeibaar kan blijven; voegt men nu nog een weinig vast alkaloïde toe, dan wordt dit allengs geleiachtig en een groot deel der vloeistof stolt tot eene gelei, terwijl een ander deel als oplossing daarboven ligt. Hieruit schijnt te blijken, dat de geheel neutrale verbinding niet zoo oplosbaar is in zuiver water als in een zwak alkalisch vocht.

Na deze voorloopige opmerkingen ga ik tot de beschrijving van de eigenschappen en de samenstelling der onderzochte verbindingen van cupreïne met alkaliën over.

Kali-cupreïne. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, K O H + 7 H_2 O$. Deze verbinding verkreeg ik nu eens in den vorm van schijnbaar zeszijdige blaadjes en dan eens in dien van naaldvormige kristallen. De oplosbaarheid van de verbinding in bepaalde mengsels van alkaliloog en alkohol schijnt grooter te zijn dan die van de natriumverbinding. De analyse leverde de volgende resultaten op:

1. 0.9600 gram luchtdroog kali-cupreïne verloren op 115° 0,2500 gr. water. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2, K O H + 7 H_2 O$ vordert 25.6 pCt. water.

2. 0.5100 gram van hetzelfde praeparaat gaven door behandeling met overmaat van zwavelzuur, voorzichtig verhitten en gloeien 0 0940 gr. $K_2 S O_4$ = 0.0606 of 11.8 pCt. K O H. De formule met $7 H_2 O$ vordert 11.5 pCt. K O H.

$C_{19} H_{22} N_2 O_2 K O H + 7 H_2 O$	Gevonden.	Berekend.
$7 H_2 O$	26.0	25.7
K O H	11.8	11.5

Het schijnt mij echter toe, dat de kaliverbinding, evenals de natronverbinding, verschillende hoeveelheden kristalwater kan opnemen. Praeparaten van verschillende bereiding bevatten wel eens minder water dan 26 pCt., zonder dat de hoeveelheid daarvan juist genoeg door eene bepaalde formule kon worden voorgesteld. Ik achtte het niet genoeg van belang, dit punt aan een nader onderzoek te onderwerpen.

Natron-cupreïne. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, Na O H + 4 H_2 O$ en $+ 7 H_2 O$. Vetachtige blaadjes, somtijds vrij aanzienlijk van grootte en op schubben zonder duidelijken kristalvorm gelijkende.

De analysen van twee praeparaten leverden de volgende uitkomsten op;

A. 1. 0,7013 gram van de verbinding verloren, op 120° gedroogd, 0.1177 gram water = 16,77 pCt. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2, Na O H + 4 H_2 O$ vordert 17 pCt. water;

2. 0.6033 gram van dezelfde verbinding gaven aan droog gegloeid natriumsulfaat 0.1038 gram, overeenkomende met 9.7 gram Na O H. De formule met $4 H_2 O$ vordert 9.3 pCt. Na O H.

B. 1. 0.7472 gram natron-cupreïne verloren, bij drogen op 120°, 0.1936 gram of 26 pCt. water. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2, Na O H + 7 H_2 O$ vordert 26.4 pCt. $H_2 O$.

2. 0.5200 gram van hetzelfde praeparaat gaven 0.0822 gram $Na_2 S O_4$, overeenkomende met 9.0 pCt. Na O H. De formule $7 H_2 O$ vordert 8.4 pCt. Na O H.

$C_{19} H_{22} N_2 O_2, Na O H + 4 H_2 O$	Gevonden	Berekend
$H_2 O$	16.8	17.0
Na O H	9.7	9.3

$C_{19} H_{22} N_2 O_2, Na O H + 7 H_2 O$	Gevonden	Berekend
$H_2 O$	26.4	26.0
Na O H	9.0	8.4

Ammonia-cupreïne. Hierboven is reeds vermeld, dat het bestaan van eene bijzondere verbinding van cupreïne met ammonia door Hesse wordt ontkend; — mijns inziens ten onrechte. Cupreïne toch lost in geconcentreerde ammonia zeer gemakkelijk op, maar ook in verdundere ammoniakvloeistof wordt het, ofschoon langzamer, tot aanzienlijke hoeveelheden opgenomen; het is, zooals wij later zullen zien, zeer goed mogelijk, het S. D. V. van cupreïne in ammoniakale-oplossing te bepalen en men vindt, dat dit niet veel verschilt van dat, wat het alkaloïde onder den invloed der vaste alkaliën vertoont. Bovendien kan men met cupreïne en ammonia juist dergelijke geleiachtige lichamen verkrijgen, als bij de werking van kali en natron op het alkaloïde. Uit dit alles schijnt wel te blijken, dat eene verbinding van cupreïne met ammoniak bestaat, maar dat zij zóó veel onbestendiger is dan die met vaste alkaliën, dat men moeite zal hebben, haar in zuiveren toestand af te zonderen.

Andere verbindingen van cupreïne met bases. Ofschoon ik deze niet nader heb onderzocht, zoo is mij toch waarschijnlijk geworden, dat dergelijke vaste verbindingen, als ik met kali en natron bereidde, ook bij de vereeniging van het alkaloïde met lithion en baryt zullen zijn te verkrijgen. In lithionloog en barytwater is cupreïne zoo oplosbaar, dat men het S. D. V. van het alkaloïde in deze vloeistoffen kan bepalen.

OVER HET SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN VAN CUPREÏNE IN ALKALISCHE OPLOSSINGEN.

Zooals reeds uit de proeven van Hesse bleek, gedraagt zich cupreïne als een phenol met één hydroxylgroep, waarvan de waterstof door metalen kan worden vervangen. Het kwam mij niet onbelangrijk voor, te onderzoeken, hoe het soortelijk draaiingsvermogen van het alkaloïde onder den invloed van verschillende hoeveelheden bases gewijzigd wordt. Naar de ervaring, die ik vroeger ten aanzien van de wijziging van het S. D. V. van één- en tweezurige alkaloïden onder den invloed van zuren had opgedaan, meende ik te mogen verwachten, dat wanneer 1 molecule alkali of eene aequivalente hoeveelheid van andere bases aan 1 molecule cupreïne was gebonden, verdere toevoeging geen belangrijken invloed zou uitoefenen. Zooals uit het volgende kan worden opgemerkt, werd mijne verwachting in hoofdzaak vervuld.

De door mij gedane proeven werden weder uitgevoerd volgens de vroeger door mij gevolgde methode; in een kolfje van ongeveer 20 C.C. inhoud werd 1 mol. (of een veelvoud daarvan), in milligrammen uitgedrukt, in eene afgemetene hoeveelheid getitreerd alkali opgelost en daarna tot aan het merk op het kolfje hetzij water, hetzij alkohol toegevoegd. daarbij zorgende dat de temperatuur ten slotte steeds dezelfde was (17° C.). Ter beoordeeling van den invloed der concentratie werden op hetzelfde volumen stijgende hoeveelheden cupreïne met de noodige hoeveelheid basis samengebracht. Zie hier de uitkomsten van deze proeven:

Cupreïne in kali (waterige oplossing). Invloed van verschillende hoeveelheden alkali.

N°.	Hoeveelheid *) cupreïne.	Volumen normale kali.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3102 gr.	1 C.C.	23 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	8°20′	8°21′	— 204°.5	— 207°.3
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°22′			
2	0.3023 "	2 "	23 "	" "	" "	8°6′	8°5′	— 203°.0	— 205°.9
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°4′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°4′5			
3	0.3508 "	2 "	23 "	" "	" "	9°15′	9°14′	— 200°.0	— 202°.8
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°11′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°14′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°16′5			
4	0.3120 "	6 "	23 "	" "	" "	8°4′5	8°3′	— 196°.0	— 198°.8
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°1′5			
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°2′5			
5	0.3113 "	12 "	23 "	" "	" "	7°48′	7°47′	— 191°.2	— 194°.0
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°45′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°47′5			

*) De voor deze en de volgende proeven gebezigde cupreïne bevatte 1.4 pCt. water.

Cupreïne in kali (waterige oplossing). Invloed van Concentratie.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normal kali.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
6	0.5032 gr.	3 1/3 C.C.	19 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	15°55′ 15°56′	15°56′	— 198°.6	— 201°.4
〃	〃 〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
7	0.5988 〃	4 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	18°46′ 18°47′ 18°49′	18°47′	— 197°.2	— 200°.0
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
8	0.6978 〃	4 2/3 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	21°56′ 22°0′ 21°59′ 22°0′	21°58′	— 197°.6	— 200°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				

Cupreïne in kali (toevoeging van abs. alkohol).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale kali.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
9	0.3075 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	14°13′ 14°15′	14°	— 305°.8	— 310°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
10	0.3062 〃	2 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	15°45′ 15°44′	15°44′	— 339°.6	— 344°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				

Cupreïne in natron (waterige oplossing). Invloed van verschillende hoeveelheden alkali.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3082 gr.	1 C.C.	19 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	9°52'.5	9°52'	— 200°.6	— 203°.0
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°51'			
2	0.3090 "	2 "	19 "	" "	" "	9°52'	9°50'	— 199°.7	— 202°.1
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°49'			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°50'			
3	0.3104 "	6 "	19 "	" "	" "	9°42'	9°43'	— 195°.5	— 197°.9
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°44'			
4	0.3107 "	12 "	19 "	" "	" "	9°18'	9°19'	— 187°.6	— 190°.0
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°20'			

Cupreïne in natron (waterige oplossing). Invloed van concentratie.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
5	0.6243 gr.	4 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	18°45′ 18°45′	18°45′	— 197°.4	— 200°.8
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
6	0.7058 〃	3½ 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	21°12′ 21°12′	21°12′	— 198°.2	— 200°.4
〃	〃 〃		〃 〃	〃 〃	〃 〃				
7	0.9361 〃	6 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	27°54 27°54′	27°54′	— 196°.9	— 199°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				

Cupreïne in natron (toevoeging van abs. alkohol).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
8	0.3067 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	14°16′ 14°15′	14°15′	— 306°.9	— 310°.5
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				
9	0.3067 〃	2 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	14°43′ 14°43′	14°44′	— 341°.4	— 345°.6
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃				

Cupreïne in lithion (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale lithion.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3032 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17 C.	9°20′	9°20′.5	— 203°.3	— 205°.1
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°21′			
2	0.3064 "	2 "	20 "	" "	" "	9°23′	9°23′.5	— 202°.6	- 205°.5
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°24′			

Cupreïne in baryt (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen $^2/_7$ × normale baryt.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3110 gr.	4 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17 C.	9°24′	9°22′	— 198°.9	— 201°.3
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°20′.5			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°20′.5			
2	0.3066 "	18 "	20 "	" "	" "	9°4′	9°3′	— 194°.9	— 197°.3
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°3′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°3′			

Cupreïne in ammonia *) (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen 12 × normale ammonia.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3092 gr.	8 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	10°4′5			
"	" "	" "	" "	" "	" "	10°3′	10°4′	— 215°.1	— 217°.6
"	" "	" "	"	" "	" "	10°3′5			
2	0.3103 "	11 "	20 "	" "	" "	10°14′5	10°15′	— 218°.6	— 221°.1
"	" "	" "	" "	" "	" "	10°15′5			
3	0.3139 "	15 "	20 "	" "	" "	10°39′5	10°15′	— 224°.1	— 227°.3
"	" "	" "	" "	" "	" "	10°38′			

*) Bij deze reeks van proeven bleek, dat cupreïne slechts langzaam in slappe ammonia tot het verzadigingspunt oplost. Het was mij niet mogelijk, eene volledige oplossing van 1 molecule cupreïne op eenige weinige C.C. normale ammonia te verkrijgen. De vorming van eene heldere oplossing had slechts bij gebruik van eene grooto overmaat van deze basis plaats.

Overziet men de verkregene uitkomsten, dan blijkt:

1° dat bij gebruik van kali, natron, lithion en baryt, onder gelijke omstandigheden van concentratie en gelijke verhouding tusschen cupreïne en alkalische basis, ongeveer dezelfde waarden voor het soortelijk draaiend vermogen van cupreïne worden verkregen. Ammonia maakt hier eene uitzondering; de waarden voor het S. D. V. verkregen, verschillen van die, welke onder den invloed van de andere alkalische bases zijn gevonden en stijgen, naarmate de oplossing meer ammonia bevat. Deze afwijking schijnt mij toe, daardoor verklaard te kunnen worden, dat het S. D. V. van het alkaloïde in geheel zuivere (verdichte) ammonia waarschijnlijk verschilt van dat, wat in een ander oplosmiddel wordt waargenomen en ditzelfde zal wel het geval zijn met de verbinding van cupreïne en ammonia. Men heeft hier niet, zooals in de proeven met kali en natron, eene overwegende hoeveelheid water, maar betrekkelijk zeer veel (bij enkele proeven ± 18 pCt.) NH_3. De invloed van deze buitengewone omstandigheden en de successieve toeneming van het S. D. V. bij vermeerdering van het ammonia-gehalte erkennende, zou men kunnen verwachten, dat eene oplossing van cupreïne in weinige C.C. normale ammonia, zoo die kon worden verkregen, ten aanzien van het S. D. V. niet veel verschil met de oplossing in andere alkaliën zou vertoonen;

2° dat bij de vaste alkaliën, onder overigens gelijke omstandigheden, het S. D. V. daalt, naarmate de vloeistof meer basis bevat;

3° dat grootere rijkdom van de vloeistof aan cupreïne-alkali met een geringer S. D. V. van het alkaloïde samengaat;

4° dat inderdaad het maximum van S. D. V. bij cupreïne ten naaste bij is bereikt, wanneer aan 1 molecule cupreïne 1 molecule kali, natron en lithion of $^1/_2$ molecule baryt is toegevoegd. Verdere toeneming van het alkali-gehalte heeft in waterige oplossingen niet veel invloed. Cupreïne gedraagt zich dus tegenover alkalische bases evenals kinamine en konkinamine zich gedragen tegenover zuren.

Men zou wellicht geneigd zijn te meenen, dat de verschijnselen, die door mij bij de proeven met normaal alkali en alkohol zijn waargenomen, hiermede in strijd zijn. Immers men ontwaart, dat cupreïne in eene oplossing, bestaande uit 2 C.C. normaal alkali en 18 C.C. absoluten alkohol, zoowel bij kali als bij natron, een vrij wat hooger S. D. V. vertoont dan in eene vloeistof, die op 1 C.C, normaal alkali 19 C.C. absoluten alkohol bevat en men zou kunnen veronderstellen, dat het alkali hier het S. D. V. opdrijft, doordien er eene tweede verbinding van cupreïne met kali of natron wordt gevormd, evenals bij de twee zurige kinaalkaloiden het S. D. V. zeer aanzienlijk stijgt, wanneer men bij 1 molecule dezer lichamen op 1 molecule (verdund) Cl H nog meer zoutzuur voegt.

Ik geloof intusschen, dat deze onderstelling niet gewettigd is en dat het stijgen van het S. D. V. in het onderwerpelijke geval eenvoudig wordt veroorzaakt door de toeneming van *water* tegenover *alkohol*. Wij hebben hier — zoo ik meen — een geval, analoog aan dat, wat ik vroeger ten aanzien van het stijgen van het S. D. V. van cinchonine in chloroformische oplossing bij voortgaande toevoeging van alkohol waarnam. Er is ook geen reden te bedenken, waarom in dit geval zich waterige oplossingen ten aanzien van verzadigingsverschijnselen anders tegenover cupreïne zouden gedragen dan alkoholische. Proeven met in absoluten alkohol opgeloste zuivere kali en natron, zouden hierover nader licht kunnen verspreiden.

Merkwaardig is het in elk geval, dat de toevoeging van gelijke hoeveelheden alkohol bij de beide alkali-oplossingen eene ongeveer gelijke toeneming van het S. D. V. ten gevolge heeft.

De uitkomsten, hierboven ten aanzien van den invloed van verschillende hoeveelheden alkali op het S. D. V. van cupreïne vermeld, komen mij daarom zoo merkwaardig voor, omdat men hier een geval heeft, waarin men aan ééne zelfde stof op tweeërlei wijze de wet kan toetsen, die ik

roeger ten aanzien van het verband tusschen scheikundig arakter en soortelijk draaiingsvermogen heb gevonden.

Cupreïne gedraagt zich tegenover zuren als eene tweezurige basis, maar tegenover bases, krachtens haar phenolachtig karakter, als éénbasisch zuur. En hiermede staat in verband het merkwaardige feit, dat het S. D. V., onder den invloed van zuren bij de twee graden van verzadiging, die het alkaloïde ondergaan kan, zeer verschilt, terwijl daarentegen bij de vorming van verbindingen met bases — die slechts in ééne enkele bepaalde verhouding plaats grijpt — al is er eene overmaat van basis voorhanden, nagenoeg hetzelfde S. D. V. in waterige oplossingen wordt waargenomen.

In de basische zouten, die ik onderzocht, was het S. D. V. gelegen tusschen — 182° en — 191°.0, in de neutrale tusschen — 283° en — 289° en, zooals men hierboven heeft gezien, bedraagt het bij geringe overmaat van basis in alkalische oplossingen en bij ongeveer gelijken concentratiegraad (1 molecule in milligrammen op ± 20 C.C.) ongeveer — 204°.

Het zou zeker van groot belang zijn, dat het door mij verrichte onderzoek over andere analoge organische alkaloïden kon worden uitgestrekt.

Delft, Mei 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Juni 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOLS, KAMERLINGH ONNES, BAKHUIS ROOZEBOOM, HOFFMANN, MAC GILLAVRY, ZEEMAN, DE VRIES, MAX WEBER, STOKVIS, FORSTER, PLACE, VAN BEMMELEN, VERLOREN, BEHRENS, BEIJERINCK, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, HUBRECHT, VAN DIESEN, RIJKE, MICHAËLIS, MARTIN, GRINWIS, PEKELHARING, J. A. C. OUDEMANS, KOSTER, MOLL, ENGELMANN, VAN 'T HOFF, GUNNING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. A. GROTHE, Secretaris van het historische Genootschap te Utrecht, Mei 1890; 2°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1890; 3°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 29 Mei 1890; 4°. C. WINKLER, Secretaris van de Vereeniging tot bevordering der Geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië te Batavia, 15 April 1890; 5°. H G. ZEUTHEN, Secretaris van de Kongelige danske videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 20 December 1889; 6°. H. SANTES-

ON, Bibliothecaris van het Institut royal géologique de Suède te Stockholm, 17 Juni 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. de Curatoren van het Stolpiaansch Legaat te Leiden, Juni 1890; 2°. het Ministerio delle istrusione publica te Rome, 1890; 3°. O. TORELL, Directeur van het Institut royal géologique de Suède te Stockholm, 17 Juni 1890; 4°. H. MOHN, Directeur van het Editorial Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition te Christiania, 1890; 5°. J. A. PALMEN, Secretaris van de Société de Géographie de Finlande te Helsingfors, 31 Mei 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren HOEK en SCHOUTE, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (2 Juni 1890) ter begeleiding van een Koninklijk Besluit van 23 Mei 1890 N°. 18, waaruit blijkt dat voor de werkzaamheden der Commissie voor de Geologische Kaart eene Rijkssubsidie is toegestaan van *f* 500.— De Secretaris deelt mede, dat deze som bereids door hem ontvangen is. Het voorstel van den Voorzitter om haar ter beschikking te stellen van de Commissie voornoemd (Voorzitter de Heer BEHRENS) wordt goedgekeurd.

3°. Eene circulaire van het Bestuur van het koninklijk zoölogisch Genootschap Natura Artis Magistra (17 Juni 1890), de mededeeling behelzend dat, in plaats van wijlen Dr. G. F. WESTERMAN, tot Directeur van het Genootschap benoemd werd de Heer Dr. C. KERBERT.

4°. Eene missive van het Bestuur van het Congres voor Nijverheidshygiëne en Reddingswezen (2 Juni 1890), waarin de leden der Afdeeling uitgenoodigd worden, voornoemd Congres bij te wonen, en opgave verzocht wordt van het aantal circulaires, gelijk aan die welke aan de missive werd

toegevoegd, ter verspreiding onder genoemde leden. De Voorzitter noodigt de aanwezigen uit, hun verlangen dienaangaande kenbaar te maken aan den Secretaris.

5°. Eene verhandeling van den heer J. CARDINAAL: »Constructie van oppervlakken van de vierde Orde met dubbelkegelsnede door projectieve bundelsoppervlakken van de tweede Orde", aangeboden ter plaatsing in de werken der Akademie. De heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN verklaren zich bereid, daarover verslag uit te brengen in de September-Vergadering.

6°. Een brief van den heer BETTINI te New-York, ter begeleiding van eenige exemplaren eener brochure, handelend over den door dien heer uitgevonden Micro-Graphophone.

— Het rapport over de verhandeling van den heer KLUYVER, in de vorige vergadering aangeboden, wordt gelezen. De conclusie strekt om haar in de werken der Akademie op te nemen. Hiertoe wordt besloten.

— De Heer BEIJERINCK spreekt over »*Cultuurproeven met zoöchlorellen, lichenengonidiën en andere lagere wieren*".

Bij proeven, uitgevoerd met het doel om, uit een door mikroskopische wieren groen gekleurd stilstaand water, deze wieren door de gelatine-methode in geïsoleerde culturen te brengen, gelukte het twee soorten: *Scenedesmus acutus* en *Chlorococcum protogenitum*, af te zonderen. Een derde soort, *Chlorosphaera limicola* n. s., werd op overeenkomstige wijze uit het lichaam, waarschijnlijk het darmlumen, van *Hydra viridis* geïsoleerd.

Deze soorten, thans sinds een jaar in voortloopende reinculturen aangehouden, groeien, in strijd met de heerschende opvatting, alleen in mediën die organisch voedsel bevatten. In het duister zoowel als in het licht wordt haar groei het meest begunstigd door een mengsel van pepton en suiker: als suiker werkt maltose het best, maar ook rietsuiker en glucose kunnen worden opgenomen. De beste verhouding is $^1/_2$ pCt. pepton en 1 pCt. maltose; hoogere suikergehalten geven aanleiding tot misvorming en ontkleuring der

roene cellen. Vaste en vloeibare cultuurmassa's met pepon en suiker in de genoemde verhouding gemengd, worden na toevoeging dezer wieren in het licht spoedig intensief groen; in het duister heeft eveneens groei plaats, maar de bladgroen-kleurstof gaat daarbij grootendeels, hoezeer, zelfs na een jaar, niet geheel verloren. In de cellen hoopt zich een vast koolhydraat op, amylum, dat met jodium blauw wordt, bij *Chlorosphaera*, paramylum, dat met jodium bruin wordt, bij *Scenedesmus* en *Chlorococcum*.

In het licht scheiden deze wieren zuurstof af door koolzuurontleding; daar hun voeding dan alleen de aanwezigheid van pepton vereischt en niet van suiker, is het zeker, dat de koolzuurontleding met de vorming van een koolhydraat gepaard gaat.

Een uitmuntende cultuurgrond is, bij lichttoetreding, water waarin 2 à 3 pCt. gelatine door een weinig pancreaspoeder, of door *Bacillus subtilis*, tot smelting is gebracht.

Scenedesmus acutus scheidt een typtisch enzym af, zoodat gewone gelatineculturen dezer soort weldra uit een groen bezinksel van *Scenedesmus*-cellen bestaan, waarboven de gesmolten gelatine als helder vocht staat. De cellen verliezen daarbij haar oorspronkelijken vorm geheel, door het verloren gaan der puntige uiteinden, zij zwellen sterk op en worden bolrond of ellipsoïdisch. Vooral in zulke culturen is het duidelijk, dat ook bij *Scenedesmus* de celvermeerdering plaats heeft door vrije celvorming van 4 tot 16 cellen binnen den wand der moedercel, die ten slotte wordt afgestroopt.

Ook *Chlorococcum* en *Chlorosphaera* deelen zich uitsluitend door vrije celvorming binnen in de moedercel. *Chlorosphaera* stelt daarbij de deelproducten hetzij als zwermsporen met twee zwermdraden of als beweginglooze cellen in vrijheid. *Chlorococcum* en *Scenedesmus* brengen nimmer zwermsporen voort.

De gonidiën van *Physcia parietina*, *Cystococcus humicola*, kunnen ook op gelatine en in voedingsvloeistoffen, bij aanwezigheid van pepton, gecultiveerd worden. In de gelatineculturen ontstaan somtijds zwermsporen, op de wijze zooals

dit door Famintzin en Baranetzky is beschreven, maar gewoonlijk, en in vloeistofculturen altijd, zijn de cellen bewegingloos. Ook zij ontstaan steeds door vrije celvorming. In voedingsvloeistoffen, geheel vrij van organisch voedsel, gelukt de cultuur der gonidiën niet. Ammoniumnitraat kon hier, evenmin als bij de overige genoemde wieren, als stikstofbron fungeeren.

De zoöchlorellen van *Hydra viridis*, *Paramaecium Aurelia* en *Stentor polymorphus* zijn zoo naverwant met *Chlorococcum*, dat men, op grond van mikroskopisch onderzoek, geneigd is ze daarmede voor identiek te houden; alle proeven om deze chlorellen in vrije cultuur buiten het lichaam der dieren te brengen, zijn echter geheel mislukt. Vermenigvuldiging heeft alleen plaats bij contact met het levende dierlijke protoplasma.

In grachtwater kon aan enkele onder talrijke geïsoleerde chlorellen, na verloop van weken, alleen een sterke opzwelling worden waargenomen, het meerendeel bleef onveranderd, alle stierven ten slotte af.

Bij kleurlooze exemplaren van *Stentor polymorphus* liggen in enkele voedingsvacuolen »pseudochlorellen", dat is op gewone chlorellen veel gelijkende groene cellen, die niet verteerd worden, maar onveranderd blijven of zelfs enkele deelingen ondergaan. Deze dieren door voeding met de genoemde, rein gecultiveerde wieren, in door zoöchlorellen op de gewone wijze groen gekleurde individuen te veranderen, mislukten geheel, ofschoon de groene cellen in groote hoeveelheid werden opgenomen. Zelfs de pseudochlorellen konden daarbij niet tot sterke vermenigvuldiging worden gebracht, niettegenstaande de dieren zelve zich ten minste aanvankelijk wel hebben vermenigvuldigd.

De culturen der genoemde wieren en van de gonidiën van *Physcia* werden door den spreker gedemonstreerd.

Twee lagere draadwieren, geïsoleerd van iepschors, bleken in hun afhankelijkheid van organische voedselstoffen met de beschreven soorten overeen te stemmen. Daarentegen konden diatomeeën, afkomstig uit zeewater en uit een fijn gewreven *Hydra*-lichaam en *Raphidium polymorphum*, voort-

-komen uit een voedingsvacuole van een fijngewreven *Stentor*, el in grachtwater worden opgekweekt, maar niet bij de anwezigheid van organische stoffen.

— De Heer BEIJERINCK spreekt verder over „*Kunstmatige infectie van Vicia Faba met Bacillus radicicola*".

Om uit te maken, dat de bacteriën, welke uit de knolletjes van *Vicia Faba* kunnen worden opgekweekt, ook de oorzaak van het ontstaan dier knolletjes zijn, en dat het aanwezig zijn of het ontbreken van stikstofhoudende voedselstoffen op het ontstaan daarvan zonder invloed is, werden de volgende proeven genomen.

In van binnen verglaasde bloempotten van bijzondere constructie, waardoor begieting mogelijk was zonder gevaar voor infectie van buiten, werd zuiver, langdurig met gedistilleerd water geslibd rivierzand gedaan, en alles te zamen in een grooten sterilisator met stoom bij $3^1/_2$ atmospheeren gesteriliseerd. 12 van zulke potten werden in 4 partijen, elk van drie stuks, verdeeld. In alle werd een zorgvuldig gesteriliseerde boon van *Vicia Faba* geplaatst, nadat deze op een gelatinelaag tot ontkieming was gebracht en alleen dan was goedgekeurd, wanneer daarbij volstrekt geen schimmels of bacteriën waren opgekomen.

Het steriliseeren der boonen had plaats gehad door herhaald afwasschen met alcohol en afbranden van de aanhangende vloeistof.

De vier partijen werden voor een venster in het laboratorium geplaatst en begoten met de volgende gesteriliseerde zoutoplossingen, vervaardigd volgens het voorschrift van HELLRIEGEL.

Partij 1. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost per liter in grammen:

0.1 Kaliummonophosphaat
0.03 Chloorcalcium
0.06 Magnesiumsulfaat.

Partij 2. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij partij 1.

Partij 3. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij 1 met toevoeging van 0.2 gr. Calciumnitraat.

Partij 4. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij 1 met toevoeging van 0.2 gr. Ammoniumsulfaat.

Deze proeven begonnen den 2en April. Toen alle planten het tweede blad hadden gevormd, is uit elk der partijen 2, 3 en 4 één pot gekozen, welke begoten is met een in gesteriliseerd duinwater opgeslibde gelatinecultuur van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, in 1889 geïsoleerd uit knolletjes van *Vicia Faba*. De 3 potten van partij 1 zijn alle op die wijze geïnfecteerd.

Op 20 Juni werd op de zaadlobben van een der planten schimmel gezien, reden waarom de proeven werden gestaakt.

Bij het onderzoek der wortels vertoonden alle zes met *Bacillus radicicola* geïnfecteerde planten knolletjes; alle andere exemplaren waren daarvan volkomen vrij. De aan- of afwezigheid van calciumnitraat of zwavelzure ammoniak waren blijkbaar op de infectie zonder invloed geweest.

Vernieuwde bacteriologische onderzoekingen van de weefsels van *Vicia Faba* hebben geleerd, dat *Bacillus radicicola* daarin niet voorkomt buiten de plaatsen waar zich bacteroïden bevinden, welke plaatsen vroeger zijn aangewezen. Van een doordringing der geheele plant met *Bacillus radicicola* is dus geen sprake.

Aangaande de voeding van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, en van *B. r. Robiniae*, werd nog vastgesteld, dat de snelste ontwikkeling daarvan wordt bewerkt door pepton en suiker. Op agar-agar, waarin alleen rietsuiker aanwezig is, staat de groei onzer bacteriën stil, zoodra de geringe hoeveelheid assimileerbare stikstof daaraan is onttrokken, zoodat binding van atmospherische stikstof, onder deze omstandigheden, volstrekt niet geschiedt.

Salpetervorming in eenigszins belangrijke hoeveelheid wordt door *Bacillus radicicola* niet bewerkt. Alleen oude gelatineculturen van *Bac. Ornithopi*, waarbij asparagine,

epton en rietsuiker als voedsel hadden gediend, bevaten sporen van een stof, die de diphenylaminreactie gaf. Daarin waren bovendien calciumoxalaat en koolzure kalk gevormd.

Bij afwezigheid van organisch voedsel staat de groei stil. Volwasschen bacteriën, verdeeld in duinwater met magnesiumcarbonaat en 0.1 gram ammoniumsulfaat per liter, sterven spoedig af.

Meer en meer blijkt het verschil tusschen de vormen van *Bacillus radicicola*, afkomstig van verschillende Papilionaceeën, belangrijk te zijn. Zoo behoort *B. Ornithopi* van *Ornithopus perpusillus* zeker tot een andere soort dan *Bac. rad. Fabae*. Want *Vicia Faba*, geïnfecteerd met een gelatinecultuur van *Bac. Ornithopi* bracht geen knolletjes voort. Hierdoor wordt tevens verklaard, waarom de Serradella, *Ornithopus sativus*, in onze tuinen vrij blijft van knolletjes, groeiende tusschen *Vicia*-soorten, die daarmede rijk zijn beladen.

— De Heer Kamerlingh Onnes biedt voor de bibliotheek der Akademie de dissertatie aan van den Heer L. H. Siertsema: »De Jaminsche Interferentiaalrefractor en hiermede verrichte brekingsindices-bepalingen" en deelt in het kort de methode van werken mede van den auteur en de uitkomsten door hem verkregen.

De Heer Bierens de Haan biedt, namens den Heer C. Le Paige te Luik, diens brochure aan: »Notes pour servir à l'histoire des Mathématiques dans l'ancien Pays de Liège."

— De Heer Martin biedt eene verhandeling aan van den Heer Dr. H. van Cappelle, ter plaatsing in de werken der Akademie. Haar titel luidt: »Geologische resultaten van eenige in West-Drenthe en in het oostelijk deel van Overijssel verrichte grondboringen." De Heeren Behrens en Martin verklaren zich bereid daarover rapport uit te brengen in de September-Vergadering.

— De Vergadering wordt gesloten.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HR. J. C. KLUYVER,

GETITELD:

OVER STRALENSTELSELS, DIE UIT VIER ELKAAR KRUISENDE LIJNEN KUNNEN WORDEN AFGELEID.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Juni 1890).

De verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER, over welke wij thans verslag uitbrengen, is te beschouwen als een belangrijke voortzetting eener in 1877 door A. Voss in de *Mathematische Annalen* gepubliceerde studie over vier raaklijnen aan een ruimtekromme R^3 van den derden graad. Door den genoemden hoogleeraar, toen woonachtig te Darmstadt, thans te München, is voor het eerst aangewezen, dat er tusschen de lijncoördinaten van vier raaklijnen eener zelfde R^3 een identieke betrekking bestaat en het vraagstuk een R^3 te construeeren, die vier gegeven lijnen aanraakt, derhalve òf onoplosbaar òf onbepaald is. Hieraan is dan het bewijs verbonden, dat de meetkundige plaats van de raaklijnen aan alle krommen R^3, die drie gegeven lijnen aanraken, een stralencomplex van de vierde orde is.

De Heer KLUYVER leidt eerst de reeds door Voss gevonden betrekking opnieuw af. In stede van uit te gaan van een R^3, neemt hij vier willekeurig gelegen lijnen 1, 2, 3, 4 als gegeven aan en bewijst hij, dat deze door

n en dus ook door een oneindig aantal krommen R^3 orden aangeraakt, als de vier regelscharen (234), (341), 12), (123) een gemeenschappelijke raaklijn z toelaten. iertoe moeten de wortels uit de bekende grootheden (1 z), z), (3 z), (4 z) aan vier bepaalde homogene eerstemachts-rgelijkingen voldoen. Eliminatie van deze vier wortels eeft dan de verlangde betrekking $\Gamma = 0$ in determinan-nvorm.

Voor het geval de vier lijnen de bijzondere ligging heb-en, waarbij Γ nul is, zijn de wortels uit de grootheden 1 z), (2 z), (3 z), (4 z) evenredig met de eerste minoren an den gevonden determinant en dus deze grootheden zelve net de factoren van den hoofdterm in den toegevoegden leterminant der minoren. Voor dit geval gelden dus de betrekkingen

$$\frac{(1\,z)}{\sqrt{(12)\,(13)\,(14)}} = \frac{(2\,z)}{\sqrt{(21)\,(23)\,(24)}} = \frac{(3\,z)}{\sqrt{(31)\,(32)\,(34)}} = \frac{(4\,z)}{\sqrt{(41)\,(42)\,(43)}}.$$

Nu is de schrijver op de gelukkige gedachte gekomen deze vergelijkingen eveneens aan te nemen, als aan de voorwaarde $\Gamma = 0$ niet voldaan is, en het daarmede overeenkomende stelsel lijnen z te onderzoeken; daardoor is het hem gelukt aan een geheel willekeurig gelegen viertal lijnen eenige eenvoudige stralenstelsels, regelscharen en ruimtekrommmen R^3 te verbinden, die — bedriegen wij ons niet — tot heden nog niet zijn onderzocht.

Met het oog op het dubbele teeken der wortels doen de hier afgeschreven vormen, twee aan twee aan elkaar gelijk gesteld, twaalf lineaire stralencomplexen kennen, die elkaar drie aan drie volgens zestien congruenties (1,1) en zes aan zes volgens twaalf regelscharen snijden. Deze ruimtefiguur vertoont de grootste analogie met de figuur gevormd door de twaalf deelvlakken van de standhoeken eens viervlaks, de zestien snijlijnen dier vlakken drie aan drie en de twaalf snijpunten dier vlakken zes aan zes. Van de twaalf snij-

punten vallen er vier met de hoekpunten des viervlaks samen, terwijl de andere acht de middelpunten zijn van de bollen, die de vier zijvlakken des viervlaks aanraken. Eveneens splitsen zich de twaalf regelscharen in de vier regelscharen (234), (341), (412), (123), die geen aan de vergelijkingen voldoende lijnen z opleveren, en in acht andere, die dit wel doen. En evenzoo als bij de middelpunten twee groepen van vier optreden, de middelpunten der aangeschreven bollen ter eene, die der andere ter andere zij, dewijl de deelvlakkenparen op de overstaande ribben bij de eerste groep steeds uit een inwendig en een uitwendig deelvlak en bij de tweede groep steeds uit gelijknamige deelvlakken bestaan, doet zich bij de acht regelscharen een verdeeling voor in twee groepen H_1, H_2, H_3, H_4 en H_5, H_6, H_7, H_8, die zooals dadelijk blijken zal geheel verschillende eigenschappen bezitten.

De schrijver schetst vervolgens de constructie der acht regelscharen. Hiertoe merkt hij op, dat de twee gemeenschappelijke transversalen f', f'' van de lijnen 1, 2, 3, 4 gemeenschappelijke beschrijvende lijnen zijn van alle en elk paar behalve deze twee beschrijvende lijnen f', f'' twee richtlijnen g', g'' gemeen heeft. Hij bewijst, dat deze twee richtlijnen voor twee regelscharen, die in dezelfde congruentie liggen (d. w. z. voor twee regelscharen overeenkomende met twee middelpunten met een der hoekpunten van het viervlak op een zelfde lijn gelegen), tevens de richtlijnen dier congruentie zijn en leidt een constuctie dezer lijnen af uit eenige merkwaardige kwadratische involuties, die zich bij vijf punten eener rechte lijn, enz. voordoen. Daarbij openbaart zich dan een ingrijpend verschil tusschen de beide viertallen van regelscharen. Als een der vier discriminanten van de vergelijkingen, die de lijnenparen g', g'' bepalen, nul wordt — en deze discriminanten zijn naar behooren factoren van Γ —, dan zijn alleen de beschrijvende lijnen van de regelschaar der tweede groep lijnen z, die de vier regelscharen (234), (341), (412), (123) aanraken, en voert dus elk dier lijnen tot een h^3, die de vier gegeven lijnen aanraakt. Verder voert de constructie der paren van gemeen-

happelijke richtlijnen g', g'' tot de kennis der acht regelharen H; daarbij blijkt dan tevens meetkundig of de vier gegeven lijnen een oneindig aantal rakende krommen R^3 laten of geen enkele.

Een tweede beteekenis verkrijgt de tweede groep der regelscharen in verband met drie eenvoudige nulstelsels van de derde orde. Splitst men de vier gegeven lijnen in twee paren $a\,b$ en $c\,d$, dan kan men met een willekeurig punt P het vlak door de beide op $(a\,b)$ en $(c\,d)$ rustende lijnen door P, met een willekeurig vlak π het snijpunt der verbindingslijnen van de snijpuntenparen van $(a\,b)$ en $(c\,d)$ met π doen overeenstemmen. Draait π nu om een rechte lijn l, dan doorloopt het overeenkomstige punt P een ruimtekromme R^3, een kegelsnee C^2 of een andere rechte lijn l', naarmate l geen, een, of beide de lijnen f', f'' snijdt. Nu vindt schrijver, dat l' een oppervlak F^6 van den zesden graad doorloopt, als l een regelschaar met f', f'' tot twee richtlijnen beschrijft, en dat dit oppervlak onafhankelijk is van de wijze van paring $(a\,b,\ c\,d)$ en dus voor de drie gevallen (23, 14), (31, 24), (12, 34) hetzelfde wordt, als de regelschaar van lijnen l het stelsel der richtlijnen vormt van een der vier regelscharen van de tweede groep. Met de beschrijvende lijnen van deze regelschaar komen weer krommen R^3 overeen, die op het overeenkomstige oppervlak F^6 asymptotische krommen vormen. En tusschen de snijpuntenparen van elk dier krommen R^3 met de lijnen 1, 2, 3, 4 bestaan invariante betrekkingen, die door den schrijver opgespoord en meetkundig verklaard worden.

Ten slotte keert de Heer Kluyver tot het bijzondere geval $\Gamma = 0$ terug. In dit geval zijn de vier lijnen 1, 2, 3, 4, die in het algemeene geval dubbelribben waren van de vier oppervlakken F^6, keerribben van die oppervlakken en raken de asymptotische krommen R^3 de vier lijnen aan. Dan zijn twee dezer krommen R^3 steeds te beschouwen èn als overeenkomstige krommen van twee collineair verwante ruimten (Voss), èn als overeenkomstige krommen van twee reciprook verwante ruimten, en kunnen dus alle krommen R^3 uit een enkele van hen worden afgeleid.

Voor alle krommen R^3, die de lijnen 1, 2, 3, 4 aanraken, heeft de dubbelverhouding der raakpunten dezelfde waarde λ; zijn λ' en λ'' de op overeenkomstige wijs genomen dubbelverhoudingen der snijpunten van 1, 2, 3, 4 met f', f'', dan geldt de betrekking $\lambda^4 = \lambda' \lambda''$.

Met de afleiding van enkele kenmerkende getallen der reeks van krommen R^3 eindigt de Heer KLUYVER zijn verdienstelijke verhandeling, waarvan wij U de opneming in de *Verslagen en Mededeelingen* met vol vertrouwen aanbevelen.

Amsterdam, Juni 1890,

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

OVER STRALENSTELSELS,

DIE

UIT VIER ELKAAR KRUISENDE LIJNEN KUNNEN WORDEN AFGELEID

DOOR

J. C. KLUYVER.

Kan men, wanneer vier lijnen 1, 2, 3 en 4 in de ruimte gegeven zijn, een ruimtekromme R^3 van den derden graad construeeren, die deze lijnen aanraakt? Licht zou men er toe komen, om die vraag bevestigend te beantwoorden. Immers een dergelijke kromme hangt van 12 constanten af; zij kan derhalve in het algemeen aan vier drievoudige voorwaarden voldoen.

Intusschen hebben SCHUBERT *) en VOSS †) aangetoond, dat vier willekeurige raaklijnen van een R^3 altijd door een invariante betrekking zijn verbonden. Bijgevolg worden 1, 2, 3 en 4 òf door geen enkele kromme òf door alle krommen R^3 van een enkelvoudig oneindig stelsel geraakt. De simultane invariant Γ der vier raaklijnen, die in het tweede geval nul wordt, is door VOSS berekend.

Het is nu naar aanleiding van deze uitkomsten, dat ik

*) *Kalkül der abzählenden Geometrie,* blz. 166.

†) *Mathematische Annalen,* XIII, blz. 168, „Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung".

in de volgende bladzijden de aandacht wensch te vestigen op een groep van covariante stralenstelsels en van daarmede samenhangende R^3, welke laatste door de onderstelling $\Gamma = 0$ in de aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen overgaan.

De analytische behandeling dezer figuren voert ten eerste tot een constructie, die veroorlooft langs meetkundigen weg te beslissen of vier willekeurig aangenomen lijnen de invariante voorwaarde $\Gamma = 0$ al of niet bevredigen. Ten tweede zal uit die behandeling worden afgeleid, hoe men de rakende krommen, indien zij voorhanden mochten zijn, zou kunnen construeeren, waarna ten slotte nog enkele eigenschappen dezer krommen een punt van onderzoek zullen uitmaken.

1. De afleiding van den invariant Γ vormt het natuurlijk uitgangspunt van de volgende beschouwingen. Daarbij is het gebruik van homogene lijncoördinaten als vanzelve aangewezen.

Wanneer x_1, y_1, z_1, w_1 en x_2, y_2, z_2, w_2 de homogene coördinaten van twee gegeven punten voorstellen, noemen wij in de schrijfwijze van SALMON de grootheden

$$p = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad q = z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad r = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$s = x_1 w_2 - x_2 w_1, \quad t = y_1 w_2 - y_2 w_1, \quad u = z_1 w_2 - z_2 w_1$$

de homogene coördinaten der verbindingslijn. Zij voldoen, zooals bekend is, aan de identieke betrekking

$$p s + q t + r u = 0.$$

Als twee lijnen g en h met de coördinaten $p_g, \ldots u_g$ en $p_h, \ldots u_h$ elkaar snijden, wordt de invariant

$$p_g s_h + p_h s_g + q_g t_h + q_h t_g + r_g u_h + r_h u_g$$

nul. Een invariant van dezen vorm zullen wij door het teeken $(g h)$ of $(h g)$ aanduiden. Terwijl VOSS nu voor een gegeven kromme R^3 de coördinaten der raaklijn als bikwadratische functies van een parameter voorstelt, en met behulp van die voorstelling aantoont, dat tusschen de coördinaten van vier raaklijnen een invariante betrekking bestaat,

willen wij vier lijnen 1, 2, 3 en 4 als gegeven beschouwen en nagaan, of zij gelijktijdig door een R^3 kunnen worden geraakt. Onderstellen wij, dat een dergelijke kromme gevonden is, dan is er één regelvlak van den tweeden graad te construeeren, dat behalve de kromme ook de lijnen 1 en 2 bevat. Een tweede regelvlak is evenzeer bepaald door de kromme en haar raaklijnen 3 en 4. Beide oppervlakken snijden elkaar nog volgens een koorde z van R^3, welke koorde, omdat 3 raakt aan het oppervlak $(12\,z)$, een raaklijn zal zijn van het regelvlak (321). Om dezelfde reden zullen ook de regelvlakken (234), (314) en (124) de koorde z tot raaklijn hebben.

Omgekeerd is het duidelijk, dat, zoo die vier regelscharen een gemeenschappelijke raaklijn z bezitten, de doorsnede van een tweetal hyperboloïden, zooals $(12\,z)$ en $(34\,z)$, een aan 1, 2, 3 en 4 rakende R^3 oplevert.

Wij trachten dus lijnen z te vinden, die de genoemde eigenschap vertoonen. Wij noemen y een willekeurige lijn uit de regelschaar (321) en merken op, dat haar coördinaten $p_y, \ldots u_y$ als lineaire functies zijn te beschouwen van de coördinaten $p_1, \ldots u_1, p_2, \ldots u_2, p_3, \ldots u_3$ der gegeven lijnen, zoodat wij steeds zes betrekkingen kunnen aannemen van den vorm

$$p_y = R_1\,p_1 + R_2\,p_2 + R_3\,p_3\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_y = R_1\,u_1 + R_2\,u_2 + R_3\,u_3\,.$$

Immers voor iedere lijn x, waarvoor geldt $(1\,x) = 0$, $(2\,x) = 0$, $(3\,x) = 0$, zal daaruit volgen $(y\,x) = 0$. De veranderlijke coëfficienten R_1, R_2 en R_3, die in deze vergelijkingen voorkomen, moeten daarbij steeds de voorwaarde

$$R_2\,R_3\,(23) + R_3\,R_1\,(31) + R_1\,R_2\,(12) = 0$$

vervullen, omdat tusschen de coördinaten $p_y, \ldots u_y$ de betrekking

$$p_y\,s_y + q_y\,t_y + r_y\,s_y = 0$$

bestaat. Iedere lijn z snijdt twee lijnen y van de regelschaar. Uit de vergelijkingen

$$(y\,z) = R_1\,(1\,z) + R_2\,(2\,z) + R_3\;3\,z) = 0,$$
$$R_2\,R_3\,(23) + R_3\,R_1\,(31) + R_1\,R_2\,(1\,z) = 0$$

kunnen toch twee stel waarden van R_1, R_2 en R_3 worden opgelost.

Deze beide lijnen y vallen samen, als de lijn en de kegelsnee, in homogene coördinaten R_1, R_2 en R_3 door bovenstaande vergelijkingen voorgesteld, elkaar aanraken, wat gebeurt onder de voorwaarde

$$\sqrt{(23)\,(1\,z)} + \sqrt{(31)\,(2\,z)} + \sqrt{(12)\,(3\,z)} = 0 \;^{*)}.$$

Gemeenschappelijke raaklijnen z van de vier regelvlakken (234), (314), (124) en (321) moeten derhalve de vier vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{(34)(2z)}+\sqrt{(24)(3z)}+\sqrt{(23)(4z)}=0\\
\sqrt{(34)(1z)}\qquad\qquad+\sqrt{(14)(3z)}+\sqrt{(31)(4z)}=0\\
\sqrt{(24)(1z)}+\sqrt{(14)(2z)}\qquad\qquad+\sqrt{(12)(4z)}=0\\
\sqrt{(23)(1z)}+\sqrt{(31)(2z)}+\sqrt{(12)(3z)}\qquad\qquad=0
\end{array}\right\}\ldots(A)$$

bevredigen, wat slechts geschieden kan, wanneer de determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & \sqrt{(34)} & \sqrt{(24)} & \sqrt{(23)}\\
\sqrt{(34)} & 0 & \sqrt{(14)} & \sqrt{(31)}\\
\sqrt{(24)} & \sqrt{(14)} & 0 & \sqrt{(12)}\\
\sqrt{(23)} & \sqrt{(31)} & \sqrt{(12)} & 0
\end{vmatrix}$$

nul wordt.

Door een eenvoudige herleiding is deze determinant ook te brengen in de gedaante

*) Door CAYLEY is deze voorwaarde in determinantvorm gegeven. Men vergelijke: SALMON, *Geometry of three Dimensions*, 4th Ed., blz. 419.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{(12)} & \sqrt{(31)} & \sqrt{(14)} \\ \sqrt{(12)} & 0 & \sqrt{(23)} & \sqrt{(24)} \\ \sqrt{(31)} & \sqrt{(23)} & 0 & \sqrt{(34)} \\ \sqrt{(14)} & \sqrt{(24)} & \sqrt{(34)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wij stellen hierin

$$a = (23)(14), \quad b = (31)(24), \quad c = (12)(34),$$
$$s_1 = a + b + c, \quad s_2 = bc + ca + ab, \quad s_3 = abc.$$

De vergelijking $\Delta = 0$ verkrijgt daardoor eerst den vorm

$$a + b + c - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca} - 2\sqrt{ab} = 0,$$

wat ten slotte herleid kan worden tot

$$\Gamma = (s_1^2 - 4\, s_2)^2 - 128\, s_1\, s_3 = 0.$$

Daarmede is de invariant Γ gevonden, waarvan het al of niet nul worden over de mogelijkheid van aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen R^3 beslist.

2. Blijkens de vergelijkingen (A) is in de onderstelling $\Gamma = 0$ de lijn z onbepaald, en kan men uit (A) de grootheden $(1\,z)$, $(2\,z)$, $(3\,z)$ en $(4\,z)$ oplossen. Wij hebben daartoe $\sqrt{(1\,z)}$, $\sqrt{(2\,z)}$, $\sqrt{(3\,z)}$ en $\sqrt{(4\,z)}$ evenredig te stellen met de eerste minoren $\Delta_{k,l}$ van Δ. Hieruit volgt, daar $\Delta_{k,l} = \Delta_{l,k}$ is,

$$\frac{\sqrt{(1\,z)}}{\sqrt{\Delta_{11}}} = \frac{\sqrt{(2\,z)}}{\sqrt{\Delta_{22}}} = \frac{\sqrt{(3\,z)}}{\sqrt{\Delta_{33}}} = \frac{\sqrt{(4\,z)}}{\sqrt{\Delta_{44}}},$$

of

$$\frac{(1\,z)}{\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{(2\,z)}{\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{(3\,z)}{\sqrt{(31)(32)(34)}} = \frac{(4\,z)}{\sqrt{(41)(42)(43)}},$$

korter geschreven

$$\frac{(1\,z)}{P_1} = \frac{(2\,z)}{P_2} = \frac{(3\,z)}{P_3} = \frac{(4\,z)}{P_4} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Deze vergelijkingen doen zien, dat van een aan 1 2, 3 en 4 rakende R^3 de koorden z gelegen zijn in zekere lineaire complexen, die men als covariante figuren van de vier gegeven lijnen heeft te beschouwen.

Evenwel is vanwege de verschillende teekens, die aan de wortelgrootheden P kunnen worden toegekend, een nader onderzoek dienaangaande onmisbaar.

3. Te dien einde merken wij op, dat ook in het algemeene geval, wanneer Γ van nul verschilt, de stralenstelsels door de vergelijkingen (B) aangewezen een meetkundige beteekenis hebben, waarvan wij ons rekenschap hebben te geven.

Beschouwen wij bijv. de vergelijking

$$(1\,z) = \pm \frac{P_1}{P_2}(2\,z),$$

die ook geschreven kan worden in den vorm

$$\left\{(1\,z) - \frac{(13)}{(23)}(2\,z)\right\} \pm \sqrt{\frac{(31)(24)}{(23)(14)}}\left\{(1\,z) - \frac{(14)}{(24)}(2\,z)\right\} = 0.$$

Zij stelt twee lineaire complexen voor, gelegen in den complexbundel, dien de beide ontaarde complexen $(1\,z) = 0$, $(2\,z) = 0$ bepalen. Verder volgt uit de beide schrijfwijzen der vergelijking, dat de door haar voorgestelde complexen harmonisch in den bundel zijn toegevoegd, zoowel ten opzichte van de genoemde ontaardingen, als ten opzichte van de beide bundelcomplexen

$$(1\,z) - \frac{(13)}{(23)}(2\,z) = 0,$$

$$(1\,z) - \frac{(14)}{(24)}(2\,z) = 0,$$

welke door de lijnen 3 en 4 kunnen worden gebracht.

Blijkens de vergelijkingen (B) hebben wij met twaalf dergelijke complexen te doen, waarvoor wij thans de volgende notatie invoeren

$$K_{\pm} \equiv (1z) \pm \frac{P_1}{P_4}(4z) = 0, \quad K_{\pm b} \equiv (2z) \pm \frac{P_2}{P_4}(4z) = 0,$$

$$K_{\pm c} \equiv (3z) \pm \frac{P_3}{P_4}(4z) = 0,$$

$$K_{\pm a_1} \equiv (2z) \pm \frac{P_2}{P_3}(3z) = 0, \quad K_{\pm b_1} \equiv (3z) \pm \frac{P_3}{P_1}(1z) = 0,$$

$$K_{\pm c_1} \equiv (1z) \pm \frac{P_1}{P_2}(2z) = 0.$$

Ter verkrijging van het juiste inzicht in het eigenaardig verband, dat er tusschen deze complexen bestaat, denken wij ons een willekeurig viervlak met de zijvlakken 1, 2, 3 en 4. De ribben in het zijvlak 4 noemen wij a, b en c, de overstaande ribben in volgorde a_1, b_1 en c_1.

De vorm der vergelijkingen $K_{\pm a} = 0, \ldots K_{\pm c_1} = 0$ herinnert nu als vanzelf aan de vergelijkingen, die in homogene viervlakscoördinaten de deelvlakken der twaalf standhoeken op de ribben $a, b, \ldots c_1$, voorstellen, wanneer wij het gedachte viervlak tot coördinatenviervlak nemen. Tusschen de configuratie der complexen K en die der twaalf deelvlakken bestaat een volkomen analogie, en wel komen overeen met

12 deelvlakken der standhoeken	12 complexen K,
16 snijlijnen der deelvlakken, drie aan drie	16 congruenties, doorsneden der complexen K drie aan drie,
8 snijpunten der deelvlakken zes aan zes (middelpunten van in- en aangeschreven bollen) . . .	8 hyperboloïden H, doorsneden der complexen K zes aan zes,
4 hoekpunten van het viervlak	de richtscharen van de regelscharen (234), (314), (124) en (321).

Uit de analogie blijkt verder, dat de hyperboloïden H twee aan twee met de richtschaar van een der vier regelscharen (234), (314), (124) en (321) in de 16 congruenties zijn gelegen. Immers in de overeenkomstige figuur liggen de middelpunten der in- en aangeschreven bollen twee aan twee met een der vier hoekpunten van het viervlak op 16 rechte lijnen. In iedere congruentie dus hebben de twee hyperboloïden H twee richtlijnen g' en g'' gemeen, die tevens beschrijvende lijnen zijn van een der vier regelscharen, welke de vier gegeven lijnen drie aan drie bepalen.

Overigens behooren de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4 tot de beschrijvende lijnen van iedere hyperboloïde H, omdat die lijnen f' en f'' in alle complexen K zijn gelegen.

De twee volgende tabellen hebben ten doel een overzicht te geven van de onderlinge ligging dezer acht hyperboloïden H_1, H_2, ... H_8. In de eerste tabel vindt men in de kolom links de hyperboloïden H, daarachter staan telkens de zes complexen K, die het oppervlak bepalen. In de eerste kolom van de tweede tabel zijn de regelscharen (234), (314), (124), (321) geplaatst, daarachter in de tweede kolom vindt men vier paren van hyperboloïden H, wier gemeenschappelijke richtlijnen g' en g'' in de regelschaar zijn gelegen.

Hyp.	Complexen.					
H_1	K_{+a}	K_{-b}	K_{-c}	K_{-a_1}	K_{+b_1}	K_{+c_1}
H_2	K_{-a}	K_{+b}	K_{-c}	K_{+a_1}	K_{-b_1}	K_{+c_1}
H_3	K_{-a}	K_{-b}	K_{+c}	K_{+a_1}	K_{+b_1}	K_{-c_1}
H_4	K_{+a}	K_{+b}	K_{+c}	K_{-a_1}	K_{-b_1}	K_{-c_1}
H_5	K_{-a}	K_{+b}	K_{+c}	K_{-a_1}	K_{+b_1}	K_{+c_1}
H_6	K_{+a}	K_{-b}	K_{+c}	K_{+a_1}	K_{-b_1}	K_{+c_1}
H_7	K_{+a}	K_{+b}	K_{-c}	K_{+a_1}	K_{+b_1}	K_{-c_1}
H_8	K_{-a}	K_{-b}	K_{-c}	K_{-a_1}	K_{-b_1}	K_{-c_1}

Regelscharen.	Gemeenschappelijke richtlijnen van:			
(234)	H_1 H_8	H_2 H_7	H_3 H_6	H_4 H_5
(314)	H_1 H_7	H_2 H_8	H_3 H_5	H_4 H_6
(124)	H_1 H_6	H_2 H_5	H_3 H_8	H_4 H_7
(321)	H_1 H_5	H_2 H_6	H_3 H_7	H_4 H_8

Uit deze tabellen mag men reeds afleiden, dat de oppervlakken H_5, H_6, H_7, H_8 zich eenigermate van de overige onderscheiden, welk onderscheid in het volgende nog meer op den voorgrond zal treden. Met H_8 stemt in de analoge figuur het middelpunt van den ingeschreven bol overeen, aan H_5, H_6 en H_7 zijn de middelpunten der drie bollen in de »daken" toegevoegd.

4. Wij kunnen gemakkelijk de hyperboloïden H door vergelijkingen voorstellen.

Iedere richtlijn y van zulk een oppervlak snijdt alle beschrijvende lijnen z en dus ook de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4. Daarom kunnen wij de coördinaten $p_y, \ldots u_y$ van y altijd als lineaire functies van de coördinaten van 1, 2, 3 en 4 beschouwen, en wel kunnen wij schrijven

$$p_y = R_1 p_1 + R_2 p_2 + R_3 p_3 + R_4 p_4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_y = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3 + R_4 u_4.$$

De veranderlijke coëfficienten $R_1, \ldots R_4$, die hierin voorkomen, moeten de voorwaarde

$$\Sigma R_2 R_3 (23) = R_2 R_3 (23) + R_3 R_1 (31) + R_1 R_2 (12) + \\ + R_1 R_4 (14) + R_2 R_4 (24) + R_3 R_4 (34) = 0$$

bevredigen, omdat steeds

$$p_y s_y + q_y t_y + r_y s_y = 0.$$

Maar wij hebben bovendien $(y\,z) = 0$, dus volgt met behulp van (B)

$$\Sigma R_1 P_1 = R_1 P_1 + R_2 P_2 + R_3 P_3 + R_4 P_4 = 0.$$

De zes vergelijkingen

$$p_y = \Sigma R_1 p_1, \ldots u_y = \Sigma R_1 u_1,$$

benevens de beide voorwaarden

$$\Sigma R_2 R_3 (23) = 0, \quad \Sigma R_1 P_1 = 0,$$

waarin de teekens der wortelgrootheden P te nemen zijn, zooals iedere hyperboloïde H volgens de voorafgaande tabellen dit vereischt, moeten nu als de analytische voorstelling dezer oppervlakken worden aangemerkt. De coëfficienten $R_1, \ldots R_4$ zijn daarbij als veranderlijke parameters te beschouwen.

5. Wij willen thans een meetkundige constructie voor de lijnen g' en g'' van art. 3 zoeken en daaruit de constructie der hyperboloïden H afleiden. Daar het hier van belang is die acht oppervlakken nauwkeurig van elkaar te onderscheiden, terwijl zij alle tegelijkertijd moeten worden opgespoord, is het verkieslijk die constructie op algebraïschen grondslag te doen rusten.

Wij nemen dan de regelschaar (321) en zoeken daarin de lijnen g' en g'', die volgens de tabel van art. 3 achtereenvolgens gemeen zijn aan H_1 en H_5, H_2 en H_6, H_3 en H_7, H_4 en H_8.

In de eerste plaats beginnen wij met de coördinaten van iedere lijn y der regelschaar als lineaire functies van de coördinaten der lijnen 1, 2 en 3 uit te drukken. Dit geschiedt, volgens art. 2, door te stellen

$$p_y = R_1 p_1 + R_2 p_2 + R_3 p_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_y = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3,$$
$$R_2 R_3 (23) + R_3 R_1 (31) + R_1 R_2 (12) = 0.$$

Aan de laatste vergelijking wordt door de veranderlijke coëfficienten R_1, R_2 en R_3 voldaan, zoo men aanneemt, dat

$$\frac{R_1}{-2(\mu-1)(23)} = \frac{R_2}{(\mu^2-1)(31)} = \frac{R_3}{2(\mu+1)(12)}.$$

Zoo worden die coëfficienten kwadratische functies van een enkelen parameter μ, en wij hebben

$$p_y = -2(\mu-1)(23)p_1 + (\mu^2-1)(31)p_2 + 2(\mu+1)(12)p_3,$$

. . . . . .

$$u_y = -2(\mu-1)(23)u_1 + (\mu^2-1)(31)u_2 + 2(\mu+1)(12)u_3.$$

Daardoor is dan tegelijk aan iedere lijn y één waarde van μ toegevoegd en omgekeerd; bij 1, 2 en 3 behooren in volgorde de parameterwaarden -1, ∞, $+1$.

Wij bepalen de beide lijnen h' en h'' der regelschaar, die de lijn 4 snijden en stellen dus

$$0 = (4\,y) = -2(\mu-1)(23)(14) + (\mu^2-1)(31)(24) + \\ + 2(\mu+1)(12)(34).$$

Deze vergelijking, volgens de notatie van art. 1 te schrijven in den vorm

$$\mu^2 b + 2\mu(-a+c) + (2a-b+2c) = 0, \quad . \; . \; (C)$$

levert de beide waarden van μ, welke aan de lijnen h' en h'' zijn toegevoegd.

Op dezelfde wijze zoeken wij de waarden van μ, behoorende bij de lijnen g' en g''. Wij stellen

$$0 = (zy) = -2(\mu-1)(23)(1z) + (\mu^2-1)(31)(2z) + \\ + 2(\mu+1)(12)(3z),$$

waarin men te substitueeren heeft

$$\frac{(1z)}{\pm P_1} = \frac{(2z)}{\pm P_2} = \frac{(3z)}{\pm P_3}.$$

De teekens der wortelgrootheden P worden geregeld naar de eerste tabel van art. 3.

Na deeling door $\sqrt{(23)(31)(12)}$ worden wij dan gevoerd tot de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2\sqrt{b}+2\mu(\sqrt{a}+\sqrt{c})+(-2\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(\sqrt{a}-\sqrt{c})+(-2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(-\sqrt{a}-\sqrt{c})+(+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(-\sqrt{a}+\sqrt{c})+(+2\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{c})=0\end{array}\right\}\ldots(D)$$

die nu achtereenvolgens de waarden van μ aangeven voor de lijnen g' en g'', gemeen aan H_1 en H_5, H_2 en H_6, H_3 en H_7, H_4 en H_8.

Met behulp van (C) kan men de dubbelelementen l' en l'', m' en m'', n' en n'' van de involuties

$$(23;\ h'h''),\quad (31;\ h'h''),\quad (12;\ h'h'')$$

bepalen.

Rechtstreeksche berekening leert, dat met de lijnen

$$\left.\begin{array}{l}l' \text{ en } l''\\ m' \text{ en } m''\\ n' \text{ en } n''\end{array}\right\}\text{overeenkomen de parameterwaarden}\left\{\begin{array}{l}+1\pm2\sqrt{\frac{c}{b}}\\ \frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{c}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{c}}\\ -1\pm2\sqrt{\frac{a}{b}}\end{array}\right..$$

Voor elk willekeurig aangenomen vijftal van elementen 1, 2, 3, h' en h'' kunnen de drie paar dubbelelementen l' en l'', m' en m'', n' en n'' in drietallen gegroepeerd worden, die met het drietal 1, 2 en 3 in involutie zijn. Inderdaad zal men hier de involuties $(1\,l';\ 2\,m';\ 3\,n')$, $(1\,l'';\ 2\,m'';\ 3\,n'')$, $(1\,l'';\ 2\,m';\ 3\,n'')$, $(1\,l';\ 2\,m'';\ 3\,n')$ aantreffen. Om dit in te zien, beschouwen wij bijv. de paren van elementen $1\,l'$, $2\,m'$, $3\,n'$. Daarmede komen, ingevolge het voorafgaande, overeen de drie binaire kwadratische vormen

$$\begin{array}{ll}\mu^2\sqrt{b}-2\mu\sqrt{c} & -(\sqrt{b}+2\sqrt{c}),\\ \quad+2\mu(\sqrt{a}-\sqrt{c}) & -(2\sqrt{a}+2\sqrt{c}),\\ \mu^2\sqrt{b}-2\mu\sqrt{a} & +(2\sqrt{a}-\sqrt{b}),\end{array}$$

er determinant naar behooren nul wordt. Zoo kan men h ook van het bestaan der andere involuties overtuigen. Daarmede zijn de zes elementen $l', l'', \ldots n''$ gerangschikt. Wij beschouwen nu de vier overblijvende drietallen

$$l''\,m''\,n'',\quad l'\,m'\,n'',\quad l'\,m''\,n',\quad l''\,m'\,n'',$$

ı onderzoeken de navolgende vier groepen van involuties

$$\mathrm{I}\begin{cases}(11\,;\ m''\,n'')\\(22\,;\ n''\,l'')\\(33\,;\ l''\,m'')\end{cases},\quad \mathrm{II}\begin{cases}(11\,;\ m'\,n'')\\(22\,;\ n''\,l')\\(33\,;\ l'\,m')\end{cases},\quad \mathrm{III}\begin{cases}(11\,;\ m''\,n')\\(22\,;\ n'\,l')\\(33\,;\ l'\,m'')\end{cases},$$

$$\mathrm{IV}\begin{cases}(11\,;\ m'\,n')\\(22\,;\ n'\,l'')\\(33\,;\ l''\,m')\end{cases}.$$

Men kan bewijzen, dat, hoe de elementen 1, 2, 3, h en h'' ook worden aangenomen, de involuties van iedere groep een elementenpaar gemeen hebben. Laten wij dit bijv. voor de derde groep aantoonen en tegelijkertijd de parameterwaarden voor dit elementenpaar berekenen.

Daar de waarden van μ voor de elementen $l', l'', \ldots n''$ bekend zijn, kunnen wij de binaire vormen aangeven, die met de paren $m''\,n'$, $n'\,l'$, $l'\,m''$, 11, 22 en 33 overeenkomen. Als zoodanig vindt men

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2(\sqrt{bc}+\sqrt{ab})+2\mu(-a+\sqrt{bc}-\sqrt{ca})+\\ \qquad\qquad +(2a+\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}-\sqrt{ab}),\\ \mu^2\sqrt{bc}+2\mu\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\end{array}\right\}\text{voor } m''\,n' \text{ en } 11,$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2 b+2\mu(-\sqrt{bc}-\sqrt{ab})+\\ \qquad\qquad +(-b-2\sqrt{bc}+4\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}),\\ 0.\mu^2+0.\mu+4\sqrt{ca}\end{array}\right\}\text{voor } n'\,l' \text{ en } 22,$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2(\sqrt{bc}+\sqrt{ab})+2\mu(-c-\sqrt{ca}-\sqrt{ab})+\\ \qquad\qquad +(-2c-\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+\sqrt{ab}),\\ \mu^2\sqrt{ab}-2\mu\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\end{array}\right\}\text{voor } l'\,m'' \text{ en } 33.$$

Trekt men bij ieder tweetal vormen den tweeden van den eersten af, dan komt men na geringe vereenvoudiging neer op

$$\mu^2\sqrt{b} + 2\,u\,(-\sqrt{a}-\sqrt{c}) + (2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c}).$$

Volgens de vergelijkingen (D) zijn de door dezen vorm aangewezen elementen de gemeenschappelijke richtlijnen g' en g'' van de hyperboloïden H_3 en H_7. Die lijnen zijn dus de gemeenschappelijke elementen van de involuties der groep III.

Het kost weinig moeite dit onderzoek ook tot de overige groepen uit te strekken, en tot het besluit te geraken, dat de gemeenschappelijke elementen der involuties van

$$\text{groep}\begin{matrix}\text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\\ \text{IV}\end{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{aanwijzen de richtlijnen } g' \text{ en } g'', \text{ gemeen aan de hyperboloïden}\left\{\begin{matrix}H_1 \text{ en } H_5\\ H_2 \text{ en } H_6\\ H_3 \text{ en } H_7\\ H_4 \text{ en } H_8\end{matrix}\right.$$

De elementen h', h'', l',... n'', die wij in de voorafgaande beschouwingen aantroffen, kunnen door meetkundige constructie worden bepaald. Ook het opsporen der lijnen g' en g'' kan derhalve werkelijk langs meetkundigen weg geschieden. Als men de daartoe benoodigde constructies herhaalt, maar nu met betrekking tot de regelschaar (124) worden van iedere hyperboloïde H vier richtlijnen gevonden; daarmede zijn die oppervlakken zelve geconstrueerd.

6. Wij willen nagaan onder welke omstandigheden de beide lijnen g' van g'' van een paar zouden kunnen samen vallen Met dit doel berekenen wij de discriminanten zoowel voor de vier vergelijkingen (D) als voor de 12 andere, die ten opzichte van de regelscharen (234), (314), (124) van overeenkomstige beteekenis zijn. In de volgende tabel zijn de uitkomsten van die berekening opgenomen.

Discriminanten.	(234)	(314)	(124)	(321)
$a+b+c-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}-2\sqrt{ab}$	H_1H_8	H_2H_8	H_3H_8	H_4H_8
$a+b+c+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}-2\sqrt{ab}$	H_2H_7	H_1H_7	H_4H_7	H_3H_7
$a+b+c+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$	H_3H_6	H_4H_6	H_1H_6	H_2H_6
$a+b+c-2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$	H_4H_5	H_3H_5	H_2H_5	H_1H_5

De 16 onderzochte vergelijkingen bezitten te zamen slechts ier verschillende discriminanten, die in de eerste kolom zijn geplaatst. In de volgende kolommen vindt men voor elk ler vier regelscharen (234), (314), (124), (321) aangegeven, bij welk tweetal hyperboloïden H de vooraanstaande discriminant behoort.

Al dadelijk valt het in het oog, dat de vier discriminanten de factoren van den invariant Γ zijn, en dat de hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8 zich geheel anders gedragen dan de overige. Er blijkt namelijk, dat voor $\Gamma = 0$, altijd van één dezer vier oppervlakken de beschrijvende lijnen z zullen raken aan de regelscharen (234), (314), (124) en (321). De lijnen z van de hyperboloïden H_1, H_2, H_3 en H_4 daarentegen kunnen nooit gemeenschappelijke raaklijnen dezer regelscharen zijn. En nu is het duidelijk, hoe men meetkundig kan onderzoeken, of vier gegeven lijnen door een R^3 kunnen worden geraakt. Men behoeft slechts de richtlijnen g' en g'' op te sporen, die de hyperboloïden H met de regelschaar (321) gemeen hebben. Vallen voor een tweetal dezer oppervlakken, bijv. voor H_4 en H_8 de lijnen g' en g'' samen, dan voltooit men de constructie van H_8. Zoo men daarna op H_8 een willekeurige beschrijvende lijn z aanneemt, zullen de hyperboloïden $(23\,z)$ en $(14\,z)$, $(31\,z)$ en $(24\,z)$, $(12\,z)$ en $(34\,z)$ paarsgewijze elkaar doorsnijden volgens krommen R^3, welke aan 1, 2, 3 en 4 raken.

Het volledige stelsel dier krommen wordt gevonden, als men de lijn z het oppervlak H_8 laat doorloopen.

Desverkiezende echter kan men, zooals Voss opmerkt, ook uit één der rakende R^3 door een vrij eenvoudige constructie alle overige afleiden.

7. Voor wij evenwel tot de beschouwing van het bijzondere geval $\Gamma = 0$ overgaan, willen wij eerst wijzen op een niet onbelangrijke eigenschap der hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8, die het onderscheid tusschen deze vier oppervlakken en de vier overige nog duidelijker in het licht stelt. De vier gegeven lijnen kunnen op drie verschillende wijzen in paren worden gerangschikt. Iedere daardoor verkregen combinatie bijv. (23 ; 14) bepaalt, zooals wij zullen zien, een zooge-

naamd nulsysteem van hoogere orde. Van dergelijke stelsels sprekende, denken wij aan een verwantschap, waardoor aan elk punt een door dit punt gelegd vlak, aan elk vlak een in dit vlak gelegen punt is toegevoegd. Men noemt het nulsysteem van de eerste orde, wanneer met de punten eener rechte lijn de vlakken van een vlakkenbundel overeenkomen en omgekeerd.

Ten aanzien van de combinatie (23 ; 14) nu houdt men in het oog, dat door ieder willekeurig punt een snijlijn van 2 en 3, benevens een snijlijn van 1 en 4 gaat Het vlak dezer snijlijnen kan dus als nulvlak aan het aangenomen punt worden toegevoegd. Omgekeerd treft men in een willekeurig vlak een snijlijn van 2 en 3, benevens een snijlijn van 1 en 4 aan. Het snijpunt dezer lijnen mag als het nulpunt van het vlak worden aangemerkt. Daarmede is uit de combinatie (23 ; 14) een nulsysteem afgeleid. Er kan gemakkelijk worden aangetoond, dat het nulpunt een ruimtekromme R^3 doorloopt, als het nulvlak wentelt om een rechte lijn, en dat met de punten van een puntreeks de raakvlakken van een ontwikkelbaar oppervlak van de derde klasse als nulvlakken overeenkomen. Nog eenvoudiger wordt het, wanneer men te doen heeft met een rechte lijn l, die op de beide transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4 rust. Aan de punten van l zijn toegevoegd de vlakken door een zekere lijn x, die eveneens f' en f'' ontmoet, terwijl omgekeerd de vlakken door de lijn l de nulvlakken zijn van de punten der lijn x. De overeenkomst tusschen l en x draagt een involutorisch karakter. Wij zoeken naar de meetkundige plaats van x in de onderstelling, dat l een regelschaar beschrijft. Daar deze laatste lijn altijd op f' en f'' blijft rusten, mag men als in art. 4 haar coördinaten aangewezen denken door de zes vergelijkingen

$$p_l = \Sigma A_1 p_1 , \ldots\ldots u_l = \Sigma A_1 u_1,$$

waarbij de veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ gebonden zijn aan de reeds meervermelde voorwaarde

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0.$$

Tusschen die coëfficienten bestaat echter, omdat l een egelschaar doorloopt, nog een tweede en wel lineaire betrekking, die men kan schrijven

$$\Sigma\, \pi_1 A_1 = \pi_1 A_1 + \pi_2 A_2 + \pi_3 A_3 + \pi_4 A_4 = 0.$$

Voor de aan l toegevoegde lijn x kan men op dezelfde wijze handelen en stellen

$$p_x = \Sigma\, V_1 p_1, \ldots u_x = \Sigma\, V_1 u_1,$$
$$\Sigma\, V_2 V_3 (23) = 0.$$

Men bedenkt, ter bepaling van de coëfficienten $V_1, \ldots V_4$, dat iedere lijn, die 1, 4 en l of 2, 3 en l snijdt, ook x ontmoet. Dit vereischt

$$V_1 = \varrho A_1,\ V_2 = \sigma A_2,\ V_3 = \sigma A_3,\ V_4 = \varrho A_4.$$

Substitutie van deze waarden van $V_1, \ldots V_4$ in de vergelijking

$$\Sigma\, V_2 V_3 (23) = 0$$

levert

$$\varrho^2 A_1 A_4 (14) + \varrho\sigma \{A_3 A_1 (31) + A_1 A_2 (12) + A_2 A_4 (24) + \\ + A_3 A_4 (34)\} + \sigma^2 A_2 A_3 (22) = 0,$$

waaruit in verband met

$$\Sigma\, A_2 A_3 (23) = 0$$

volgt

$$(\varrho - \sigma) \{\varrho A_1 A_4 (14) - \sigma A_2 A_3 (23)\} = 0.$$

Daar, zoolang l en x niet samenvallen, ϱ en σ verschillend zijn, komt men tot de gevolgtrekking

$$\varrho = A_2 A_3 (23),\ \sigma = A_1 A_4 (14),$$

zoodat ten slotte de coördinaten van x worden uitgedrukt door zes vergelijkingen van den vorm

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 + \\ + A_2 A_3 A_4 (23) p_4 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

De daarin voorkomende veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ moeten voldoen aan de twee voorwaarden

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 A_1 = 0.$$

Uit dit alles mag men opmaken, dat de lijn x tot meetkundige plaats heeft een unicursaal regelvlak F^6 van den zesden graad, waarop de gegeven lijnen 1, 2, 3 en 4 als dubbelstralen voorkomen. Als men in aanmerking neemt, dat iedere beschrijvende lijn van de regelschaar (321) zes lijnen x, elke lijn x daarentegen slechts twee van die beschrijvende lijnen treft, dan volgt bovendien, dat de beide transversalen f' en f'' drievoudige lijnen van F^6 zijn. Dit oppervlak stelt nu voor, zoowel de omhullende van de nulvlakken der punten van de door l beschreven hyperboloïde, als de meetkundige plaats der nulpunten van de aan die hyperboloïde rakende vlakken.

8. Maar naast de combinatie (23 ; 14) staan de beide andere (31 ; 24) en (12 ; 34), en zoo zijn dus aan de door l beschreven hyperboloïde niet één, maar drie oppervlakken F^6 toegevoegd. Wij stellen de vraag, of het mogelijk is de hyperboloïde zoo te kiezen, dat de drie regelvlakken samenvallen. Om dit te onderzoeken, beschouwen wij de vergelijkingen (E), verwisselen hierin eerst 3 met 4, daarna 2 met 3, en verkrijgen daardoor de analytische voorstelling van de beide regelvlakken F^6, waartoe de combinaties (31 , 24) en (12 , 34) aanleiding geven. Aldus vindt men naast de vergelijkingen van het eerste regelvlak

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 + \\ + A_2 A_3 A_4 (23) p_4,$$

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 A_1 = 0,$$

voor het tweede

$$p_x - B_1 B_2 B_4 (24) p_1 + B_1 B_2 B_3 (31) p_2 + B_2 B_3 B_4 (24) p_3 + \\ + B_1 B_3 B_4 (31) p_4,$$

$$\Sigma B_2 B_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 B_1 = 0,$$

en voor het derde

$$p_x = C_1 C_3 C_4 (34) p_1 + C_2 C_3 C_4 (34) p_2 + C_1 C_2 C_3 (12) p_3 + \\ + C_1 C_2 C_4 (31) p_4,$$

$$\Sigma C_2 C_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 C_1 = 0.$$

Zullen nu door deze drie groepen van vergelijkingen, de coördinaten van dezelfde lijn x kunnen worden voorgesteld, dan moeten de veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$, $B_1, \ldots B_4$, $C_1, \ldots C_4$ voldoen aan de betrekkingen

$$\frac{B_1}{A_2(23)(24)} = \frac{B_2}{A_1(31)(14)} = \frac{B_3}{A_4(14)(24)} = \frac{B_4}{A_3(23)(31)},$$

$$\frac{C_1}{A_3(23)(34)} = \frac{C_2}{A_4(14)(34)} = \frac{C_3}{A_1(12)(14)} = \frac{C_4}{A_2(23)(12)}.$$

Inderdaad volgt in die onderstelling uit $\Sigma A_2 A_3 (23) = 0$, dat ook de voorwaarden

$$\Sigma B_2 B_3 (23) = 0, \quad \Sigma C_2 C_3 (23) = 0$$

zijn bevredigd. De overige betrekkingen tusschen de coëfficienten evenwel bepalen de nog onbekende grootheden $\pi_1, \ldots \pi_4$. Men vindt namelijk

$$\frac{\pi_1}{\pi_2(31)(14)} = \frac{\pi_2}{\pi_1(23)(24)} = \frac{\pi_3}{\pi_4(23)(31)} = \frac{\pi_4}{\pi_3(14)(24)},$$

$$\frac{\pi_1}{\pi_3(12)(14)} = \frac{\pi_2}{\pi_4(23)(12)} = \frac{\pi_3}{\pi_1(23)(34)} = \frac{\pi_4}{\pi_2(14)(34)}.$$

Hieraan kan worden voldaan, als men stelt

$$\frac{\pi_1}{\pm\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{\pi_2}{\pm\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{\pi_3}{\pm\sqrt{(31)(32)(34)}} = \\ = \frac{\pi_4}{\pm\sqrt{(41)(42)(43)}}.$$

De teekens der hierin voorkomende wortelgrootheden zijn zoo te kiezen, dat steeds

$$\pi_1 \pi_3 (24) = + \pi_2 \pi_4 (31).$$

De wortelgrootheden zelve troffen wij reeds in art. 1 aan; zij werden daar door de letters $P_1, \ldots P_4$ aangeduid.

Uit het voorafgaande komt men tot het besluit, dat de lijn l vier hyperboloïden kan beschrijven, die aan den gestelden eisch beantwoorden, en wel hyperboloïden, aangewezen door de vergelijkingen

$$p_l = \Sigma A_1 p_1, \ldots u_l = \Sigma A_1 u_1,$$
$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \quad \Sigma A_1 P_1 = 0,$$

in welke laatste voorwaarde men de teekens van $P_1, \ldots P_4$ te nemen heeft, zooals de onderstaande tabel dit aangeeft.

P_1	P_2	P_3	P_4	
+	—	—	+	H_5
+	—	+	—	H_6
+	+	—	—	H_7
+	+	+	+	H_8

En nu blijkt door vergelijking met hetgeen in art. 3 werd afgeleid, dat de lijnen l niet anders zijn dan de richtlijnen y van de vier hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8. Alleen aan deze hyperboloïden komt derhalve de eigenschap toe, dat de omhullende van de nulvlakken hunner punten, of wat hetzelfde is, de meetkundige plaats van de nulpunten hunner raakvlakken steeds gevormd wordt door hetzelfde regelvlak F^6, onverschillig van welk der drie beschouwde nulsystemen men moge uitgaan. De coördinaten van de beschrijvende lijnen x van dit regelvlak zijn dan bepaald door de vergelijkingen

$$p_x = \Sigma V_1 p_1, \ldots u_x = \Sigma V_1 u_1,$$
$$\Sigma V_2 V_3 (23) = 0, \quad \Sigma \frac{1}{V_1 P_1} = 0.$$

De teekens der grootheden $P_1, \ldots P_4$ worden geregeld volgens de voorafgaande tabel.

9. Aan de lijnen z' van een der vier besproken hyperboloïden H zijn thans door middel van een der drie nulsystemen, bijv. (12; 34), zekere ruimtekrommen R^3 toegevoegd, die op het met H overeenkomende oppervlak F^6 zijn gelegen. De nulvlakken van de punten van een dezer krommen omhullen de toegevoegde lijn z', de kromme zelve heeft de lijnen 1, 2, 3, 4 en z' tot koorden en gaat, zooals in art. 6 werd opgemerkt, voor het geval $\Gamma = 0$ in een aan 1, 2, 3 en 4 rakende kromme over.

In het algemeene geval $\Gamma \lessgtr 0$ vertegenwoordigen de vier paar snijpunten van R^3 met 1, 2, 3 en 4 vier binaire kwadratische vormen $f_1, \ldots f_4$, waartusschen invariante betrekkingen bestaan, die wij willen onderzoeken.

De vier vormen

$$f_1 = a_x^2, \quad f_2 = b_x^2, \quad f_3 = c_x^2, \quad f_4 = d_x^2$$

bezitten de gemeenschappelijke invarianten

$$A_{11} = (a\,a')^2, \quad A_{23} = (b\,c)^2, \quad R_{23} = A_{22}\,A_{33} - A^2_{23},$$
$$R_{234} = (b\,c)\,(b\,d)\,(c\,d), \text{ enz.}$$

Daarbij is altijd voldaan aan de identiteit

$$0 = R_{234} f_1 + R_{314} f_2 + R_{124} f_3 + R_{321} f_4.$$

Laten wij aannemen, dat de lijn z' op R^3 een puntenpaar bepaalt, voorgesteld door den binairen vorm f_0, dan heeft men, omdat de vormen f_0, f_1 en $_2$, zoowel als de vormen f_0, f_3 en f_4 in involutie zijn,

$$f_0 = R_{234} f_1 + R_{314} f_2 = - R_{124} f_3 - R_{321} f_4,$$

waaruit volgt

$$R_{10} = R^2_{314}\,R_{12}, \quad R_{20} = R^2_{234}\,R_{12}, \quad R_{30} = R^2_{321}\,R_{34},$$
$$R_{40} = R^2_{124}\,R_{34}.$$

In de voorloopige onderstelling, dat wij met de hyperboloïde H_8 te doen hebben, is volgens de vergelijkingen (B) van art. 2

$$\frac{(1\,z)}{\sqrt{(12)\,(13)\,(14)}} = \frac{(2\,z)}{\sqrt{(21)\,(23)\,(24)}} = \frac{(3\,z)}{\sqrt{(31)\,(32)\,(34)}} =$$
$$= \frac{(4\,z)}{\sqrt{(41)\,(42)\,(43)}}.$$

Maar blijkbaar zijn hier de invarianten $(1\,z)$, (12), enz. evenredig te stellen aan de resultanten R_{10}, R_{12}, enz., zoo dat men verkrijgt

$$\frac{R^2_{234}}{\sqrt{R_{23}R_{24}R_{34}}} = \frac{R^2_{314}}{\sqrt{R_{31}R_{14}R_{34}}} = \frac{R^2_{124}}{\sqrt{R_{12}R_{14}R_{24}}} = \frac{R^2_{321}}{\sqrt{R_{23}R_{31}R_{12}}}. \quad (F)$$

Om de beteekenis van deze drievoudige betrekking tusschen vier binaire vormen beter te doen uitkomen, is het wenschelijk ze eerst in een andere gedaante te brengen.

Uit (F) volgt onmiddellijk

$$\frac{R^6_{321}}{R_{23}\,R_{31}\,R_{12}} = \frac{R^2_{234}\,R^2_{314}\,R^2_{124}}{R_{14}\,R_{24}\,R_{34}}.$$

Deeling door

$$\frac{R^4_{321}}{R_{23}\,R_{31}\,R_{12}} = \frac{R^4_{234}}{R_{23}\,R_{24}\,R_{34}}$$

geeft

$$R^2_{321}\,R_{14} = +\,\frac{R^2_{314}\,R^2_{124}}{R^2_{234}}\,R_{23} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (G)$$

Op te merken valt, dat die vergelijking geldig blijft, zoo men van de hyperboloïden H_5, H_6 of H_7 uitgaat. Daarentegen verkrijgt het tweede lid het negatieve teeken, als men de lijn z' aanneemt op een der hyperboloïden H_1, H_2, H_3 of H_4.

De identiteit

$$-\,R_{321}\,f_4 = R_{234}\,f_1 + R_{314}\,f_2 + R_{124}\,f_3$$

voert tot de vergelijking

$$R^2_{321}R_{14} = R^2_{314}R_{12} + R^2_{124}R_{31} - 2R_{314}R_{124}(A_{12}A_{31} - A_{23}A_{11}).$$

Brengt men deze in verband met de vergelijking (G), aan komt er

$$0 = -R^2_{314} R^2_{124} R_{23} + R^2_{124} R^2_{234} R_{31} + R^2_{234} R^2_{314} R_{12} - \\ - 2 R^2_{234} R_{314} R_{124} (A_{12} A_{31} - A_{23} A_{11}).$$

Cyclische verwisseling van 1, 2 en 3 levert nog twee andere vergelijkingen van dezelfde gedaante, te weten:

$$0 = R^2_{314} R^2_{124} R_{23} - R^2_{124} R^2_{234} R_{31} + R^2_{234} R^2_{314} R_{12} - \\ - 2 R^2_{314} R_{124} R_{234} (A_{23} A_{12} - A_{31} A_{22}),$$

$$0 = R^2_{314} R^2_{124} R_{23} + R^2_{124} R^2_{234} R_{31} - R^2_{234} R^2_{314} R_{12} - \\ - 2 R^2_{124} R_{234} R_{314} (A_{31} A_{23} - A_{12} A_{33}).$$

Zoo men daarin kortheidshalve stelt

$$a = R_{23}, \quad b = R_{31}, \quad c = R_{12},$$

$$f = A_{12} A_{31} - A_{23} A_{11}, \quad g = A_{23} A_{12} - A_{31} A_{22}, \\ h = A_{31} A_{23} - A_{12} A_{33},$$

zal men deze drie vergelijkingen kunnen vervangen door de onderstaande

$$0 = a R_{314} R_{124} - h R_{124} R_{234} - g R_{234} R_{314},$$

$$0 = -h R_{314} R_{124} + b R_{124} R_{234} - f R_{234} R_{314},$$

$$0 = -g R_{314} R_{124} - f R_{124} R_{234} + c R_{234} R_{314}.$$

Deze vergelijkingen nu kunnen niet gelijktijdig bestaan, tenzij men heeft

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & -h & -g \\ -h & b & -f \\ -g & -f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 - 2fgh = 0 \ldots \text{(H)}$$

En daarmede zijn eindelijk de betrekkingen (F) tusschen de vier vormen teruggebracht tot vier voorwaarden van de gedaante $\Delta' = 0$, waarin er telkens slechts drie voorkomen. Deze vier voorwaarden zijn natuurlijk slechts met drie onaf-

hankelijke betrekkingen gelijkwaardig. Men kan gemakkelijk speciale vormen aangeven, die er aan voldoen, door bijv. uit te gaan van de onderstelling

$$a = b = c,$$
$$f = g = h.$$

Begeert men daarbij werkelijk verschillende vormen, wier discriminanten niet nul worden, en waarvan geen drie in involutie zijn, dan moet men nemen $a = -2$, $f = +\frac{2}{3}$, waardoor men neerkomt op de vier zoogenaamde vormen van den kubus *), welker produkt wordt voorgesteld door

$$xy(x^6 - 8x^3y^3 - 8y^6),$$

en die voldoen aan de identieke betrekkingen

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0, \quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 0.$$

10. Hiermede is evenwel de meetkundige beteekenis van de invariante voorwaarden (F) of (H) nog niet gevonden.

Om de te onderzoeken figuur te vereenvoudigen, nemen wij op de in het vorige artikel beschouwde kromme R^3 een willekeurig punt, en projecteeren daaruit de kromme met haar vier koorden 1, 2, 3 en 4 op een willekeurig plat vlak. Door die bewerking verkrijgt men een kegelsnee C^2 met vier harer snijlijnen 1, 2, 3 en 4. De puntenparen, waarin 1, 2 en 3 de kegelsnee treffen, bepalen weder drie binaire kwadratische vormen, waartusschen nog steeds de betrekking (H) bestaat. Het is de vraag, welke bijzondere ligging de drie lijnen, ingevolge de voorwaarde (H), ten opzichte van C^2 vertoonen.

Laten wij aannemen, dat ten opzichte van een niet nader aangeduiden coördinatendriehoek XYZ de kegelsnee C^2 tot vergelijking heeft

$$XY - Z^2 = 0.$$

---

*) Gordan-Kerschensteiner, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, II, bls. 161.

De coördinaten van de punten dezer kromme zijn op de gebruikelijke wijze uit te drukken in een parameter μ volgens de vergelijkingen

$$\frac{X}{\mu^2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{\mu}.$$

Als wij onderstellen, dat de bovenvermelde drie binaire vormen zijn

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 \mu^2 + 2 a_1 \mu + a_2, \\ f_2 &= b_0 \mu^2 + 2 b_1 \mu + b_2, \\ f_3 &= c_0 \mu^2 + 2 c_1 \mu + c_2, \end{aligned}$$

vinden wij voor de vergelijkingen der lijnen 1, 2 en 3 in volgorde

$$\begin{aligned} 0 = x &= a_0 X + a_2 Y + 2 a_1 Z, \\ 0 = y &= b_0 X + b_2 Y + 2 b_1 Z, \\ 0 = z &= c_0 X + c_2 Y + 2 c_1 Z, \end{aligned}$$

waaruit men afleidt

$$X = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad Y = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}.$$

De vergelijking van de kegelsnee C^2 ten opzichte van den coördinatendriehoek met 1, 2 en 3 als zijden wordt verkregen door deze waarden in

$$X Y - Z^2 = 0$$

te substitueeren. Als zoodanig vindt men na eenige herleiding

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y = 0.$$

De coëfficienten a, b, c, f, g en h hebben hierin de beteekenis, die wij in het vorige artikel daaraan toekenden.

Beschouwt men deze uitkomst in verband met de voor-

waarde (H), dan is de meetkundige vertolking van de invariante betrekking $\Delta = 0$ aan geen bezwaar meer onderhevig. Een bekende stelling *) toch leert, dat in het geval

$$\Delta' = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 - 2fgh = 0,$$

de zes lijnen uit de hoekpunten van den coördinatendriehoek, getrokken naar de snijpunten van de kegelsnee C^2 met de overstaande zijden, drie aan drie door twee punten gaan.

De krommen R^3, die door middel van de in art. 7 beschouwde nulsystemen, aan de beschrijvende lijnen z van de hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8 zijn toegevoegd, hebben dus ten opzichte van hunne vier koorden 1, 2, 3 en 4 een eigenaardige ligging, die gekenmerkt is door de volgende eigenschap:

Beschouwt men de kegelsnee en de vierzijde, verkregen door een dergelijke kromme R^3 en haar vier koorden 1, 2, 3 en 4 op een willekeurig vlak uit een harer punten te projecteeren, dan zullen in elk der vier driehoeken dezer vierzijde de zes lijnen, die uit de toppen getrokken zijn naar de snijpunten der kegelsnee met de overstaande zijden, drie aan drie door twee punten gaan.

11. Het voorafgaande onderzoek heeft nu doen zien, hoe men door een meetkundige constructie de gevallen $\Gamma = 0$, $\Gamma \gtrless 0$ kan onderscheiden, en hoe de verschillende covariante figuren, die in het eerste geval de aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen R^3 voortbrengen, worden opgespoord. Thans is het wellicht niet zonder belang nog even bij het geval $\Gamma = 0$ stil te staan.

Laten wij aannemen, dat aan de beschrijvende lijnen z van de hyperboloïde H_8 in elk der meervermelde drie nulsystemen aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen zijn toegevoegd. Zooals in art. 9 bleek, vormen deze krommen een unicursaal regelvlak F^6, dat 1, 2, 3 en 4 tot dubbelstralen,

*) SALMON, *Conic sections*, 6th Ed., blz. 408, Ex. 13.

en hun beide transversalen f' en f'' tot drievoudige lijnen heeft. Intusschen vertoont het oppervlak F^6, omdat $\Gamma = 0$ is, een nieuwe bijzonderheid; de dubbelstralen zijn keerribben geworden.

Want op de lijn 1 bijv. komen twee bladen van het oppervlak samen, en iedere kromme R^3 moet in het punt, waar zij die lijn raakt, van het eene op het andere blad kunnen overgaan. Dit vereischt, dat de raakvlakken aldaar aan de beide bladen in het osculatievlak der kromme vallen, waardoor de lijn 1 inderdaad keerribbe wordt.

Voorts zijn de lijnen f' en f'' ten opzichte van elke kromme R^3 toegevoegde poollijnen, zoodat iedere beschrijvende lijn x van F^6 voor alle krommen als een osculatiestraal moet worden beschouwd.

Het osculatievlak in een willekeurig punt van een der krommen bevat dientengevolge steeds een beschrijvende lijn, en is daarom in het aangenomen punt raakvlak van F^6. Vandaar dat, zooals Voss opmerkt, de krommen R^3 de asymptotische krommen van het oppervlak F^6 vormen.

Als men de kromme R^3 het oppervlak F^6 laat beschrijven, zullen de vier raakpunten op 1, 2, 3 en 4 blijkbaar projectivische puntreeksen doorloopen, waarvan de snijpunten dezer lijnen met de transversalen f' en f'' twee viertallen van overeenkomstige punten zijn.

Door dergelijke overleggingen komt men er toe, om een tweetal krommen R^3 en R'^3 aan te merken als overeenkomstige figuren in twee collineaire ruimten, welke de stralen der congruentie $(f' f'')$ gemeen hebben. Een herhaalde homographische transformatie is derhalve voldoende, om uit één der krommen R^3 alle andere af te leiden.

Die afleiding evenwel kan, zoo men wil, ook nog langs anderen weg geschieden.

Houdt men namelijk in het oog, dat alle lineaire complexen, die aan de krommen R^3 zijn toegevoegd, de congruentie $(f' f'')$ bevatten, dan kan men bewijzen, dat er altijd in den daardoor bepaalden complexbundel een complex K is te vinden, ten opzichte waarvan twee krommen R^3 en R'^3 wederkeerige figuren zijn, zoodanig, dat bij een punt

van de eene kromme als nulpunt een osculatievlak van de andere als nulvlak behoort.

En van zulk een verwantschap uitgaande, kan men zonder moeite aantoonen, dat voor het regelvlak F^4 van den vierden graad, beschreven door die koorden van R^3, welke in het complex K gelegen zijn, de kromme R^3 de keerlijn vormt van het dubbelaanrakende ontwikkelbare oppervlak, hetwelk om F^4 kan worden geconstrueerd.

12. Uit dit alles blijkt genoegzaam, dat voor alle krommen R^3 van F^6 de dubbelverhouding der vier raaklijnen 1, 2, 3 en 4 dezelfde is. Wij willen nog doen zien, hoe die dubbelverhouding λ afhangt van de overeenkomstige dubbelverhoudingen λ' en λ'', waartoe de beide viertallen van snijpunten, die men op de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' vindt, aanleiding geven. Daartoe schrijven wij, zooals Voss gedaan heeft, voor de coördinaten der raaklijnen eener R^3 bikwadratische functies van een veranderlijken parameter μ. Laten wij onderstellen, dat voor 1, 2, 3 en 4 deze parameter de waarden $\mu_1, \ldots \mu_4$ aanneemt. Dat de invarianten (23), (31), enz. evenredig zijn te stellen aan de grootheden $(\mu_2-\mu_3)^4$, $(\mu_3-\mu_1)^4$ enz., volgt dan vanzelf. Voor de dubbelverhouding λ geldt derhalve

$$\lambda^4 = \left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1-\mu_3} : \frac{\mu_4-\mu_2}{\mu_4-\mu_3}\right)^4 = \frac{(12)(34)}{(31)(24)} = \frac{c}{b}.$$

Wij brengen deze uitkomst in verband met de vergelijking

$$\mu^2 b + 2\mu(-a+c) + (2a-b+2c) = 0, \ldots (C)$$

die is afgeleid in art. 5. Deze levert de parameterwaarden μ' en μ'', behoorende bij de beide lijnen h' en h'' van de regelschaar (321), welke door 4 worden gesneden, in de onderstelling, dat aan 1, 2 en 3 de parameterwaarden -1, ∞, $+1$ toekomen.

Voor λ' heeft men bijgevolg

$$\lambda' = \frac{-1-\infty}{-1-1} : \frac{\mu'-\infty}{\mu'-1} = \frac{1-\mu'}{2}.$$

Evenzoo is

$$\lambda'' = \frac{1-\mu''}{2},$$

zoodat volgens (C)

$$\lambda' \lambda'' = \frac{1}{4}(1-\mu')(1-\mu'') = \frac{c}{b}$$

Tusschen de drie beschouwde dubbelverhoudingen bestaat dus de zeer eenvoudige betrekking

$$\lambda^4 = \lambda' \lambda'',$$

die leert, dat voor vier willekeurige raaklijnen eener R^3 de vierde macht der dubbelverhouding gelijk is aan het produkt der beide overeenkomstige dubbelverhoudingen, behoorende bij de twee groepen van vier snijpunten, welke men op de twee gemeenschappelijke transversalen dezer vier raaklijnen aantreft.

13. Eindelijk mogen nog voor het stelsel der rakende krommen R^3 de meest voor de hand liggende kenmerkende getallen worden afgeleid. Onmiddellijk zijn als zoodanig bekend de getallen ν en ν', die in de notatie van SCHUBERT *) aanwijzen, hoeveel krommen uit het stelsel een gegeven lijn snijden, of een osculatievlak door een gegeven lijn laten gaan. Volgens het voorafgaande is $\nu = \nu' = 6$.

Zooals werd opgemerkt, is het regelvlak F^6 unicursaal, en daarom van den rang 10. Iedere raaklijn van F^6 is evenwel osculatiestraal voor de kromme R^3, die door het raakpunt gaat, daarom vormen de osculatiestralen een complex van den graad $\sigma = 10$.

Om te beslissen, hoeveel krommen door een gegeven vlak worden geraakt, heeft men te bedenken, dat de snijpunten van het vlak met de krommen een kubische involutie vormen, gelegen op een unicursale kromme, de doorsnede van het vlak met F^6.

Zulk een involutie bezit vier dubbelpunten, dientengevolge

*) T. a. p., blz. 163.

zijn er $\varrho = 4$ krommen, welke een gegeven vlak raken. Maar dan zijn er ook evenveel, die een raaklijn door een gegeven punt laten gaan, derhalve $\varrho' = 4$.

Er blijft over den graad β te bepalen van het complex, dat door de koorden der krommen R^3 wordt gevormd. Om die bepaling te verrichten, zullen wij aan ieder punt p van een der krommen elk ander punt q van dezelfde kromme toevoegen, en op het aldus geconstrueerde drievoudig oneindig stelsel van puntenparen p, q met de verbindingslijn g toepassen de coïncidentieformule *)

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s.$$

De teekens p^3 en q^3, die als voorwaarde stellen, dat de punten p en q gegeven zijn, hebben hier de waarde nul. Het teeken εq_p duidt de voorwaarde aan, dat p en q samenvallen en de lijn g door een gegeven punt gaat. Van vier krommen gaat volgens het voorafgaande een raaklijn door een gegeven punt. Maar bovendien vormen de transversalen f' en f'' twee ontaardingen, waarvoor de snijpunten met 1, 2, 3, 4 als zoogenaamde toppen moeten worden beschouwd. De lijnen uit het gegeven punt naar deze acht toppen getrokken, worden geacht de voorwaarde εg_p te bevredigen.

Men heeft dus $\varepsilon g_p = 12$. Eindelijk is g_s het teeken van de voorwaarde, die uitdrukt, dat de lijn g in een gegeven stralenbundel ligt. Nu bevat iedere stralenbundel β koorden g, waarop twee punten der kromme liggen; elk dezer twee kan het punt p zijn, daarom zou men voor g_s de waarde 2β te schrijven hebben. De stralen uit den bundel echter, die f' en f'' snijden, voldoen elk driemaal aan de voorwaarde g_s; wij hebben dus $g_s = 2\beta + 6$. En dan geeft de formule $\beta = 3$, welke uitkomst zich zonder moeite laat bevestigen, als men in het bijzonder het vlak van den stralenbundel door een der lijnen f' en f'' laat gaan. Even groot is ten slotte de graad β' van het complex, hetwelk

*) Schubert, t. a. p., blz. 44, form. 3.

le assen (onderlinge doorsnijdingen der osculatievlakken) van le krommen R^3 bepalen.

Alles te zamen nemende, heeft men in de onderstelling $\Gamma = 0$, volgens de schrijfwijze van SCHUBERT,

$$T^4 \nu = T^4 \nu' = 6, \quad T^4 \varrho = T^4 \varrho' = 4, \quad T^4 \sigma = 10,$$
$$T^4 \beta = T^4 \beta' = 3.$$

Breda, Mei 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 27 September 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HOOGEWERFF, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, SCHOUTE, FORSTER, KAPTEYN, VAN 'T HOFF, PLACE, STOKVIS, MAC GILLAVRY, HOEK, HUBRECHT, VAN DIESEN, ZAAIJER, BEHRENS, VAN RIEMSDIJK, J. A. C. OUDEMANS, BIERENS DE HAAN, WEBER, GRINWIS, PEKELHARING, SCHOLS, MICHAËLIS, HOFFMANN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

— C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 28 Juni, 9 Augustus 1890; 2°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 27 Juni 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teijler's Stichting te Haarlem, 5 Juli 1890; 4°. W. P. WOLTERS, Secretaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 20 Augustus 1890; 5°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de Polytechnische School te Delft, 30 Juni 1890; 6°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 16 Juli

890; 7°. E. Dupont, Directeur van het Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique te Brussel, 20 Augustus 1890; 8°. E. Coubraux, Bibliothecaris van de Société entomologique de Belgique te Brussel, 20 Augustus 1890; 9°. E. Reuens, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, 9 Augustus 1890; 10°. P. J. van Beneden te Leuven, 13 Augustus 1890; 11°. A. Le Jolis, Secretaris van de Société des Sciences naturelles te Cherbourg, November 1888; 12°. H. Rix, Bibliothecaris van de royal Society te Londen, 26 Augustus 1890; 13°. P. L. Sclater, Secretaris van de zoological Society te Londen, 27 Augustus 1890; 14°. den Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 25 Augustus 1890; 15°. J. D. Hooker, Kew, 13 Augustus 1890; 16°. H. White, Bibliothecaris van de Cambridge philosophical Society te Cambridge, 18 Augustus 1890; 17° F. Nicholson, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 19 Augustus 1890; 18°. P. G. Tait, Secretaris van de royal Society te Edinburg, 21 Augustus 1890; 19°. H. Hein, Secretaris van de anthropologische Gesellschaft te Weenen, 21 Augustus 1890; 20°. Hauer, Directeur van het k. k. Naturhistorisches Hofmuseum te Weenen, 22 Augustus 1890; 21°. D. Stur, Directeur van de k.k. geologische Reichsanstalt te Weenen, 27 Augustus 1890; 22°. P. Hunfalvy, Bibliothecaris van de Académie des Sciences de Hongrie te Budapest, 25 Juni 1890; 23°. F. Czermak, Secretaris van het Naturforschende Verein te Brunn, 1 April 1890; 24°. Marchesetti, Directeur van het Museo civico di Storia naturali te Triëst, 1890; 25°. F. Krauss, Secretaris van het Verein für vaterländische Naturkunde in Wurttemberg te Stuttgart, 15 Mei 1890; 26°. E du Bois Reymond, te Berlijn, 10 Augustns 1890; 27°. G. Voss, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Emden, 23 Augustus 1890; 28°. Matthiesen, Assistent van de Grossherzogliche Sternwarte te Karlsruhe, 25 Augustus 1890; 29°. den Directeur van Justus Perthe's geographischer Anstalt te Gotha, 25 Augustus 1890; 30°. den Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 25 Augustus 1890; 31°. den Directeur van het Germanisches Nationalmuseum te

Neurenberg, 25 Augustus 1890; 32⁰. STEIFF, Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 25 Augustus 1890; 33⁰. H. KREUTZ, Bibliothecaris van de Sternwarte te Kiel, 26 Augustus 1890; 34⁰. O. BUCHNER, Secretaris van het Oberhessischer Geschichtsverein te Giessen, 27 Augustus 1890; 35⁰. HELLMANN, Directeur van het kön. preussisches meteorologisches Institut te Berlijn, 28 Augustus 1890; 36⁰. JOH. FRANCK te Bonn, 30 Augustus 1890; 37⁰. W. KIRCHNER, Bibliothecaris van de physikalisch-medicinische Gesellschaft te Würzburg, 28 Augustus 1890; 38⁰. E. RICHTER, Bibliothecaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 5 September 1890; 39⁰. SCHAARSCHMIDT, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 6 September 1890; 40⁰. G. LIMPRICHT, Bibliothecaris van de Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 10 September 1890; 41⁰. C. KNOOP, Secretaris van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, 11 September 1890; 42⁰. M. FÜRBRINGER, te Jena, 14 September 1890; 43⁰. W. SCHAAFHAUSEN, Secretaris van het Verein für Alterthumskunde im Rheinlande te Bonn, 15 September 1890; 44⁰. den Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Bamberg, 18 September 1890; 45⁰. B. WINDSCHEID te Leipzig, 20 September 1890; 46⁰. den Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Danzig, 22 September 1890; 47⁰. TH. NÖLDEKE te Straatsburg, 1890; 48⁰. den Secretaris van de Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 1890; 49⁰. MESSER, Secretaris van het naturwissenschaftlicher Verein te Bremen, 1890; 50⁰. A. DE CANDOLLE te Genève, 1890; 51⁰. F. IMHOOF BLUMER te Winterthur, 13 Augustus 1890; 52⁰. GRAF, Bibliothecaris van de Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften te Bern, 27 Augustus 1890; 53⁰. GRAF, Bibliothecaris van de naturforschende Gesellschaft te Bern, 27 Augustus 1890; 54⁰. G. B. DE ROSSI te Rome, 22 Augustus 1890; 55⁰. A. LACATELLI, Secretaris van het Institut royal Lombard des Sciences et Lettres te Milaan, 29 Augustus 1890: 56⁰. G. FERRARI, Bibliothecaris van de R. Accademia di Scienze, Littere ed Arti te Modena, 1 Sep-

ember 1890; 57⁵. D. Carutti te Turijn, 8 September 1890; 58⁰. D. Chiloni, Directeur van de R. Biblioteca nazionale centrale te Florence, 10 September 1890; 59⁰. A. Aguilar, Secretaris van de real Academia de Ciencias te Madrid, 2 September 1890; 60⁰. H. Gylden te Stockholm, September 1890; 61⁰. J. Richter, Secretaris van de Société royale des Sciences te Drontheim, 13 September 1890; 62⁰. E. Regel, Directeur van den Jardin impérial de botanique te St. Petersburg, 28 Augustus 1890; 63⁰. den Directeur van het Comité géologique de la Russie te St. Petersburg, 16 September 1890; 64⁰. den Directeur van de Nicolai Hauptsternwarte, 1890; 65⁰. W. Schlüter, Bibliothecaris van de kais. Universitäts-Bibliothek te Dorpat, 31 Augustus 1890; 66⁰. A. Arrhenius, Bibliothecaris van de Societas pro fauna et flora fennicae te Helsingfors, 14 September 1890; 67⁰. W. T. Harris, Bibliothecaris van het Bureau of Education, Department of the Interior te Washington, 1890; 68⁰. Paul, Bibliothecaris van het U.S. naval Observatory te Washington, 21 Juli 1890; 69⁰. J. C. Pilling, Directeur van de U.S. geological Survey te Washington, 30 Juli 1890; 70⁰. S. P. Langley, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 18 Augustus 1890; 71⁰, E. C. Pickering, Directeur van Harvard College Observatory te Cambridge, 22 Juli 1890; 72⁰. E. J. Nolan, Bibliothecaris van de Academy of natural Sciences te Philadelphia, 21 Juli 1890; 73⁰. C. B. Colson, Secretaris van de Elliott Society of Science and Art te Charleston S.C.. 22 Juli 1890; 74⁰. J. Alexander, Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sth. Ottowa. 1890; 75⁰. F. B. Wyngdos, Secretaris van de royal Society of N. S. Wales te Sydney, 16 Juni 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 12, 27 Augustus, 9, 10, 25 September 1890; 2⁰. den Commissaris des Konings in de provincie Friesland te Leeuwarden, 4Juli 1890; 3⁰. G. C. W. Bohnensieg, Con-

servator van Teylers Stichting te Haarlem, 1890; 4°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 26 Juni 1890; 5°. M. Snellen, waarn. Hoofddirecteur van het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 1890; 6°. H. C. Dibbits te Utrecht, 26 September 1890; 7°. C. L. van der Burg te Laag-Soeren, 20 Augustus 1890; 8°. Jos. Habets te Maastricht, 6 Augustus 1890; 9°. J. Bertrand, Secretaris van de Académie des Sciences te Parijs, 16 Juni 1890; 10°. A Duréau, secretaris van de Académie de Médecine te Parijs, 29 April 1889; 11°. L. de Milloué, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 7 Augustus 1890; 12°. den Directeur van de Ecole polytechnique te Parijs, Maart 1890; 13°. R. Blanchard, Secretaris van het Congrès international de Zoologie te Parijs 15 Maart 1890; 14°. A. Gasté, Secretaris van de Académie des Sciences, Arts et belles Lettres te Caen, April 1890; 15°. J. Milsand, Bibliothecaris van de Académie des Sciences, Arts et belles Lettres te Dyon, 31 December 1890; 17°. W. H. M. Christi, Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 1890; 17°. den Directeur van de Commission de Statistique de la ville de Prague, 1890; 18°. Conwentz, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Dantzig, 25 Augustus 1890; 19°. Förstemann, Archivaris van de Kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 1890; 20°. Chr. Eccard, Secretaris van de Pollichia te Dürkheim, December 1888; 21°. Hensinger, Secretaris van de Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften te Marburg, Maart 1890; 22°. Steiff, Directeur van de Kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 11 Juli 1890; 23°. A. J. Palm, Directeur van de Bibliothèque de l'Université royale te Upsala, 11 Augustus 1890; 24°. J. Kennel, Secretaris van de Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, April 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. kennisgevingen van de Heeren Moll, Franchimont,

A. C. Oudemans Jr. en Zeeman, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. brief van Heer A. P. Melchior te Batavia, waarin hij dankzegt voor zijne benoeming tot Correspondent der Afdeeling;

3°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (6 Aug. 1890), ter begeleiding van eene »Beschrijving van de grondsoorten, gevonden bij de drinkwaterboring nabij het hospitaal te Ommerschans", opgesteld door Dr. J. Lorié, privaatdocent in de geologie aan 's Rijks Universiteit te Utrecht. — De Minister verwacht deze Bijlagen later terug. — Zij zal in handen worden gesteld van de geologische Commissie;

4°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (15 Augustus 1890) ter begeleiding van een schrijven van den Italiaanschen gezant te 's Gravenhage, betreffende het voornemen zijner Regeering om te Rome een internationaal congres bijeen te roepen tot het aannemen van een eersten meridiaan. De minister wenscht het gevoelen der Akademie omtrent dit denkbeeld der Italiaansche Regeering te vernemen en bekend gemaakt te worden met de zienswijze, welke de Nederlandsche Regeering eventueel voor de keuze van zulk een eersten meridiaan zou kunnen voorstaan.

Op voorstel van den Voorzitter zal de missive, met de daarbij behoorende stukken, in handen worden gesteld van de Heeren Michaëlis, Schols en van de Sande Bakhuyzen, om advies.

5°. missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (20 Sept. 1890) ter begeleiding van eene circulaire, waaruit blijkt, dat het 2e ornithologisch congres in Mei 1891 gehouden zal worden te Buda-Pest;

6°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (20 Sept. 1890) ter begeleiding van een adres van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië, waarbij subsidie verzocht wordt voor wetenschappelijke natuurkundige onderzoekingen in die gewesten. De missive en het adres gaan vergezeld van twee bijlagen, nl. het gunstig advies van den Heer Directeur van Onder-

wijs, Eeredienst en Nijverheid in Nederlandsch Indië, en eene missive van den Minister van Koloniën, waarin wordt vermeld, op welke wijzen tegenwoordig het natuurwetenschappelijk onderzoek van den Indischen Archipel plaats heeft.

De Voorzitter wenscht deze stukken om advies in handen gesteld te zien van de Heeren SURINGAR, WEBER, MARTIN en PEKELHARING. Aldus wordt besloten;

7°. brief van den Heer Dr. BREWSTER, ter begeleiding van eene verhandeling »over de theorie van de Zon", die hij wenscht opgenomen te zien in de werken der Akademie. Als adviseurs over die verhandeling worden aangewezen de Heeren KAPTEIJN, LORENTZ en BAKHUYS ROOZEBOOM.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen rapport uit over de in Juni aangeboden verhandeling van den Heer CARDINAAL. Het luidt gunstig. De conclusie om het stuk te bestemmen voor de *Verslagen en Mededeelingen* wordt aangenomen.

— De Heer SCHOUTE spreekt over rechtstreeks gelijkvormige vlakke figuren en deelt omtrent deze eenige nieuwe algemeene stellingen mee. Kortheidshalve dringen we den hoofdinhoud van deze in de volgende regels samen:

»In het vlak van twee gegeven rechtstreeks gelijkvormige figuren F_1 en F_2 is een derde figuur F_3 rechtstreeks gelijkvormig met F_1 en F_2 te vinden, die de eigenschap heeft, dat de meetkundige plaats van het snijpunt P der overeenkomstige raaklijnen t_1 en t_2 van een willekeurig aangenomen paar overeenkomstige krommen C_1 en C_2 van F_1 en F_2 de voetpuntskromme is van de overeenkomstige kromme C_3 van F_3 met betrekking tot het dubbelpunt O van F_1 en F_2, dat tevens het dubbelpunt is van F_1 en F_3 en dus ook van F_2 en F_3. Eveneens bevat het vlak een figuur F_α rechtstreeks gelijkvormig met F_1 en F_2, waarvan de met C_1 en C_2 overeenkomende kromme C_α de omhullende is van de lijn t_α door het snijpunt P van t_1 en t_2 zoo getrokken, dat de hoek (t_1, t_α) gelijk zij aan een gegeven hoek α".

»Zijn in het vlak der figuren F_1 en F_2 twee punten P_1 en Q_2 willekeurig aangenomen, dan is in dit vlak een met F_1 en F_2 rechtstreeks gelijkvormige figuur F_μ en een punt R_μ te vinden, zoodanig dat de voetpuntskromme van de met C_1 en C_2 overeenkomende kromme C_μ van F_μ met betrekking tot R_μ de meetkundige plaats is van het punt R_μ, dat den afstand $A_1 A_2$ der overeenkomstige punten van de voetpuntskrommen van C_1 met betrekking tot P_1 en van C_2 met betrekking tot Q_2 in een bepaalde verhouding μ verdeelt. Is Q_2 het punt van F_2, dat met het punt P_1 van F_1 overeenkomt, dan verdeelt R_μ den afstand $P_1 Q_2$ in dezelfde verhouding μ en is het bewijs dezer stelling zeer eenvoudig. Komt echter met P_1 van F_1 in F_2 het punt P_2, met Q_2 van F_2 in F_1 het punt Q_1 overeen, dan wordt de stelling veel samengestelder, zijn de door A_1 en A_2 doorloopen voetpuntskrommen in het algemeen niet gelijkvormig en is de meetkundige plaats van R_μ bij verandering van μ in stede van de rechte lijn $P_1 Q_2$ een unicursale circulaire kromme van den derden graad, enz."

— De heer Hubrecht wenscht eene korte mededeeling te doen over de wijze waarop bij de gewone Spitsmuis (Sorex vulgaris) ten tijde van de embryonale ontwikkeling het verband tusschen het weefsel van moeder en vrucht tot stand komt. Bij een ander insektenetend zoogdier — den egel — had hij dat verband reeds voor eenigen tijd meer uitvoerig beschreven; bij de spitsmuis, welke in dezelfde orde van zoogdieren gerangschikt wordt, zijn zeer principiëele verschillen aanwezig.

In de eerste plaats verdient het opmerking dat het spitsmuis-embryo niet, zooals dat van den egel, in eene duplicatuur van het uterus-slijmvlies (decidua reflexa) wordt opgesloten. Het ligt aanvankelijk vrij in het uterus-lumen; de wand van den uterus ondergaat intusschen reeds voorbereidende wijzigingen van groot gewicht. Ter plaatse waar de embryonen (meestal ten getale van zes of acht) zullen vastgehecht blijven, ontstaat al spoedig eene half bolvormige, later meer peervormige verwijding van het ute-

rus-lumen, aanvankelijk gepaard met eene — relatief — belangrijke verdunning van dat gedeelte van den uterus-wand dat aan het mesometrium is tegenovergesteld. Dit verdunde wandgedeelte vormt als het ware den bodem van een beker, waarin het embryo zal komen te liggen: de opstaande rand van dien beker wordt door lokale plooiing van het uterusslijmvlies gevormd, meer nabij de mesometrale aanhechting. Deze laatste opstaande plooien sluiten zich echter nooit boven het embryo.

De oppervlakte van deze verdikte plooien — de zijwand van den beker dus — levert de eerste aanhechtingsvlakte voor de kiemblaas en wel volgens eene ringvormige zone, ter plaatse waar zich later de area vasculosa bevinden zal. Daarentegen blijft de half spherische bodem van den beker langer vrij: eerst na de ontwikkeling van de allantois legt deze zich hiertegen aan en hier ter plaatse komt de schijfvormige placenta tot ontwikkeling. De placenta is dus, evenals bij den egel, antimesometraal geplaatst.

Het groote verschil met wat wij bij den egel vinden, betreft vooral de histologische wijzigingen, die aan de oppervlakte van het slijmvlies optreden, ter plaatse waar het embryo zich daartegen aanlegt. Gaat bij den egel het epithelium grootendeels te gronde en is het met name het subepitheliale bindweefsel waarin woekeringen optreden, die voor het embryo een voedingsbodem — de zoogen. *trophospheer* — te voorschijn roepen, zoo is bij de spitsmuis van zoodanig te gronde gaan van het epithelium niet alleen geen sprake, maar is het juist dit epithelium, dat zich snel woekerend vermeerdert en een belangrijk aandeel neemt aan de vorming van den voedenden bodem voor het embryo.

Van den aanvang af vertoont dat woekeringsverschijnsel eenig verschil, al naarmate wij de plek onderzoeken waar de area vasculosa of die waar de allantois zich zal gaan vasthechten.

Terwijl eerstgenoemde regio gekenmerkt is door grootere dikte (althans in den aanvang), vertoonen zich in laatstgenoemde meer complicaties. Het gewoekerde epitheliale weefsel, dat, blijkens duidelijke karyolytische figuren, uit de

ieest oppervlakkige laag zijn oorsprong neemt, rangschikt ich al spoedig onder dit laatste — ten deele groepsgewijs ı waaiervorm. En in een iets later stadium hebben die roepen een lumen erlangd, breken naar de holte van den .terus door en bieden aan de allantois-vlokken evenzoo vele ;epraeformeerde crypten ter inhechting. Deze crypten hebben, ›lijkens haar wordingsgeschiedenis met tubulaire uterus-klieren dus niets te maken: de laatsten worden in geringer aantal tusschen de besproken zich vormende crypten aangetroffen en staan, ook wanneer de crypten nog niet met het uterus-lumen communiceeren, daarmede in blijvenden samenhang. Al zijn dus deze kliergangen in den nog verder gewoekerden staat van het uterus-slijmvlies niet gesloten voor daarin binnendringende vlokken, zoo is toch voor verreweg het grooter deel de inhechtingsvlakte dier vlokken eene formatie *ad hoc*, die aan het moederlijk uterus-epithelium zijn ontstaan dankt. Tusschen die epitheliale crypten zendt het vasculaire bindweefselstroma van den uterus reeds vroeg falrijke uitloopers, en, is eenmaal de allantois-vlok ter plaatse aangeland, zoo vindt spoedig eene innige versmelting plaats, die het onmogelijk maakt, in de volwassen lacunaire placenta de grens tusschen beiden aan te geven.

Versmelting van moederlijk en embryonaal weefsel heeft reeds in eene vroegere phase in het gebied van den dojerzak plaats, eveneens voorbereidend aan de nauwere doorvlechting van embryonale en moederlijke vaten ; echter zonder vorming van bepaalde vlokken. Daarbij valt eene voorafgaande verdikking van de buitenste cellaag van den kiemblaaswand — het trophoblast — onmiskenbaar in het oog. Nog later verdient eene andere verdikking van deze trophoblastcellen onze aandacht, alweder volgens eene ringvormige zone, doch thans beneden de aanhechtingsplaats van kiemblaas aan uteruswand. Tevens ontwikkelt zich in den wand van den dojerzak te dier tijde een zeer sterk groen pigment, dat tot in de laatste zwangerschaps-periode herkenbaar blijft.

Spreker legt nogmaals nadruk op het groote verschil tusschen egel en spitsmuis, beide Insectivora, ten aanzien van de hier besproken verschijnselen.

— De Heer VAN DIESEN biedt, om opgenomen te worden in de werken der Akademie, eene verhandeling aan van den Heer J. C. RAMAER, Ingenieur van den Waterstaat: »Het Haarlemmermeer en de meren waaruit het ontstaan is op verschillende tijden vóór de droogmaking". — Zij zal om advies in handen worden gesteld van de Heeren VAN BEMMELEN en BIERENS DE HAAN.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

1. door den Heer J. A. C. OUDEMANS, uit naam van den Heer Dr. VAN RUCKEVORSEL, diens verhandeling: »An attempt to compare the instruments for absolute magnetic measurements at different observatories". Het doel, door den schrijver beoogd, en de uitkomsten door hem verkregen, worden door den Heer OUDEMANS kortelijk toegelicht;

2. door den Heer FORSTER, uit naam van den Heer C. J. DE FREYTAG, zijn discipel, diens brochure »Ueber die Einwirkung concentrirter Kochsalzlösungen auf das Leben der Bacterien";

3. door den Heer STOKVIS diens voordracht »Ueber vergleichende Rassenpathologie und die Widerstandsfähigkeit des Europäers in den Tropen", uitgesproken in het onlangs te Berlijn gehouden internationaal geneeskundig congres;

4. door den Heer BIERENS DE HAAN: *a.* uit naam van den Heer A. MARRE, diens »Notice sur les travaux scientifiques et littéraires de M. ARCHIDE MARRE"; *b.* uit eigen naam: »Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des oeuvres de CHRISTIAAN HUYGENS", opgenomen in de werken der Association française pour l'avancement des Sciences;

5. door den Heer WEBER zijne met platen opgeluisterde verhandeling: »Ethnographische Notizen ueber Flores und Celebes".

De Heer WEBER deelde daarbij mede, dat, in tegenstelling met wat gewoonlijk verzekerd wordt, de bewoners van het binnenland van Flores een geheel ander volk zijn dan die der kusten. Het bleek hem, dat de ware inboorlingen van Flores zeer zeker niet tot de West-Maleiers behooren, zooals

t heden geloofd werd;

6. door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN: »Annalen er Sternwarte in Leiden, Band VI".

De Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN deelt mede, dat n de thans aangeboden waarnemingen de fouten, die òf an het instrument alleen, òf van het instrument en len waarnemer afhankelijk zijn, gecorrigeerd en gereduceerd werden. — Op de fouten, door de reflectie van het licht teweeggebracht en de wijze hoe die gecorrigeerd en gereduceerd moeten worden, hoopt hij later de aandacht te vestigen.

— De Vergadering wordt gesloten.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER J. CARDINAAL,

GETITELD:

CONSTRUCTIE DER OPPERVLAKKEN VAN DEN VIERDEN GRAAD MET DUBBELKEGELSNEE DOOR MIDDEL VAN PROJECTIVISCHE BUNDELS OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 September 1890).

In 1884 heeft Dr. C. SEGRE langs meetkundigen weg een volledige classificatie uitgewerkt van de oppervlakken F^4 van den vierden graad met dubbelkegelsnee. De door hem verkregen uitkomsten behooren naar onze meening tot de schoonste vruchten ons in den laatsten tijd door de — zij het dan ook niet aanschouwelijke — studie der ruimte met vier afmetingen in den schoot geworpen. Zooals men weet, deed hij de groep der bedoelde oppervlakken F^4 ontstaan door zich in de ruimte met vier afmetingen twee tridimensionale wezens van den tweeden graad te denken en de doorsnee van deze uit een punt dier ruimte op onze ruimte met drie afmetingen te projecteeren. Daarbij bood het overeenkomstige vraagstuk, dat uit het voorgaande ontstaat door overal het aantal der genoemde afmetingen met de eenheid te verminderen, nl. de beschouwing van de vlakke kromme C^4 met twee dubbelpunten als de projectie van de aan twee oppervlakken F^2 gemeenschappelijke ruimtekromme R^4, een eenvoudigen leiddraad aan. Zoo voerde het aantal

er der *tweekegelpunten* van de kromme R^4 onmiddellijk ıt de *vijf* door de dubbelraakvlakken van het oppervlak F^4 mhulde KUMMER'sche kegels van den tweeden graad, enz.

In de aangevoerde studie van den Turin'schen hoogleeraar vordt opnieuw de aandacht gevestigd op een andere, naar ıet schijnt voor de eerste maal in 1870 aangegevene, hanlelwijs, die bij de studie der bedoelde oppervlakken kan vorden gevolgd. Deze bestaat hierin, dat men het oppervlak F^4 met de dubbelkegelsnee d^2 beschouwe als de meetkundige plaats der snijkromme van de overeenkomstige elementen van twee projectivische oppervlakkenbundels van den tweeden graad, wier basiskrommen de dubbelkegelsnee d^2 gemeen hebben. »Het is vreemd", — zegt SEGRE — »dat men er tot heden nog niet aan gedacht heeft uit deze constructie een volledige meetkundige theorie der oppervlakkengroep af te leiden; naar het ons voorkomt zou een dergelijke studie niet van belang ontbloot zijn".

Een andere voortbrenging van het oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee d^2 werd door Dr. TH. REYE gegeven in de verzameling van vraagstukken als aanhangsel toegevoegd aan het tweede deel zijner »*Geometrie der Lage*". Zij berust op een reeds in 1865 door BERNER ontdekte verwantschap van den tweeden graad tusschen twee ruimten Σ en Σ' van drie afmetingen, waarbij met punten, lijnen, vlakken en oppervlakken F'^2, die tot Σ' behooren, in Σ achtereenvolgens puntenparen, kegelsneden, een drievoudig oneindig stelsel S van door een kegelsnee d^2 gaande oppervlakken F^2 en oppervlakken F^4 met d^2 tot dubbelkegelsnee overeenkomen. In deze verwantschap beantwoordt de voortbrenging van het oppervlak F^4 met d^2 tot dubbelkegelsnee door middel van twee projectivische bundels van oppervlakken F^2 in Σ gelegen aan de veel eenvoudiger voortbrenging der oppervlakken F'^2 van Σ' door middel van twee projectivische vlakkenbundels.

Het is de verdienste van den Heer CARDINAAL, over wiens nieuwe verhandeling wij thans verslag uitbrengen, het zooeven aangegeven verband tusschen de voortbrenging van het oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee ter eene en die van het

oppervlak F'^2 ter andere zij duidelijk te hebben ingezien en op rationeele wijs te hebben gebruikt tot de afleiding van de hoofdeigenschappen van het meest algemeene oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee en van de bijzondere gevallen, waartoe de constructie voeren kan. De Heer CARDINAAL — zoo kunnen we ons uitdrukken — vond in zijn werkplaats twee raderen naast elkaar opgesteld, waarvan het eene — indertijd door STEINER opgewonden — nog in volle beweging was, terwijl het andere in de twintig jaar van zijn bestaan wegens de groote wrijving daarentegen nog geen slag gedaan had. Hij merkt nu op, dat deze raderen volkomen in elkaar zouden passen, als ze met elkaar in verband gebracht werden, en doet daarom met behulp van een REYE'schen hefboom de tanden van beide in elkaar grijpen om ten slotte na te gaan tot welke uitkomsten de beweging van het tweede rad leidt.

De voor ons liggende verhandeling is in zes hoofdstukken verdeeld. Na in het eerste als inleiding eenige litteratuuraanwijzingen en de uiteenzetting der methode van SEGRE en van de thans te volgen constructie gegeven te hebben, ontwikkelt de schrijver in het tweede hoofdstuk de verwantschap van den tweeden graad. Hierbij treden het kernoppervlak K^2 van het in Σ gelegen drievoudig oneindige stelsel S, het in Σ' hiermee overeenstemmende oppervlak K'^2 en het met het voorttebrengen oppervlak F^4 overeenstemmende oppervlak O'^2 op den voorgrond. Dit laatste oppervlak wordt het *beeldoppervlak* van F^4 genoemd. En het hoofdstuk wordt besloten met de aanwijzing der drie hoofdgroepen van oppervlakken F^4 met dubbelkegelsnee; in de eerste groep is de dubbelkegelsnee d^2 enkelvoudig, in de tweede bestaat d^2 uit twee elkaar snijdende lijnen, in de derde bestaat d^2 uit twee samengevallen lijnen.

Het derde, vierde en vijfde hoofdstuk zijn achtereenvolgens gewijd aan de behandeling der oppervlakken van de eerste, tweede en derde groep. In hoofdtrekken is de onderverdeeling bij deze drie groepen dezelfde; steeds treden dezelfde drie tweedeelige kenmerken op, die tot dezelfde acht gevallen leiden. Eerstens kunnen de oppervlakken van het

elsel S buiten d^2 om geen of een enkel punt gemeen ebben. Ten tweede kan het beeldoppervlak een regelvlak of een kegel zijn. En ten derde kan dit laatste oppervlak een meest algemeenen of een bijzonderen stand hebben. Alleen deze bijzondere stand geeft bij de verschillende hoofdgroepen tot verschillende groepen van bijzondere gevallen aanleiding.

Van de drie groepen wordt de eerste en van deze groep weer het algemeene geval het meest uitvoerig behandeld. Daarbij komen de vijf KUMMER'sche kegels, de zestien rechte lijnen, de uit deze zestien lijnen en vijf krommen R^4 bestaande connodale lijn en de 52 op deze gelegen plooipunten van het algemeene oppervlak naar behooren voor den dag. En in elk der andere gevallen wordt door den schrijver onderzocht, welke nieuwe vormen van het oppervlak F^4 verkregen worden.

In het zesde hoofdstuk worden eindelijk enkele nieuwe gezichtspunten aangegeven, die bij het ontwerpen eener volledige classificatie niet mogen worden over het hoofd gezien. Daarbij komen in hoofdzaak de regelvlakken en de cyclides ter sprake.

Naar onze meening wordt de reeds zoo uitgebreide litteratuur over de belangwekkende groep van oppervlakken door de verhandeling van den Heer CARDINAAL werkelijk verrijkt; daarom aarzelen wij niet U te adviseeren ze in de *Verslagen en Mededeelingen* te doen opnemen.

Groningen en *Leiden*,
13 Sept. 1890

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

CONSTRUCTIE DER OPPERVLAKKEN

VAN DEN

VIERDEN GRAAD MET DUBBELKEGELSNEDE

DOOR MIDDEL VAN

PROJECTIVISCHE BUNDELS OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

DOOR

J. CARDINAAL.

I. Inleiding.

1. Alvorens tot de behandeling van dit onderwerp over te gaan, wensch ik te verwijzen naar de literatuur, die er over de oppervlakken van den vierden graad met dubbelkegelsnede bestaat; en meer bepaald naar de voornaamste bron, die bij dit opstel gebruikt is, nl. het artikel: »Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double par Corrado Segre", *Mathematische Annalen*. Dl. XXIV, blz. 313 vgg. Deze verhandeling munt niet alleen uit door scherpzinnigheid en grondigheid, maar bevat ook als inleiding een geschiedkundig overzicht van het onderwerp, volledig genoeg om talrijke verwijzingen bij de hier volgende beschouwingen overbodig te maken.

Aan de door den schrijver genoemde namen Kummer, Moutard, Darboux, Casey, Clebsch, Jordan, Geiser, Kornörfer, Zeuthen, Loria en anderen, benevens aan het overzicht der door hen gevolgde methoden valt dus weinig toe te voegen; slechts worde het volgende opgemerkt.

Tot de kennis van den vorm der oppervlakken met dubbelkegelsnede heeft ongetwijfeld veel bijgedragen de verhandeling van CLERK MAXWELL, *Quart. Journ. of Math.*, Dl. X, blz. 111, aan welke stereoskopische teekeningen toegevoegd zijn. In deze teekeningen zijn de hoofdvormen afgebeeld der cyclide van DUPIN, welke een bijzonder geval is van de oppervlakken, die thans ter sprake komen; een oppervlak namelijk, dat den oneindig ver verwijderden onbestaanbaren cirkel tot dubbelkegelsnede heeft.

Verder zij opgemerkt, dat niet alleen in de *Synthetische Geometrie der Kugeln*, maar ook in de *Geometrie der Lage*, 2te Aufl. Dl. II, blz. 283 vgg. van TH. REYE eenige beschouwingen omtrent deze oppervlakken te vinden zijn. Deze betreffen, wel is waar, het bijzondere geval, dat het oppervlak een kegelpunt bezit; maar tevens wordt het ontstaan van zoodanig oppervlak zonder kegelpunt aangegeven en enkele eigenschappen daarvan medegedeeld. Naar deze beschouwing wordt vooral daarom verwezen, omdat zij het uitgangspunt zal vormen voor de methode, in het hier volgende ontwikkeld.

2. In tegenstelling met den weg, ingeslagen door de meeste der door hem aangehaalde schrijvers, steunt SEGRE bij zijn classificatie op de meetkunde. Zijn redeneering is zeker merkwaardig genoeg om er meer bepaald de aandacht op te vestigen. Hij gaat uit van het feit, dat een ruimtekromme van de vierde orde (1e soort) door centrale projectie een vlakke kromme van de vierde orde met twee dubbelpunten doet ontstaan, en dat men, door verandering van projectiecentrum, alle vormen van deze krommen met twee of drie dubbelpunten verkrijgen kan. Op dezelfde wijze beschouwt hij de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede als de centrale projectie op de ruimte van de snijding van twee drie-dimensionale vormen van de tweede orde, liggende in de vier-dimensionale ruimte. Door alle vormen en alle standen van het projectiecentrum te beschouwen, verkrijgt hij een volledige classificatie; eveneens wordt het ontstaan verklaard van de verschillende krommen, kegelsneden, rechte lijnen enz., die op het oppervlak

gelegen zijn. Ook worden de verschillende vormen der dubbelkegelsnede nagegaan, benevens de kegelpunten, het aantal rechte lijnen op het oppervlak, enz. De geheele hoeveelheid soorten, door SEGRE verkregen, bedraagt ruim 70.

3. Hoewel de besproken verhandeling aan volledigheid niets te wenschen overlaat, zoo meen ik toch, dat er nog plaats is voor een andere meetkundige beschouwing. Om dit te staven, verwijs ik weder naar de meetkundige theorie der krommen van de vierde orde met twee dubbelpunten. Men kan deze, als boven opgemerkt, doen steunen op de projectie van de ruimtekromme van de vierde orde; maar eveneens kan men ze, zonder het platte vlak te verlaten, beschouwen als ontstaande door de doorsnijding der homologe elementen van twee projectivische kegelsnedenbundels, bij welke twee basispunten van den eenen samenvallen met twee basispunten van den anderen. Eveneens moet het blijken, dat, nevens de methode van SEGRE, een andere moet bestaan, door welke men de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede kan construeeren. Volgens deze methode construeert men de bewuste oppervlakken door zich twee projectivische bundels oppervlakken van de tweede orde te denken, welke beiden een basiskromme bezitten, die in twee kegelsneden is overgegaan. Valt nu een kegelsnede van de eene basiskromme samen met een kegelsnede van de tweede basiskromme en construeert men de doorsneden der homologe elementen, dan beschrijven deze een oppervlak van de vierde orde met dubbelkegelsnede *).

4. Bij de hier gevolgde methode treedt dus het constructiestandpunt op den voorgrond; zij wordt daardoor een natuurlijke voortzetting van de meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van den vierden graad, door schrijver dezes ontwikkeld, en kan zich aansluiten aan de constructie van an-

---

*) Omtrent deze methode merkt SEGRE zelf op: Il est étrange, qu'on n'ait pas encore pensé à déduire de cette construction par les méthodes de la géométrie de position une théorie synthétique complète de ces surfaces: il nous semble, qu'une telle étude n'aurait pas manqué d'intérêt.

ere oppervlakken van den vierden graad, meer bepaald aan e met een dubbellijn.

II. Algemeene constructie van het oppervlak.

5. Men denke zich vier oppervlakken van de tweede orde A^2, B^2, C^2, F^2, die met elkander de kegelsnede d^2 gemeen hebben, welke kegelsnede in een vlak δ ligt. De bundels $\overline{A^2 B^2}$ en $\overline{C^2 F^2}$, in projectief verband gebracht, doen het oppervlak O^4 ontstaan. Ter verheldering van het inzicht in den vorm en de eigenschappen van dit oppervlak is het evenwel noodig gebruik te maken van de verwantschap, waarvan ook Th. Reye gebruik maakt en waarvan enkele hoofdeigenschappen, met het oog op het volgende in herinnering zullen worden gebracht *).

De vier gegeven oppervlakken vormen namelijk de bepalende elementen van een stelsel oppervlakken van de tweede orde, dat daarvan een drievoudig oneindig aantal bevat. Het stelsel bevat ook alle kegelsneden, die de doorsnijding twee aan twee der oppervlakken uitmaken, benevens de tweetallen gekoppelde punten, waarin die kegelsneden elkander snijden †). Bepaalt men nu van al deze oppervlakken ten opzichte van een vast punt Q de poolvlakken, dan ontstaat een stelsel vlakken, liggende in een ruimte R_1, welk stelsel projectief is met het in de ruimte R gelegen oppervlakkenstelsel, en bestaat uit alle vlakken, lijnen en punten van R_1. Daar de verwantschap tusschen R en R_1 in hoofdzaak bekend wordt ondersteld, zoo kan volstaan worden met de samenvatting van die uitkomsten, welker kennis voor het begrip van het volgende volstrekt noodig is.

---

*) *Geometrie der Lage.* Vortrag 28 en Anhang n°. 100—120. Dl. II. 2e Aufl.

†) Het woord *Gebüsch* wordt hier vertaald door *stelsel*, voor *associirte Punkte* wordt *gekoppelde punten* gesteld.

Ruimte R.	Ruimte R_1.
Een oppervlak van het stelsel.	Een vlak.
Een kegelsnede van het stelsel.	Een rechte lijn.
Twee bestaanbare of onbestaanbare gekoppelde punten.	Een punt.
De punten van het vlak δ.	Een enkel punt D_1.
Kegelvlakken van het stelsel, welker toppen op een oppervlak van de tweede orde K^2 door d^2 (kernoppervlak) liggen.	Vlakken, welke een oppervlak van de tweede klasse K_1^2 omhullen.
Toppen dezer kegelvlakken als samengevallen punten.	Punten van K_1^2.
Stralen dezer kegelvlakken of wel hoofdstralen, die d^2 snijden.	Raaklijnen aan K_1^2.
De pool D van δ ten opzichte van K^2, die gekoppeld is aan elk punt van het vlak δ.	Een vast punt D_1.
Vlakken en hoofdstralen door D.	Vlakken en lijnen door D_1 *).

6. Op deze algemeene eigenschappen steunende, kan men het verband van K^2 en K_1^2 nog nauwkeuriger vaststellen. Men neme daartoe in R_1 een punt A_1 aan; hiermede komen in R overeen de twee op een rechte lijn door D gelegen punten A en A^1; met de raakvlakken, door A_1 aan K_1^2 gelegd, komen dan overeen de kegelvlakken, behoorende tot het door AA^1 bepaalde oppervlakken-net. De toppen dezer kegelvlakken zijn de snijpunten der hoofdstralen, die, door A en A^1 gaande, d^2 snijden. De meetkundige plaats dezer toppen is dus de tweede kegelsnede, volgens welke de beide kegelvlakken, die A en A^1 tot top hebben

*) Van dit stelsel oppervlakken is een bijzonder geval het stelsel bollen, die in een gegeven punt een gegeven macht hebben en dus door een gegeven bestaanbaren of onbestaanbaren bol loodrecht gesneden worden. De oneindig ver verwijderde onbestaanbare cirkel vervangt dan d^2.

n d^2 tot richtlijn, elkander snijden. Daar nu de raaklakken uit A_1 aan K_1^2 dit oppervlak raken in de poolkegelsnede van A_1 ten opzichte van K_1^2, zoo blijkt, dat de vereenkomst tusschen K^2 en K_1^2 van dien aard is, dat met en kegelsnede op K^2 insgelijks een kegelsnede op K_1^2 vereenkomt, en wel punt voor punt.

Ligt A_1 op K_1^2, dan gaat de raakkegel over in een raakvlak en de raakkromme in twee bestaanbare of onbestaanbare rechte lijnen van K_1^2. Laat in het eerste geval een dezer lijnen a_1 genoemd worden, dan is a_1 de as van een vlakkenbundel, waarmede in R overeenstemt een kegelbundel, welks toppen op een hoofdstraal door een punt van d^2 liggen.

Hieruit volgt:

Met elke rechte lijn a_1 op K_1^2 komt in R een rechte lijn a op K^2 punt voor punt overeen. Is K_1^2 een elliptisch oppervlak, dan is dit ook met K^2 het geval.

7. De gevonden overeenkomst tusschen K^2 en K_1^2 geeft nu aanleiding tot de volgende betrekkingen tusschen de ruimten R en R_1.

a. Met een willekeurige rechte lijn l in R komt in R_1 overeen een kegelsnede l_1^2. Daar l het vlak δ snijdt, zoo gaat l_1^2 door D_1 en daar l slechts twee punten met K^2 gemeen heeft, zoo raakt l_1^2 K_1^2 in twee punten. Met een plat vlak α komt om dezelfde reden overeen een oppervlak van de tweede orde A_1^2, dat door D_1 gaat en K_1^2 volgens een kegelsnede raakt. Als α d^2 snijdt, dan worden de beide stralenbundels, die de snijpunten tot middelpunt hebben, door de kegelsnede, volgens welke α K^2 snijdt, in projectief verband gebracht; met deze stralen komen dus overeen de beide stelsels beschrijvende lijnen op A_1^2, en wel zoodanig, dat, als c_1^2 de raakkegelsnede is van K_1^2 en A_1^2, er uit een punt dezer raakkegelsnede twee beschrijvende lijnen gaan, correspondeerende met twee homologe stralen van de bundels uit de beide snijpunten. Snijdt α d^2 in twee onbestaanbare punten, dan is A_1^2 een elliptisch oppervlak; raakt α d^2, dan is A_1^2 een kegelvlak, welks beschrijvende lijnen met de stralen van den bundel, die het raakpunt tot middelpunt heeft, overeenkomen.

b. Met een kegelsnede c^2 in R, die d^2 in twee punten snijdt, komt overeen een kegelsnede c_1^2 in R_1, die K_1^2, raakt in twee punten, overeenkomende met die snijpunten van c^2 en K^2, die niet in d^2 gelegen zijn. De beide snijpunten van c_1^2 met een vlak α_1 van R_1 komen dan overeen met de beide buiten d^2 gelegen snijpunten van c^2 met het oppervlak A^2 van het stelsel. Zoo komt ook met een oppervlak van de tweede orde A^2, in R door d^2 gebracht en niet tot het stelsel behoorende, een oppervlak A_1^2 overeen van de tweede orde, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt. Deze kegelsneden en oppervlakken onderscheiden zich van de vorige, doordat zij niet door D_1 gaan.

c. De gemelde rechte lijnen, kegelsneden, vlakken en oppervlakken kunnen met K^2 werkelijke of onbestaanbare punten of kegelsneden gemeen hebben. Hiermede stemt in R_1 de werkelijkheid of onbestaanbaarheid der overeenkomstige elementen overeen. Dezelfde overeenstemming bestaat bij de hoofdstralen van R, gaande door D en de overeenkomstige door D_1 gaande rechte lijnen. Snijden deze laatste K_1^2, dan is de involutie der paren gekoppelde punten op de hoofdstralen door D hyperbolisch, met de snijpunten met K^2 tot dubbelpunten, in het tegengestelde geval zijn deze involutiën elliptisch, en er kunnen dus geen paren onbestaanbare gekoppelde punten op de lijn liggen.

8. Gaat men nu terug tot het ontstaan van het oppervlak O^4 met dubbelkegelsnede d^2, dan ziet men, dat hiermede in R_1 overeenkomt een oppervlak van de tweede orde O_1^2, ontstaande door de projectieve vlakkenbundels, welke met de oppervlakkenbundels $\overline{A^2B^2}$ en $\overline{C^2F^2}$ overeenkomen. Het onderzoek van alle doorsneden, bijzondere punten, raakvlakken, enz. van O^4 kan dus teruggebracht worden tot een onderzoek op het oppervlak van de tweede orde. Daarbij gelden dan de volgende regels.

Het oppervlak O^4 is bepaald door d^2, twee d^2 in twee punten snijdende kegelsneden en nog 3 punten; deze vormen namelijk de bepalende elementen der beide projectieve bundels.

Door deze gegevens is ook bepaald het stelsel oppervlakken van de tweede orde en, bij aanname van het punt

Q, het vlakkenstelsel in de ruimte R_1. Even goed als men ten opzichte van Q het poolvlak van een oppervlak van het stelsel bepalen kan, kan men ook, als het poolvlak gegeven is, het oppervlak bepalen. In dit laatste geval is namelijk het oppervlak bepaald door de kegelsnede d^2, een pool met bijbehoorend poolvlak en de voorwaarde, dat het tot het stelsel behoort, alzoo $5 + 3 + 1 = 9$ voorwaarden. Van alle vlakken, lijnen en punten van R_1 kan men alzoo de overeenkomstige in R bepalen.

9. Ter verkrijging eener volledige indeeling van de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede moet men rekening houden met de omstandigheden, waarin, zoowel het oppervlak O_1^2, dat voortaan beeld-oppervlak zal heeten, als het stelsel oppervlakken kan verkeeren. Hiervoor is in het oog te houden:

a. De aard der kegelsnede d^2. Deze kan zijn:

Een werkelijke of onbestaanbare kegelsnede.

Twee elkander snijdende, werkelijke of onbestaanbare lijnen.

Twee samenvallende lijnen.

b. De aard van het beeld-oppervlak O_1^2. Dit kan zijn:

Een scheef oppervlak.

Een kegeloppervlak.

Elliptische of onbestaanbare oppervlakken van de tweede orde worden voorloopig uitgesloten, omdat volgens onderstelling oppervlakken door projectieve vlakkenbundels ontstaande beschouwd worden.

c. De stand van het basisoppervlak O_1^2 in de ruimte R_1. Bij elk geval zal dit nader aangewezen worden.

d. Het stelsel oppervlakken. Dit stelsel kan, behalve in het algemeene geval, in het bijzondere geval verkeeren, dat alle oppervlakken met elkander, behalve de kegelsnede d^2, nog een vast punt gemeen hebben.

Hierop grondt zich nu een classificatie. die zich zoo nauw mogelijk aansluit aan de classificatie der scheeve oppervlakken van de vierde orde. Bij dit onderwerp, zoowel als bij het vroegere, berust de hoofdgroepeering op den vorm der dubbelkromme. Alzoo worden de volgende groepen gevormd.

Eerste Groep. De kegelsnede d^2 is een werkelijke of onbestaanbare kegelsnede.

Tweede Groep. De dubbelkegelsnede bestaat uit twee elkander snijdende werkelijke of onbestaanbare lijnen.

Derde Groep. De dubbelkegelsnede bestaat uit twee samenvallende lijnen.

De verdeeling in onderdeelen zal bij elke groep afzonderlijk aangegeven worden.

III. Eerste Groep.

10. Bij deze groep onderscheidt men de volgende gevallen:

Geval A. Algemeen geval. Het stelsel oppervlakken zoowel als het beeld-oppervlak biedt geen bijzonderheden aan.

Geval B. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, nog een punt met elkander gemeen. Het beeld-oppervlak biedt geen bijzonderheid aan.

Geval C. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een kegelvlak in geen bijzonderen stand.

Geval D. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een algemeen scheef oppervlak, maar neemt in de ruimte R_1 een bijzonderen stand in.

Geval E. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, nog een punt met elkander gemeen. Het beeld-oppervlak is een scheef oppervlak in een bijzonderen stand.

Geval F. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, een punt gemeen. Het beeld-oppervlak is een kegel in geen bijzonderen stand.

Geval G. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een kegelvlak, dat een bijzonderen stand in de ruimte inneemt.

Geval H. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, een punt gemeen. Het beeld-oppervlak is een kegel in een bijzonderen stand.

Bij deze classificatie ziet men, dat er bij het geval A

een bijzondere onderstellingen worden ingevoerd. Bij de evallen B, C, D is één bijzondere onderstelling ingevoerd; ij de gevallen E, F, G twee en bij het geval H drie. Bij lk der volgende groepen zal dezelfde indeeling in gevallen n het oog worden gehouden. Zij zal dus later niet weder olledig herhaald worden.

Geval A.

11. Bij dit meest algemeene geval kan men zonder bewaar de constructie van K^2 en K_1^2 uitvoeren en dan de meest algemeene eigenschappen van O^4 afleiden. In de eerste plaats kan men de op O^4 liggende krommen beschouwen.

Construeert men in R_1 alle oppervlakken van de tweede orde, die K_1^2 volgens een kegelsnede raken, zoo snijden deze O_1^2 volgens ruimtekrommen van de vierde orde eerste soort, die K_1^2 in vier punten raken; hiermede komen dus in R overeen krommen van de vierde orde op O^4; deze krommen kunnen K^2, behalve in de punten van d^2, in niet meer dan vier punten snijden. Met de beide stelsels beschrijvende lijnen op een der oppervlakken, die in R met deze oppervlakken overeenkomen, komen in R_1 overeen de beide stelsels rechte lijnen die K_1^2 raken (7 *b.*), zoodat een rechte lijn van elk stelsel de kromme van de vierde orde in twee punten snijdt; de krommen zijn dus van de eerste soort.

Neemt men nu op O_1^2 vier punten aan, dan bepalen deze acht oppervlakken van de tweede orde, die K_1^2 volgens een kegelsnede raken; hieruit volgt:

Construeert men ten opzichte van vier punten op O^4 de daarmede gekoppelde punten, dan ontstaan er acht punten, door welke acht ruimtekrommen van de vierde orde bepaald worden, welke geheel op O^4 liggen.

Met alle kegelsneden op O_1^2 liggende komen mede overeen ruimtekrommen van de vierde orde eerste soort op O^4. Deze worden namelijk door een vlak α in evenveel punten gesneden als de kegelsnede door het overeenkomstige oppervlak A_1^2, d. i. in vier. Een kegelsnede c_1^2 op O_1^2 kan verder in niet meer dan twee punten gesneden worden door

een andere kegelsnede, gaande door D_1 en K_1^2 dubbel rakende; alzoo kan ook de overeenkomstige ruimtekromme van de vierde orde in niet meer dan twee punten door een rechte lijn gesneden worden; deze kromme is dus ook van de eerste soort.

Wanneer de kegelsneden op O_1^2 K_1^2 dubbel raken, dan komen daarmede overeen kegelsneden op O^4 gelegen. Deze kegelsneden kunnen op de volgende wijze opgespoord worden. Legt men door zulk een kegelsnede een vlak α_1, dan snijdt dit O_1^2 en K_1^2 in twee elkander dubbel rakende kegelsneden (7 *b*); α_1 raakt alzoo de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 in twee punten en is dus een raakvlak aan een der vier kegels van de tweede orde, die door de snijkromme kunnen worden gebracht. Hieruit volgt het bestaan van vier groepen kegelsneden op O^4. Legt men door een dezer kegelsneden c_1^2 op O_1^2 een oppervlak van de tweede orde, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt en door D_1 gaat, dan stemt hiermede overeen een vlak door c^2, en dat dus O^4, behalve in c^2, nog in een tweede kegelsnede snijdt, welke alweder overeenkomt met de tweede kegelsnede, volgens welke het oppervlak door c_1^2 O_1^2 snijdt.

Met de rechte lijnen op O_1^2 komen overeen kegelsneden op O^4 gelegen; en daar door twee elkaar snijdende lijnen op O_1^2 een vlak kan gelegd worden, zoo kan door een paar kegelsneden, die elkaar in twee gekoppelde punten snijden, een oppervlak van het stelsel gebracht worden. Van elk stelsel beschrijvende lijnen van O_1^2 zijn er verder vier, die K_1^2 raken; met elk dezer acht raaklijnen komt op O^4 een kegelsnede overeen, die in twee elkaar snijdende lijnen is overgegaan; in het geheel zullen er dus zestien rechte lijnen op O^4 liggen.

Bij deze geheele beschouwing is stilzwijgend ondersteld, dat d^2 bestaanbaar is, terwijl ook de verder besproken krommen als bestaande gedacht werden. In 7 *c* is evenwel opgemerkt, dat men uit de onbestaanbaarheid der punten, lijnen, kegelsneden, enz. in R_1 die in R afleiden kan, en daar in R_1 de genoemde onbestaanbare vormen construeerbaar zijn, zoo kunnen zij overgebracht worden in R. Het

geval dat d^2 onbestaanbaar is en het al of niet aanwezig zijn van deelen van het oppervlak, die in R_1 bestaanbaar zijn, maar in R uit onbestaanbare gekoppelde punten bestaan, zal aan het einde van dit hoofdstuk behandeld worden.

12. Uit de gevonden vormen van krommen op O^4 kunnen gevolgen worden afgeleid. Wanneer men een vlak legt door een kegelsnede c^2 op O^4, dan zal het overige deel der doorsnede een tweede kegelsnede f^2 zijn. De beide kegelsneden snijden elkander in vier punten; twee daarvan behooren tot d^2; de andere twee zijn de beide raakpunten van het vlak met O^4; het vlak is dus dubbel raakvlak. Er moeten alzoo vijf groepen dubbelraakvlakken zijn; de vlakken, die de kegelsneden bevatten, overeenkomende met de beschrijvende lijnen van O_1^2 en diegene, die de kegelsneden bevatten, overeenkomende met die kegelsneden van O_1^2, die K_1^2 dubbel raken.

In R_1 wordt de eerste soort vlakken vertegenwoordigd door de raakvlakken, uit D_1 getrokken aan O_1^2 en die dus in R door D gaan; zij omhullen dus, zoowel in R_1 als in R, een kegelvlak van de tweede klasse.

Overeenkomstig de in N^0. 7 en 11 behandelde betrekkingen wordt de tweede soort vlakken in R_1 vertegenwoordigd door de oppervlakken van de tweede orde, die K_1^2 volgens een kegelsnede raken, door D_1 gaan en O_1^2 volgens twee kegelsneden snijden. Uit de vastgestelde beginselen volgt nu de volgende constructie.

Men construeere de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van K_1^2 en O_1^2. Men legge een raakvlak aan een dezer kegels; dit snijdt O_1^2 volgens een kegelsnede c_1^2, dubbelrakende aan K_1^2. Men legge vervolgens een vlak α_1 door D_1 en de raakkoorde k_1 van c_1^2 en K_1^2, α_1 snijdt K_1^2 volgens een kegelsnede; daarin construeere men nu een kegelsnede f_1^2, gaande door D_1 en de doorsnede met K_1^2 in de twee gegeven punten rakende. Is f_1^2 geconstrueerd, dan zijn er van het oppervlak bekend twee kegelsneden, die elkander in hare raakpunten met K_1^2 snijden. Een willekeurig vlak β_1 snijdt deze kegelsneden in de punten C_1, C_1^1 en F_1, F_1^1. Om den vierhoek, door deze punten

bepaald, moeten nu de kegelsneden beschreven worden, die de doorsnede $\overline{\beta_1 K_1^2}$ dubbel raken. De raakkoorden gaan dan door het snijpunt der diagonalen en verdeelen de koordenparen harmonisch; de beide raakkoorden zijn dus construeerbaar en alzoo zijn de beide oplossingen voor het oppervlak bepaald.

Elk der oppervlakken, door middel van een zelfden dubbelprojecteerenden kegel bepaald, zal evenwel door een vast punt gaan. Het vlak van de kegelsnede, volgens welke een der oppervlakken O_1^2 snijdt, gaat door den top T_1 van den dubbelprojecteerenden kegel. Trekt men nu de lijn $D_1 T_1$, dan is T_1 een der dubbelpunten van een involutie, van welke de snijpunten van $D_1 T_1$ met K_1^2 twee toegevoegde punten zijn. Daar D_1 tot elk oppervlak behoort, zoo behoort ook het aan D_1 toegevoegde punt dezer involutie D_1^1 tot een oppervlak, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt, en daar D_1 een vast punt is, is dit ook het geval met D_1^1; de oppervlakken, behoorende bij een zelfden dubbelprojecteerenden kegel, gaan dus door een vast punt. Brengt men de uitkomsten over in de ruimte R, zoo volgt hieruit:

Elk der vijf groepen van dubbelraakvlakken bestaat uit vlakken, gaande door een punt en een kegel van de tweede klasse omhullende. Deze vijf kegels zijn de naar hun ontdekker genoemde KUMMER'sche kegels.

Hierdoor is dus meetkundig de constructie hunner toppen in R_1 en dus ook in R aangegeven. Dat deze kegels van de tweede klasse zijn, blijkt hieruit, door dat in R_1 door een punt twee raakvlakken aan een dubbelprojecteerenden kegel kunnen gebracht worden.

Aanmerking. Bij de constructie van het dubbelraakvlak blijkt het, dat er in de ruimte R_1 twee oppervlakken gebracht kunnen worden, gaande door D_1 en een aan K_1^2 dubbelrakende kegelsnede, en tevens voldoende aan de voorwaarde K_1^2 volgens een kegelsnede te moeten raken; terwijl er in R slechts één vlak door een kegelsnede op O^4 liggende kan worden gebracht. Deze schijnbare tegenstrijdigheid vindt haar oorsprong in het feit, dat met de twee oppervlakken overeenkomen het vlak, door de

gegeven kegelsnede en dat door de daarmede gekoppelde gebracht.

13. In de wijze, waarop de 16 rechte lijnen op O^4 ontstaan zijn, ligt nu ook een zeer eenvoudige methode besloten om haren stand ten opzichte van elkander te bepalen. Laat de vier rechte lijnen van een op O_1^2 liggend stelsel, die K_1^2 raken, a_1, b_1, c_1, d_1 zijn, die van het tweede stelsel e_1 f_1 g_1 h_1, dan komt met a_1 overeen de lijn a en de daarmede gekoppelde a', die haar in een punt van K^2 snijdt. Op deze wijze de notatie volhoudende, ziet men dat de volgende snijdingen van lijnen ontstaan:

a door a', e, f, g, h; eveneens zijn de rechte lijnen op te maken, die b, c, ... h snijden.

a' door a, e', f', g', h' en eveneens zijn de rechte lijnen op te maken, die b', c', d', e' ... h' snijden. Van deze zestien lijnen wordt dus ieder door vijf andere gesneden.

Daar de rechte lijnen a_1 ... d_1, e ... h_1 op acht vlakken door D_1 liggen, zoo liggen de zestien lijnen in R op acht vlakken door D; eveneens is het bij de overige KUMMER'sche kegels gesteld.

14. Op de kromme d^2 liggen een zeker aantal klempunten; in deze vereenigen zich de twee oorspronkelijk gescheiden raakvlakken der dubbelkegelsnede. Ten einde deze op te sporen, denke men zich eén vlak α, gaande door een raaklijn aan d^2. Met dit vlak komt in R_1 overeen een kegelvlak A_1^2, gaande door D_1 en aan K_1^2 rakende (7 a). Zij verder A het raakpunt op d^2, dan komen in R_1 met de stralen van bundel A de stralen van den kegel A_1^2 overeen, en met de snijlijn $\overline{\alpha\,\delta}$ de kegelstraal door D_1. Elke straal van bundel A snijdt de snijkromme van α met O^4, behalve in A, nog in twee punten, overeenkomende met de twee snijpunten van den overeenkomstigen kegelstraal en O_1^2. Draait dus α om de raaklijn aan d^2, dan beweegt zich de kegeltop op de overeenkomstige raaklijn uit D_1 aan K_1^2, en men kan alle kegels construeeren, met deze vlakken overeenkomende. Neemt men den veranderlijken top A_1 op O_1^2, dan zal een kegelstraal het oppervlak O_1^2, behalve in A_1, nog slechts in één punt snijden; in het over-

eenkomstige vlak in R zullen dus de stralen van den bundel de snijkromme met O^4, behalve in het punt A, nog slechts in één punt snijden, of wel dit vlak is een raakvlak en snijdt O^4 in een kromme met drievoudig punt. Hieruit volgt:

Daar een raaklijn, uit D_1 aan K_1^2 getrokken, O_1^2 in twee punten snijdt, zoo zijn er twee aan K_1^2 omgeschreven kegels, die hun toppen op O_1^2 hebben, en van welke de raaklijn een straal is; eveneens zijn er door elke raaklijn aan d^2 twee raakvlakken aan O^4 te construeeren.

Laat nu de raaklijn uit D_1 aan K_1^2 zoodanig getrokken zijn, dat zij tevens aan O_1^2 raakt; dan vallen de twee evengenoemde omhullingskegels aan K_1^2 te zamen, alzoo ook de beide raakvlakken, door de overeenkomstige raaklijn aan d^2 gebracht; het punt van d^2, waardoor deze raaklijn getrokken is, is dus een klempunt. Hieruit volgt:

Construeert men door D_1 de omhullingskegels aan K_1^2 en O_1^2, dan zullen deze in het algemeen elkander in vier stralen snijden. Deze vier stralen raken O_1^2 in de toppen der vier kegels, die met de vier raakvlakken in de klempunten op d^2 overeenstemmen.

Door deze klempunten wordt d^2 verdeeld in twee dubbele en in twee geïsoleerde deelen. Hieruit is voor een willekeurig vlak van doorsnede de aard van de dubbelpunten der doorsnede af te leiden. Daar de beide omhullingskegels elkander in een of twee stralen kunnen raken, in een straal een osculatie kunnen bezitten, of zelfs een aanraking van de derde orde, zoo zoude men hierop een verdeeling van het algemeene oppervlak kunnen gronden op gelijke wijze als dit vroeger bij de scheeve oppervlakken is geschied. De uitgebreide verdeeling, die evenwel reeds ontstaat door de gemaakte indeeling, maakt het niet wenschelijk ook op deze verdeeling verder in te gaan, vooral omdat het beginsel hier is aangewezen.

De raakvlakken aan d^2 vormen een ontwikkelbaar oppervlak, waarvan de klasse bepaald kan worden. Daartoe bepale men hoeveel vlakken van dit oppervlak er door een punt A kunnen gebracht worden. Dit aantal vlakken stemt

R_1 overeen met dat der kegels, door A_1 gebracht, gaande door D_1, rakende aan K_1^2 en met hun top gelegen op O_1^2. Men construeere uit A_1 als top een omhullingskegel aan K_1^2; zoo ook uit D_1 als top; deze twee omhullingskegels snijden elkander in twee kegelsneden, waarop de top van een der gevraagde kegels moet liggen. Daar deze kegelsneden O_1^2 in acht punten snijden, zoo volgt hieruit, dat er acht kegels zijn en dus ook acht vlakken van het oppervlak, die door A gaan. Het oppervlak is dus van de achtste klasse.

15. De dubbelraakvlakken bepalen op O^4 door hunne raakpunten met dit oppervlak de connodale lijn. Deze connodale lijn splitst zich in de volgende deelen. In de eerste plaatst de vijf ruimtekrommen van de vierde orde, volgens welke de vijf KUMMER'sche kegels O^4 raken; ten tweede de zestien rechte lijnen van het oppervlak. Op elk dezer lijnen kan men de plooipunten bepalen, d. i. die punten, waarin de twee anders gescheiden raakpunten van het dubbelraakvlak te zamen vallen.

Denkt men zich de KUMMER'sche kegels geconstrueerd, dan liggen er op elk dezer kegels vier stralen, die aan de connodale lijn raken. De raakpunten zijn plooipunten van het oppervlak; op den KUMMER'schen kegel, die tot top D heeft, zijn het buitendien punten, die met zich zelven gekoppeld zijn; zij liggen dus op het kernoppervlak K^2.

Ook op de rechte lijnen kan men de plooipunten opsporen. Legt men door een rechte lijn a van O^4 een vlak α, dan snijdt dit O^4 nog volgens een kromme van de derde orde c^3, die een dubbelpunt A heeft in het niet in a gelegen snijpunt van α met d^2, en a snijdt in het punt, dat a gemeen heeft met d^2 en in nog twee andere punten B en C. Deze laatste punten zijn de beide raakpunten van α met O^4. Men kan zich deze kromme c^3 ontstaan denken door den kegelsnedenbundel, volgens welken een der oppervlakkenbundels α snijdt en den daarmede projectieven stralenbundel, welks top A is. Beide bundels bepalen op a twee projectieve puntenrijen, die tot dubbelpunten hebben B en C. Draait men nu α om a, dan zal de puntenrij, door den

kegelsnedenbundel op a bepaald, dezelfde blijven, daar zij bestaat uit de snijpunten van den oppervlakkenbundel met a; de puntenrij, door den stralenbundel bepaald, verandert daarentegen, daar ook A verandert. Van deze puntenrij blijven evenwel twee punten standvastig. De rechte lijn a wordt namelijk door de aan haar gekoppelde a' in een punt S gesneden; en dit punt komt voor elken stand van α overeen met hetzelfde punt S' van de tweede puntenrij, daar het de top is van een kegel, tot den eersten oppervlakkenbundel behoorende, met welken kegel slechts één oppervlak van den tweeden bundel homoloog is. Zoo is ook met het snijpunt van d^2 en a een zelfde punt van de tweede puntenrij homoloog. Men heeft alzoo op a een vaste puntenrij en een reeks puntenrijen, welke allen twee vaste punten hebben, homoloog met twee vaste punten van de eerste rij. De dubbelpunten, welke men verkrijgt door elk der wisselende rijen in projectief verband te brengen met de vaste rij vormen dan een involutie, welker toegevoegde punten de tweetallen veranderlijke raakpunten voorstellen, die men verkrijgt wanneer men α om a laat draaien. De dubbelpunten dezer involutie zijn de plooipunten op a.

Hieruit volgt nu de stelling:

Een oppervlak van de vierde orde met dubbelkegelsnede bezit 52 plooipunten; 20 zijn gelegen op de krommen van de vierde orde, volgens welke het geraakt wordt door de vijf KUMMER'sche kegels; 32 zijn op de 16 beschrijvende lijnen gelegen *).

16. In N°. 7 c en 11 werd reeds opgemerkt, dat, wanneer lijnen of kegelsneden met K_1^2 onbestaanbare punten gemeen hebben, dit ook met de snijpunten der overeenkomstige vormen met K^2 het geval moest zijn. Tevens bleek het, dat werkelijke punten in R_1 zoowel tot werkelijke als tot onbestaanbare punten in R aanleiding kunnen geven. Het is wenschelijk een algemeen middel te bezitten, om die punten in R_1, met welke in R werkelijke punten overeenkomen

*) Den naam plooipunt neem ik over van Dr. D. J. KORTEWEG. Zie *Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wissenschaften.* Wien. Bd. XCVIII. Juli 1889.

te onderscheiden van die, met welke onbestaanbare overeenkomen. Vooreerst is het duidelijk, dat de meetkundige plaats van alle punten in R_1, met welke in R punten overeenkomen, die met zich zelven gekoppeld zijn, de grens zal aanwijzen tusschen twee deelen, waarin de ruimte R_1 verdeeld wordt.

Het ligt verder voor de hand, dat deze verdeeling der ruimte in twee deelen afhangt van de werkelijkheid of onbestaanbaarheid van d^2. Daar nu de meetkundige plaats der genoemde grenspunten in R_1 het oppervlak K_1^2 is, zoo volgt hieruit, dat men een klaar beeld dezer verdeeling zal verkrijgen, wanneer men alle verschillende vormen van d^2 en K_1^2 (dus ook van K^2) nagaat. Daarbij blijkt het dan, op welke wijze men de gevondene uitkomsten ook op andere gevallen toe kan passen.

a. d^2 is werkelijk bestaande; K^2 en K_1^2 zijn regeloppervlakken. Men kan door D steeds eene lijn l trekken, die K^2 niet snijdt; daarmede komt in R_1 eene lijn l_1 overeen door D_1, die K_1^2 niet snijdt; met de puntenrij op l_1 komt een elliptische involutie op l overeen; op l liggen dus geen toegevoegd imaginaire punten. Alle punten van R_1, op lijnen getrokken door D_1 en die K_1^2 niet snijden, vertegenwoordigen dus de bestaande gekoppelde puntenparen in R; hieruit volgt:

Zijn K^2 en K_1^2 regeloppervlakken, dan komen met de punten der ruimte R_1, die gelegen zijn aan dien kant van het oppervlak, aan welken D_1 ligt, werkelijke gekoppelde puntenparen in R overeen; met de punten aan den anderen kant komen onbestaanbare gekoppelde punten overeen.

b. d^2 is werkelijk bestaande; K^2 en K_1^2 zijn elliptische oppervlakken. D en D_1 liggen nu buiten K^2 en K_1^2. Met een lijn l door D, die K^2 niet snijdt, komt weder in R_1 eene lijn l_1 door D_1 overeen, die K_1^2 niet snijdt. Om dezelfde reden als bij het geval *a* liggen op deze lijn punten, die overeenkomen met bestaande gekoppelde puntenparen; hieruit volgt:

Wanneer d^2 en d_1^2 werkelijk bestaande zijn en K^2 en K_1^2 elliptische oppervlakken, dan liggen die punten van

R_1, met welke in R bestaande gekoppelde punten overeenkomen, buiten K_1^2 en die punten, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, binnen K_1^2.

c. d^2 is onbestaanbaar; K^2 en K_1^2 zijn elliptische oppervlakken. D en D_1 liggen nu binnen K^2 en K_1^2. Men trekke door D de lijn l en door D_1 de daarmede overeenkomende l_1. Men denke zich nu een bundel uit het stelsel oppervlakken van de tweede orde genomen; snijdt deze bundel K^2 slechts volgens werkelijke kegelsneden, dan kan de involutie van de snijpunten van den bundel met l hyperbolisch of elliptisch zijn; snijdt daarentegen de bundel K^2 ook in onbestaanbare kegelsneden, dan is de involutie noodzakelijk hyperbolisch. Zoo zal ook in R_1 een bundel vlakken l_1 snijden in punten, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, wanneer de vlakken K_1^2 niet snijden. De ruimte buiten K_1^2 bevat dus die punten, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen.

d. d^2 is onbestaanbaar; zoo ook K^2 en K_1^2. Alle involutiën, volgens welke een lijn door D gesneden wordt, zijn elliptisch; er zijn dus geen onbestaanbare gekoppelde punten.

17. Heeft men nu O_1^2 aangenomen, dan kan men, met behulp dezer beginselen, nagaan welke krommen, kegelsneden en rechte lijnen op O^4 werkelijk of onbestaanbaar worden. Eveneens blijkt het, dat O^4 geheel onbestaanbare gedeelten bezitten kan. Daar deze verhandeling zich evenwel slechts met de hoofdpunten bezig houdt, zoo moet dit onderzoek, even als verschillende andere constructiën, tot een lateren arbeid voorbehouden blijven. Bij dit geval, zoowel als bij de volgende, is er verder naar gestreefd, zoo min mogelijk in herhaling te treden van uitkomsten door anderen en meer bijzonder door SEGRE verkregen.

Geval B.

18. Het stelsel oppervlakken, gelegen in de ruimte R, bestaat uit alle oppervlakken van de tweede orde, gebracht door de vaste kegelsnede d^2 en een vast punt D, waarbij

oorloopig weder aangenomen wordt, dat d^2 een werkelijke egelsnede is. De algemeene betrekking tusschen de ruimten R en R_1 wordt nu gewijzigd; die wijzigingen, welker kenis, met het oog op het volgende, onmisbaar is, zullen nu worden aangegeven.

Het oppervlak K^2 gaat over in het kegeloppervlak K^2, lat het vaste punt D, dat aan alle oppervlakken gemeen s, tot top heeft, en de kegelsnede d^2 tot richtlijn. Met een lijn a, door D getrokken, komt in R_1 een lijn a_1 overeen, door D_1 getrokken; doch, daar de punteninvolutie op a parabolisch is, zoo komt met elk punt op a_1 slechts één punt op a overeen. Gaat de straal uit D door een punt A van d^2, ligt hij alzoo op K^2, dan zijn alle punten van DA toppen van kegels, tot het stelsel behoorende; met deze kegels komen in R_1 overeen vlakken, die eveneens door een lijn moeten gaan; hieruit volgt:

Met alle kegelvlakken van het stelsel komen in R_1 overeen vlakken, gaande door raaklijnen aan een kegelsnede d_1^2, in een vlak δ_1 gelegen.

Met een vlak α_1 in R_1 komt overeen een oppervlak A^2 in R, gaande door d^2 en D; dit oppervlak snijdt dus K^2 volgens twee beschrijvende lijnen. Met deze lijnen komen overeen de lijnen, getrokken van D_1 naar de snijpunten van α_1 met d_1^2 en de snijlijn $\alpha_1 \delta_1$ zelve. Met de lijnen, getrokken in α_1 door de snijpunten van α_1 met d_1^2, komen de beschrijvende lijnen van A^2 overeen.

En volmaakt op dezelfde wijze komt met een vlak α in R een oppervlak A_1^2 in R_1 overeen, gaande door d_1^2 en D_1. Met de beschrijvende lijnen op A_1^2 komen de beide stralenbundels door de snijpunten van α met d^2 overeen; en met de verbindingslijn dezer snijpunten komen de beide beschrijvende lijnen door D_1 overeen.

Met alle lijnen, door een punt van d_1^2 getrokken, komen in R overeen lijnen, die d^2 snijden en tevens een punt gemeen hebben met den kegelstraal, uit D getrokken naar het overeenkomstige punt van d^2. Het omgekeerde geldt van de lijnen, getrokken door een punt van d^2.

Uit dit alles volgt, dat het oppervlak K_1^2 zich heeft

afgeplat tot de kegelsnede d_1^2, en dat de ruimte R in hetzelfde verband tot R_1 staat als R_1 tot R.

19. Met het oog op de opmerking van N°. 17 zullen voor de beschouwing van het oppervlak O^4, dat in dit stelsel uit het beeldoppervlak O_1^2 wordt afgeleid, slechts de hoofdpunten aangegeven worden van de uitkomsten, bij het geval A reeds verkregen; terwijl meer in het bijzonder in het licht zal gesteld worden, in welke opzichten dit oppervlak van het vorige verschilt *).

Trekt men een lijn l_1 door D_1, welke O_1^2 snijdt, dan komen met de twee snijpunten als vroeger overeen de twee puntenparen, die in de involutie op l homoloog zijn met de punten van de puntenrij op l_1. Daar de involutie op l evenwel parabolisch is, zoo ligt van elk dezer paren een punt in D; hieruit volgt, dat D een dubbelpunt van O^4 is. Met een raaklijn door dit dubbelpunt komt overeen een lijn, door D_1 getrokken naar een gemeenschappelijk punt van δ_1 en O_1^2; dan toch valt een der snijpunten samen met D. Met den kegel, die D_1 tot top en de snijkromme van δ_1 met O_1^2 tot richtlijn heeft, komt dus de raakkegel aan D overeen, zoodat D een kegelpunt is.

De ruimtekrommen van de vierde orde, op O^4 liggende, bevatten in dit geval één groep, die een dubbelpunt bezit; het zijn die, welke met de kegelsneden van O_1^2 overeenkomen en dus ontstaan door de snijding van O^4 met oppervlakken van het stelsel. Van de kegelsneden op O^4 gaan diegene door D, welke met de rechte lijnen op O_1^2 overeenkomen.

Van de rechte lijnen, die op het oppervlak liggen, gaan er vier door D; met deze lijnen komen overeen de gemeenschappelijke stralen der kegels, wier gemeenschappelijke top D_1 is, en die tot richtlijnen hebben d_1^2 en de snijkromme $\underline{\delta_1 O_1^2}$; want deze hebben in R meer dan vier

*) Het hier beschreven oppervlak is hetzelfde als datgene, wat Reye langs een geheel anderen weg uit een algemeen stelsel afleidt (*G. d. L.* Deel II, p. 288—290). Wel maakt hij nog een opmerking in N°. 116 omtrent die gelijkheid

punten met O^4 gemeen. De andere rechte lijnen worden in R_1 vertegenwoordigd door de acht beschrijvende lijnen van O_1^2, die door de vier snijpunten van d_1^2 met O_1^2 gaan. Met deze acht lijnen komen acht lijnen op O^4 overeen; de vier lijnen door D moeten dus gerekend worden acht rechte lijnen te vervangen.

Zooals gebleken is, zijn de vier rechte lijnen door D de snijlijnen van den kegel K^2 en den kegel, die met $D_1 - \overline{\delta_1 O_1^2}$ overeenkomt. Deze laatste is de raakkegel van D. Er gaat evenwel nog een derde kegel uit D, het is de kegel, welks stralen de raaklijnen zijn, uit D aan een ander punt van het oppervlak getrokken. Hij wordt in R_1 vertegenwoordigd door den omhullingskegel, uit D_1 aan O_1^2 getrokken.

Overeenkomstig hetgeen bij het voorgaande geval opgemerkt is, vervult deze kegel ook hier de rol van KUMMER'schen kegel. De volgende uitkomsten zijn nu af te leiden.

a. De kegel $D_1 - \overline{\delta_1 O_1^2}$ snijdt O_1^2 nog in een tweede kegelsnede; alzoo snijdt de raakkegel O^4 in een ruimtekromme van de vierde orde met dubbelpunt.

b. Ook de KUMMER'sche kegel raakt O^4 in een diergelijke kromme.

c. De KUMMER'sche kegel raakt den raakkegel volgens twee stralen, die met O^4 in D vier punten gemeen hebben.

d. De KUMMER'sche kegel snijdt den kernkegel K^2 in vier lijnen, die D met de klempunten op d^2 verbinden.

Behalve den KUMMER'schen kegel uit D, kan men, even als in geval A, nog de overige kegels opsporen. De vier dubbelprojecteerende kegels der snijkromme van O_1^2 en K_1^2 gaan voor dit geval over in de drie tweetallen overstaande zijden van den volledigen vierhoek der snijpunten van d^2 en O_1^2. Noemt men deze snijpunten T_1', T_1'', T_1''', dan ligt dus op elk der lijnen $D_1 T_1'$, $D_1 T_1''$, $D_1 T_1'''$ een punt, waarmede in R een top van een KUMMER'schen kegel overeenkomt. Constructief kan het punt op $D_1 T_1'$ bepaald worden door een vlak α_1 door $D_1 T_1'$ te leggen; dit snijdt d_1^2 in twee punten A_1 en B_1 en een andere kegelsnede van O_1^2,

die door een vierhoekszijde uit T_1' gaat, in twee andere punten C_1, D_1; de kegelsnede door D_1, A_1, B_1, C_1, D_1 snijdt $D_1 T_1'$ in het gevraagde punt, van 'twelk men het overeenkomstige in R construeeren kan. De KUMMER'sche kegel uit D moet dus geacht worden twee diergelijke kegels te vertegenwoordigen.

20. Ten slotte kan men opmerken, dat de beschrijvende lijnen van het kernoppervlak K^2, die tevens rechte lijnen op O^4 zijn, gesneden moeten worden door twee der andere rechte lijnen. Trekt men in R_1 namelijk een lijn van D_1 naar een snijpunt van d_1^2 met $\underline{O_1^2 \delta_1}$, dan wordt deze lijn door twee beschrijvende lijnen van O_1^2 in dit snijpunt gesneden. Deze twee lijnen komen met twee lijnen in R overeen, die de overeenkomstige lijn door D in twee punten snijden. De stand der lijnen op O^4 is dus zoodanig, dat de vier rechte lijnen door D ieder gesneden worden door twee andere, welke niet door D gaan; de overige acht liggen zoodanig, dat elk gesneden wordt door vier andere.

Van de plooipunten blijven bestaan die op de acht rechte lijnen, die niet door D gaan en die op de drie raakkrommen van de KUMMER'sche kegels, welker top D niet is, alzoo $2 \times 8 + 3 \times 4 = 28$ plooipunten. In D zijn dus 24 plooipunten vereenigd *).

Is verder d^2 werkelijk bestaande, dan zal ook d_1^2 dit zijn; daar verder alle involutiën op rechte lijnen door D parabolisch zijn, zoo komen geen onbestaanbare gekoppelde punten voor, met welke in R_1 bestaande punten zouden overeenkomen.

Geval C.

21. In dit geval gelden omtrent het oppervlakkenstelsel alle uitkomsten, gevonden in het geval A.

Zij verder het beeld-oppervlak een kegeloppervlak O_1^2 met een top A_1. Het eerste dat oogenblikkelijk op te mer-

*) Deze uitkomst stemt overeen met die verkregen door Dr. D. J. KORTEWEG in het aangehaalde geschrift. Zie blz. 34 daarvan.

en valt, is dat alle vlakken, gebracht door de lijn $D_1 A_1$, O_1^2 in twee beschrijvende lijnen snijden. Met deze vlakken komen dus in R overeen vlakken, die O^4 snijden in twee kegelsneden, hebbende met elkander steeds de gekoppelde punten A en A' gemeen. De punten A en A' zijn dus dubbelpunten. Wordt het vlak door $D_1 A_1$ een raakvlak aan O_1^2, dan wordt in R de snijding een enkele kegelsnede. Dit oppervlak O^4 bezit dus twee raakvlakken, die volgens een enkele kegelsnede raken.

De kegel O_1^2 zal in het algemeen vier stralen bezitten, die K_1^2 raken; hieruit volgt:

Door elk der dubbelpunten gaan vier rechte lijnen, die geheel op O^4 liggen; deze acht rechte lijnen snijden elkander twee aan twee in punten van het kernoppervlak K^2. Daar verder de vier raakpunten der raaklijnen uit A_1 aan K_1^2 in het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2 liggen, zoo liggen in R de vier homologe punten in een vlak, overeenkomende met het oppervlak van de tweede orde, dat door D_1 gaat en K_1^2 raakt volgens het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2.

Twee Kummer'sche kegels worden vervangen door het vlakkenpaar, dat de raakkegelsneden bevat; er blijven er drie over, die op de gewone wijze geconstrueerd worden, en welker toppen volgens N°. 12 in het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2 hunne vertegenwoordigers in R_1 vinden.

De klempunten liggen in de Kummer'sche vlakken, door de kegelpunten A A' gebracht. Alle punten der kegelsneden in de beide Kummer'sche vlakken moeten als plooipunten worden beschouwd.

Ook bij dit oppervlak geeft de beschouwing van het geval, dat d^2 imaginair is, na het opgemerkte hieromtrent bij het geval A, geen stof tot bijzondere beschouwingen.

Geval D.

22. Bij dit geval begint de beschouwing van de bijzondere standen, die O_1^2 in de ruimte R_1 innemen kan. Daar deze vele in getal zijn, zoo zal gedurig de opsomming der

bijzondere standen vooropgesteld worden; terwijl die gevallen, waarbij het aangeven van constructiemethoden tevens den weg wijst bij de volgende gevallen, nader besproken worden.

Voor de overige standen zal dan een verwijzing voldoende zijn.

23. De te beschouwen bijzondere standen van O_1^2 ten opzichte van K_1^2 zijn:

a. O_1^2 raakt K_1^2.

b. O_1^2 raakt K_1^2 zoodanig, dat de snijkromme van beiden in het raakpunt A_1 een keerpunt heeft.

c. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

d. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde, door de gemeenschappelijke beschrijvende lijn geraakt.

e. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

f. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkander raken.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een kegelsnede en twee elkaar snijdende lijnen.

h. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden en twee elkaar snijdende lijnen, welker snijpunt in de kegelsnede ligt.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een scheeve vierzijde.

k. De omhullingskegel, uit D_1 aan K_1^2 getrokken, valt samen met dien uit D_1 aan O_1^2.

l. Als voren; maar de beide snijpunten der raakkegelsneden vallen te zamen, zoodat deze kegelsneden elkander raken.

m. Als *k*; maar O_1^2 raakt nog K_1^2.

n. Als voren; O_1^2 raakt K_1^2 in een punt van de raakkegelsnede op K_1^2.

24. Overgaande tot de nadere beschouwing van stand *a*, ziet men het volgende.

Laat het raakpunt van K_1^2 en O_1^2 A_1 zijn, waarmede in R het punt A correspondeert. Met de rechte lijnen, door A getrokken, komen overeen kegelsneden, door D_1 gaande en K_1^2 in A_1 en nog een ander punt rakende. Men legge een vlak α_1 door $D_1 A_1$; dit snijdt O_1^2 en K_1^2 in de kegel-

ieden c_1^2 en k_1^2, die elkander in A_1 raken. Alle kegel-
ieden, in α_1 getrokken door D_1, welke c_1^2 en k_1^2 in A_1
n k_1^2 buitendien nog in een ander punt raken, snij-
en c_1^2 nog in twee punten; hiermede komen overeen de
wee punten, waarin de overeenkomstige lijn c door A O^4
og snijdt; het punt A is dus een dubbelpunt van de door-
nede van O^4 met α.

Om in α de raaklijnen aan dit dubbelpunt te kunnen
rekken, moet men in α_1 de kegelsneden construeeren, gaande
door D_1, rakende aan k_1^2 en c_1^2 in A_1 osculeerende. Daar-
toe denke men zich een kegelsnedenbundel, bestaande uit de
kegelsneden, gaande door D_1 en c_1^2 in A_1 osculeerende. Elke
kegelsnede van dien bundel snijdt k_1^2 nog in twee punten,
welker verbindingslijn een straal van een stralenbundel is,
van welken ook $D_1 A_1$ een straal is. Construeert men dus
een kegelsnede van den bundel, dan snijdt deze k_1^2 nog in
twee punten. Uit het snijpunt B_1 der verbindingslijn met
$D_1 A_1$ trekke men de raaklijnen aan k_1^2; deze geven de
gezochte raakpunten. Er zijn dus twee oplossingen d. i.
twee raaklijnen aan de snijkromme in A. De twee raak-
lijnen kunnen samenvallen; alsdan moet α_1 zoodanig zijn
aangebracht, dat k_1^2 en c_1^2 elkander osculeeren; α_1 moet
dan gelegd worden door $D_1 A_1$ en een raaklijn aan de
snijkromme van K_1^2 en O_1^2; er zijn twee diergelijke vlakken
te construeeren; hieruit volgt dus, dat men twee vlakken
door $D A$ kan leggen, zoodanig dat de beide raaklijnen in het
dubbelpunt der snijkromme samenvallen en het dubbelpunt in
een keerpunt overgaat. Daar deze vlakken raakvlakken zijn
van den raakkegel in het dubbelpunt A, zoo blijkt dat het
punt A een kegelpunt is.

Van de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme
van O_1^2 en K_1^2 blijven er (behalve de kegel, die A tot top
heeft) nog twee bestaan; hieruit volgt:

Van de vijf KUMMER'sche kegels van O^4 blijven er drie
bestaan; de beide andere vereenigen zich in den raakkegel,
uit A aan O^4 getrokken.

Het aantal overblijvende rechte lijnen op O^4 stemt over-
een met het dubbele aantal rechte lijnen van O_1^2, dat de

snijkromme van K_1^2 en O_1^2 raakt; buitendien zijn er nog twee rechte lijnen op O_1^2, die door A_1 kunnen getrokken worden. Daar er van elk stelsel van beschrijvende lijnen twee raaklijnen zijn aan de snijkromme, zoo heeft men:

Heeft O^4 een kegelpunt, dan liggen er in het geheel twaalf rechte lijnen op O^4; vier dezer rechte lijnen gaan door het kegelpunt.

Het aldus verkregen oppervlak stemt dus geheel en al overeen met het oppervlak van het geval B; maar de meetkundige afleiding is een geheel andere; zij heeft het voordeel, dat men haar op de nu volgende gevallen kan toepassen, waartoe nu zal worden overgegaan.

25. De standen, die met behulp der gegeven constructiën te beredeneeren zijn, zijn:

b. Heeft de snijkromme in A_1 een keerpunt, dan is er slechts één vlak te construeeren door $D_1 A_1$, zoodanig dat c_1^2 en k_1^2 elkander osculeeren, nl. het vlak door $D_1 A_1$ en de keerraaklijn; de raakkegel in A gaat dus over in twee elkaar snijdende vlakken; A is een biplanaar punt van de eerste soort. In elk dezer vlakken komen nu twee rechte lijnen te liggen, terwijl er nog vier andere zijn.

c. Daar de beide gemeenschappelijke punten der koorde en der ruimtekromme van de derde orde A_1 en B_1 de rol vervullen van dubbelpunten, zoo bezit O^4 twee kegelpunten, die zich evenwel van het geval C onderscheiden, door dat hunne verbindingslijn op het oppervlak O^4 ligt; buitendien gaan er door A en B nog twee rechte lijnen en er zijn nog vier niet door deze punten gaande rechte lijnen op O^4.

d. De beide kegelpunten vereenigen zich in een biplanaar punt van de tweede soort; de hoofdraaklijn hiervan ligt op O^4; er gaan nog twee andere lijnen door het biplanare punt, terwijl er nog twee andere rechte lijnen op O^4 liggen.

e. Er ontstaan twee kegelpunten; bij onderzoek blijkt dit geval met het geval C overeen te stemmen.

f. Er ontstaat ook nu een biplanaar punt van de tweede soort, zich onderscheidende van *d* doordat de hoofdraaklijn niet op O^4 ligt; door dit punt gaan vier rechte lijnen op O^4.

g. Er ontstaan drie kegelpunten; is A_1 het snijpunt der ide gemeenschappelijke beschrijvende lijnen en zijn B_1 en die der lijnen met de kegelsnede, dan verkeeren de gelpunten A en B en A en C ten opzichte van elkander het verband bij c aangegeven; B en C in dat bij e be-ndeld.

h. De drie kegelpunten van het voorgaande geval ver-nigen zich in een uniplanaar punt van de eerste soort, oor hetwelk op O^4 twee rechte lijnen getrokken kunnen orden. Het raakvlak wordt in R_1 vertegenwoordigd door et oppervlak van de tweede orde, gebracht door D_1 en olgens de beide gemeenschappelijke beschrijvende lijnen K_1^2 akende.

i. Er ontstaan vier kegelpunten, twee aan twee verbonden loor vier lijnen op het oppervlak O^4.

26. Geheel andere eigenschappen verkrijgt het oppervlak O^4, wanneer O_1^2 zich bevindt in een der standen k tot n; om welke reden weder de eerste stand k meer bijzonder zal worden nagegaan.

k. Uit de constructie, in N⁰. 14 voor de klempunten op d^2 aangegeven, volgt dat, wanneer de raakkegels, uit D_1 aan K_1^2 en O_1^2 beschreven, dezelfde zijn, elk punt van d^2 de eigenschappen van een klempunt moet bezitten; d^2 is dus een keerkegelsnede van O^4. K_1^2 en O_1^2 snijden elkander volgens twee elkander snijdende kegelsneden; door de snijlijn van de vlakken van deze kegelsneden gaan de poolvlakken van D_1 ten opzichte van O_1^2 en K_1^2 en deze vormen met de vorige een harmonischen vlakkenbundel. De raakkegel van D aan K^2 is dus tevens de KUMMER'sche kegel uit D; maar de kromme van de vierde orde, volgens welke deze aan O^4 raakt, gaat over in twee elkaar snijdende kegelsneden, waarvan er een met de keerkegelsnede d^2 samenvalt en de andere overeenstemt met de raakkegelsnede van D_1 aan O_1^2. O^4 snijdt verder het kernoppervlak eveneens in twee kegelsneden.

Elk punt P_1 van de raakkegelsnede op O_1^2 is de top van een kegel, die aan K_1^2 raakt en met het raakvlak aan een overeenkomstig punt van d^2 overeenkomt (14);

de stralen van zulk een raakkegel uit P_1 snijden O_1^2 nog in een tweede punt. Valt evenwel P_1 in een snijpunt der vier kegelsneden, dan gaat de raakkegel over in een raakvlak en de stralen door dit punt zijn de raaklijnen aan O_1^2. In R zal dus het overeenkomstige punt van d^2 de eigenschap bezitten, dat de lijnen, daardoor in het raakvlak getrokken, de snijkromme van dat raakvlak met O^4 in vier samenvallende punten snijden. Daar dit punt dus de rol van een viervoudig punt speelt, is het een sluitpunt (close-point van CAYLEY). De keerkegelsnede heeft dus twee sluitpunten, waarvan de constructie thans is aangegeven. Door elk der beide sluitpunten gaan vier op O^4 liggende rechte lijnen; zij liggen in de vlakken, met de raakvlakken aan O_1^2 in de beide snijpunten der kegelsneden overeenkomende, en komen overeen met de beschrijvende lijnen van O_1^2 in die vlakken. Behalve de kegel uit D zijn er nog twee KUMMER'sche kegels.

Uit dezen stand laten zich nu de andere bijzondere standen dadelijk afleiden.

l. De beide sluitpunten op d^2 vallen samen.

m. Behalve de keerkegelsnede is er nog een kegelpunt. De oppervlakken O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in dit geval volgens een kegelsnede en twee elkaar snijdende lijnen, die de kegelsnede snijden.

n. Het snijpunt der beide bij *m* genoemde rechte lijnen valt op de kegelsnede; waaruit volgt, dat het kegelpunt in de beide samenvallende sluitpunten valt.

Geval E.

27. Dit geval houdt zich bezig met die bijzondere standen van O_1^2, welke voor kunnen komen als het stelsel oppervlakken een vast punt heeft, 'twelk aan alle oppervlakken gemeen is. Daar de algemeene stand van O_1^2 voor deze aanname bij het geval B besproken is, zoo zal, op het voetspoor van geval D, weder eerst de opsomming van de bijzondere standen gegeven worden.

a. O_1^2 raakt aan het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de kegelsnede d_1^2.

c. O_1^2 raakt het vlak δ_1 en een der hierin liggende beschrijvende lijnen raakt d_1^2.

d. O_1^2 raakt d_1^2 in twee punten.

e. O_1^2 raakt δ_1 en de beide hierin liggende beschrijvende lijnen raken d_1^2.

f. O_1^2 raakt vlak δ_1 en het snijpunt der hierin gelegen beschrijvende lijnen ligt op d_1^2.

g. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven.

h. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven en raakt δ_1.

i. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven en raakt d_1^2 in twee samenvallende punten.

28. Uit hetgeen omtrent het ontstaan van een kegelpunt bij geval B is opgemerkt volgt:

a. Het kegelpunt gaat over in een biplanaar punt van de eerste soort; de beide vlakken, waarin de raakkegel is overgegaan, worden vertegenwoordigd door de vlakken, gebracht door D_1 en de beschrijvende lijnen, volgens welke O_1^2 aan δ_1 raakt. Dit geval stemt overeen met geval D *b*.

b. Het geval *b* verdient eenigszins nadere beschouwing. Laat O_1^2 d_1^2 raken in A_1; met alle lijnen, door A_1 getrokken, komen in R overeen lijnen, die den straal $D\,A$ van K^2 en tevens d^2 snijden. Liggen nu deze lijnen in het raakvlak van O_1^2 in A_1, dan liggen de overeenkomstige in R alle op een kegel, die een vast punt A van O^4 tot top heeft en d^2 tot richtlijn; deze lijnen hebben geen ander punt met O^4 gemeen dan A en een punt van d^2; A is alzoo een dubbelpunt. De stralen van den raakkegel komen overeen met de kegelsneden, gebracht door D_1, een punt gemeen hebbende met d_1^2 behalve A_1 en O_1^2 in A_1 osculeerende. Het oppervlak O^4 heeft dus twee kegelpunten, verbonden door een daarop gelegen lijn; dit geval stemt dus overeen met $D\,c$.

c. Verbindt men de voorwaarden *a* en *b*, dan ziet men, dat hierbij ontstaat een kegelpunt en een biplanaar punt van de eerste soort, welk geval bij de vorige rubriek niet voorkwam.

d. O^4 heeft drie kegelpunten als $D\,g$.

e. Hierbij ontstaan twee kegelpunten en een biplanaar punt van de eerste soort.

f. Het dubbelpunt, dat bij den stand *b* is nagegaan, heeft nu tot raakkegel een kegel, overeenkomende met het vlak δ_1, in hetwelk de twee beschrijvende lijnen liggen. Hieruit volgt, dat het bewuste dubbelpunt naar *D* gegaan is, welk punt daardoor overgaat in een biplanaar punt van de tweede of derde soort, vereenigingspunt van een kegelpunt met een kegelpunt of een biplanaar punt van de eerste soort, naar gelang een der beschrijvende lijnen d_1^2 snijdt of raakt.

29. Uit de behandeling van stand *k* bij het geval D volgt, dat de drie volgende gevallen betrekking hebben op oppervlakken met keerkegelsnede; zoo ziet men, dat hierbij de navolgende vormen ontstaan.

g. Het oppervlak O^4 heeft een keerkegelsnede en een kegelpunt, stemt dus overeen met geval D, stand *m*.

h. Het oppervlak O^4 heeft, behalve de keerkegelsnede, nog een biplanaar punt van de eerste soort.

i. Het oppervlak O^4 heeft een keerkegelsnede, waarop twee samenvallende sluitpunten en een kegelpunt.

Geval F.

30. Dit geval houdt zich, evenals de beide volgende, bezig met de vormen van O^4, die ontstaan door een kegelvlak als beeld-oppervlak te nemen, waarbij hier vooreerst ondersteld wordt, dat het stelsel oppervlakken een vast punt bezit, waardoor alle oppervlakken gebracht worden, terwijl de kegel O_1^2 geen bijzonderen stand inneemt.

Het is, op grond van het voorgaande, in te zien, dat het hierdoor ontstaande oppervlak O^4, behalve *D*, nog een tweede kegelpunt bezitten zal, overeenkomende met den top A_1 van kegel O_1^2.

Dit geval stemt dus geheel en al overeen met geval C. De vier rechte lijnen, uit elk der kegelpunten gaande, worden vertegenwoordigd door de vier kegelstralen, die uit A_1 naar d_1^2 gaan en de vier rechte lijnen, uit D_1 naar de snijpunten van d_1^2 met de kegelsnede $\overline{\delta_1 O_1^2}$ getrokken. Dit geval

geeft weder aanleiding tot de nader te beschouwen bijzondere gevallen.

Geval G.

31. Uit de algemeene eigenschappen van geval C, waar de kegel O_1^2 in R_1 een algemeenen stand innam, leidt men, voor het geval het oppervlakkenstelsel geen bijzonderheden aanbiedt, de volgende bijzondere standen van kegel O_1^2 af.

a. O_1^2 kan met den top A_1 op K_1^2 liggen.

b. O_1^2 kan K_1^2 zoodanig snijden, dat er een dubbelpunt de snijkromme ontstaat, zonder dat A_1 op K_1^2 ligt.

c. O_1^2 kan met den top op K_1^2 liggen, zoodat de kromme in A_1 een keerpunt heeft.

d. O_1^2 kan K_1^2 zoodanig snijden, dat er een keerpunt in de snijkromme ontstaat, zonder dat A_1 op K_1^2 ligt.

e. O_1^2 kan K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde snijden.

f. O_1^2 kan K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met raaklijn door A_1^2 snijden.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee rechte lijnen en een kegelsnede.

h. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkaar raken.

32. Uit deze bijzondere standen zijn de navolgende vormen van het oppervlak O^4 af te leiden.

a. Wanneer O_1^2 met den top A_1 op K_1^2 ligt, dan vereenigen zich de beide gekoppelde kegelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort. O^4 stemt overeen met geval D, stand *f*. De doorsnijding met een vlak α, door $D_1 A_1$ gebracht, geeft twee kegelsneden k_1^2 en c_1^2; c_1^2 splitst zich evenwel in twee rechte lijnen, die elkander in een punt van k_1^2 snijden. De eenige kegelsnede, die k_1^2 dubbel raakt, door D_1 gaat en c_1^2 osculeert is de dubbel te tellen lijn, $D_1 A_1$. $D A$ is dus in R de raaklijn aan den raakknoop der snijkromme.

Om de raakvlakken te verkrijgen merke men op, dat

deze O^4 moeten snijden in een kegelsnede en twee elkander in A snijdende lijnen. Het zijn dus in R_1 de vlakken, gebracht door $D_1 A_1$ en de raaklijnen aan de snijkromme van O_1^2 en K_1^2; er zijn dus twee raakvlakken.

b. Er ontstaan drie kegelpunten; elk der twee gekoppelde kegelpunten is met het derde, dat met het dubbelpunt der kromme overeenkomt, verbonden door een rechte lijn op O^4. Dit stemt overeen met geval D, stand *g*.

c. De beide raakvlakken, door de constructie voor den stand *a* gevonden, vereenigen zich; bij het biplanaar punt van de tweede soort, voegt zich nog een kegelpunt, dat volgens de beschouwing *b* ontstaan is, en het punt A wordt uniplanaar; drie kegelpunten vereenigen zich in dit punt. Er gaan twee rechte lijnen door A, overeenkomende met de keerraaklijn en liggende in het vlak, dat uit de vereeniging der beide raakvlakken van den stand *a* bestaat.

d. Er ontstaat een biplanaar punt van de eerste soort en twee gekoppelde kegelpunten; het eerste is een gevolg van het aanwezig zijn van het keerpunt. Het oppervlak stemt overeen met geval E, stand *e*.

e. Er ontstaan een biplanaar punt van de tweede soort en een kegelpunt; de verbindingslijn van beide ligt op O^4; de bijzondere raaklijn aan het biplanaar punt komt overeen met $D_1 A_1$.

f. Het biplanaar punt van het vorige geval vereenigt zich met het kegelpunt; er ontstaat weder een uniplanaar punt; maar nu gaat er slechts één lijn door; men kan dit een uniplanaar punt van de tweede soort noemen.

g. O^4 heeft twee kegelpunten en een biplanaar punt van de tweede soort; het laatste met elk der beide andere door een lijn op O^4 verbonden.

h. Er ontstaan vier kegelpunten als geval D, stand *i*.

i. Evenals bij stand *g* ontstaan er twee gekoppelde kegelpunten en een biplanaar punt van de tweede soort.

Geval H.

33. Ten slotte blijft nog de bespreking der bijzondere

anden van het kegelvlak O_1^2 als het oppervlakkenstelsel n vast punt bezit, dat op alle oppervlakken ligt. De voornamste zijn:

a. De top A_1 van O_1^2 ligt in het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de kegelsnede d_1^2.

c. O_1^2 raakt d_1^2 in twee punten.

d. O_1^2 raakt δ_1.

e. O_1^2 raakt δ_1 en de raakstraal raakt d_1^2.

f. O_1^2 ligt met den top op δ_1 en een der snijstralen aakt d_1^2.

g. O_1^2 ligt met den top op δ_1; de beide snijstralen raken d_1^2.

34. De vormen, waartoe deze standen aanleiding geven, zijn na het voorgaande gemakkelijk af te leiden.

a. Het kegelpunt A vormt met het kegelpunt D een biplanaar punt van de tweede soort. Het oppervlak stemt overeen met dat van geval D, stand *f* of geval G, stand *a*.

b. Behalve D en A is er nog een kegelpunt, overeenkomende met het raakpunt; dit kegelpunt is met elk der beide eerste door een lijn op O^4 verbonden. Het geval stemt overeen met geval G, stand *b* en geval D, stand *g*.

c. Er zijn vier kegelpunten in het geheel als geval D, stand *i* en geval G, stand *h*.

d. Het biplanaar punt van de tweede soort, dat bij stand *a* ontstond, heeft nu slechts één raakvlak en gaat over in een uniplanaar punt. Met de lijnen, die D_1 vereenigen met de snijpunten van den raakstraal met de kegelsnede, komen twee lijnen op O^4 overeen, zoodat het punt het karakter heeft van geval G, stand *c*.

e. Er ontstaat een uniplanaar punt in D, zooals in geval G, stand *f*, omschreven is; er bestaat eveneens één lijn uit D op O^4 getrokken.

f. Er ontstaat een biplanaar punt in D, bestaande uit twee kegelpunten, even als bij stand *a*; maar buitendien is er nog een kegelpunt.

g. Even als *f*; maar er zijn nog twee kegelpunten. De beide laatste gevallen stemmen overeen met geval G, stand *e* en *g*.

34. Hiermede kunnen de oppervlakken van de eerste groep als afgeloopen beschouwd worden.

De behandeling heeft doen zien, dat meermalen dezelfde vormen op verschillende wijzen kunnen worden afgeleid; maar dat er bij elk geval gedurig enkele nieuwe vormen worden verkregen, die volgens een vorige afleiding niet te verkrijgen waren. Voor een volledig overzicht van alle vormen zal dus de hier gevolgde verdeeling noodzakelijk blijken. Zooals bij enkele hoofdstanden is aangetoond, komen bij de op verschillende wijze ontstaande overeenstemmende vormen ook hetzelfde aantal rechte lijnen en KUMMER'sche kegels te voorschijn. Voor elk geval kan in het bijzonder die vergelijking worden opgemaakt, bij welke afleidingen men dezelfde aantallen terugvindt, die SEGRE in de in het begin aangehaalde verhandeling op een andere wijze verkrijgt.

IV. TWEEDE GROEP.

35. Even als bij de vorige groep zal eerst ondersteld worden, dat de twee elkander snijdende lijnen, waarin de kegelsnede is overgegaan, werkelijk bestaande zijn; naderhand zal dan op de veranderingen gewezen worden, die intreden wanneer deze onbestaanbaar zijn. De verdeeling in verschillende gevallen geschiedt even als in de eerste groep en zooals dit in N⁰. 10 wordt aangegeven. Voorop dienen evenwel gesteld te worden de wijzigingen, die de oppervlakken K^2 en K_1^2 ondergaan, vergeleken met de algemeene constructie daarvan.

Geval A.

36. Laat de twee elkaar snijdende lijnen, waarin d^2 is overgegaan, a en b zijn, liggende als voren in vlak δ. Daar deze lijnen de poolkegelsnede vormen van een punt D ten opzichte van het kernoppervlak K^2, zoo is K^2 een kegelvlak, dat δ in die lijnen snijdt en de raakkegel uit D is

n de vlakken Da en Db overgegaan. Hiermede komen in R_1 overeen het punt D_1, de kegel K_1^2 en de elkander snijende lijnen $a_1 b_1$.

De kegelvlakken, tot het stelsel behoorende, zijn overgegaan in kegelvlakken, die het punt $\overline{ab} = P$ tot top hebben en in vlakkenparen door a en b. Is b.v. A een punt in R, dan zal het vlak $Aa\,K^2$ in den straal a' snijden; het vlak $a'b$ vormt met Aa het in een vlakkenpaar overgegane kegelvlak. Het tweede vlakkenpaar door A gaande, bestaat uit het vlak Ab, dat K^2 in b' snijdt en het vlak $b'a$. Met deze vlakkenparen komen in R_1 overeen de beide raakvlakken, door A_1 aan K_1^2 getrokken; terwijl met den kegelbundel door A overeenkomt de vlakkenbundel door $A_1 P_1$, zijnde P_1 het snijpunt der lijnen $a_1 b_1$.

Met de lijnen, die in R a of b snijden, komen in R_1 overeen raaklijnen aan K_1^2. Worden zij door een bepaald punt A van a getrokken, dan vindt men de overeenkomende door de lijn $D_1 A_1$ te trekken; alle raaklijnen van K_1^2, die $D_1 A_1$ snijden, komen dan met de lijnen door A overeen. Om de lijnen te construeeren, overeenkomende met den stralenbundel uit een punt A van a in het vlak α door a getrokken, construeere men eerst weder de lijn $D_1 A_1$; vervolgens het raakvlak α_1 aan K_1^2, met α overeenkomende; snijdt nu $D_1 A_1$ α_1 in B_1, dan komen de stralen door B_1 met den stralenbundel door A overeen.

37. Laat nu in R_1 het beeld-oppervlak O_1^2 een algemeen oppervlak zijn; even als bij de voorgaande groep kan men dan in R_1 de vier dubbel projecteerende kegels van K_1^2 en O_1^2 construeeren; maar nu is K_1^2 zelf een dezer kegels. De kegelsneden, liggende op O_1^2, welker vlakken raakvlakken aan een der drie nieuwe dubbel-projecteerende kegels zijn, (N°. 11) bieden nu geen bijzonderheden aan; wel is dit het geval met de kegelsneden, liggende in raakvlakken aan K_1^2 zelf; deze raken K_1^2 in twee punten van een zelfden straal en komen dus overeen met de kegelsneden, volgens welke O^4 gesneden wordt door vlakken gaande door a en b. Hieruit volgt:

Wanneer de dubbelkegelsnede van O^4 in twee elkaar snij-

dende lijnen is overgegaan, dan is een der KUMMER'sche kegels overgegaan in de lijnen a en b.

Er zullen eveneens acht beschrijvende lijnen van O_1^2 zijn, die aan K_1^2 raken; met elk dezer lijnen komt in R een paar gekoppelde lijnen overeen, waarvan er een a en de andere b snijdt, en die elkander in een punt van K^2 snijden. Daar verder twee beschrijvende lijnen van O_1^2, die K_1^2 in dezelfde beschrijvende lijn raken, in een raakvlak aan K_1^2 liggen, zoo zijn er in het geheel vier vlakken door a, welke met vier vlakken door b vier vlakkenparen vormen en waarin de zestien rechte lijnen liggen. Uit deze aanwijzing zal men de ligging der zestien rechte lijnen kunnen bepalen.

Past men de methode van N°. 14 toe tot het bepalen der klempunten op de dubbelkromme, dan ziet men, dat elk der raakvlakken $D_1 a_1$ en $D_1 b_1$ den omhullingskegel van D_1 aan O_1^2 in twee stralen snijdt; met deze stralen komen in R overeen de lijnen, naar de klempunten getrokken; men ziet dus, dat er op elk der dubbellijnen a en b twee gelegen zijn. Er kunnen ook een of twee dubbele klempunten ontstaan.

Bij de plooipunten van dit oppervlak valt op te merken, dat er, behalve de plooipunten, liggende op de zestien rechte lijnen en die op de ruimtekrommen van de vierde orde, nog gelegen zullen zijn op de dubbellijnen a en b. De kegelsneden, volgens welke vlakken door a of b O^4 snijden, hebben namelijk twee snijpunten met deze lijnen; er zullen evenwel standen zijn, voor welke de kegelsneden raken. Ten einde deze te bepalen, denke men zich eerst een vlak α_1, rakende aan K_1^2; dit snijdt het vlak $D_1 a_1$ volgens een lijn l_1 en het beeld-oppervlak O_1^2 in een kegelsnede c_1^2. Uit elk punt van l_1 kunnen twee raaklijnen aan c_1^2 getrokken worden; deze raaklijnen komen overeen met de raaklijnen, uit een punt van a getrokken aan de kegelsnede, volgens welke het overeenkomstige vlak α door a O^4 snijdt. Ware l_1 een raaklijn aan c_1^2, dan zoude er slechts één raaklijn door een punt van l_1 aan c_1^2 mogelijk zijn en dus de overeenkomstige kegelsnede in R a raken. Hieruit volgt:

Ten einde de plooipunten op a te bepalen, construeere men de doorsnede van het vlak $D_1 a_1$ met O_1^2, trekke uit den top P_1 van K_1^2 de beide raaklijnen aan deze doorsnede en legge door de raakpunten raakvlakken aan K_1^2; deze beide vlakken zijn de vlakken, die overeenkomen met de vlakken, die O^4, volgens een kegelsnede snijden, rakende aan a. Hetzelfde geldt ten opzichte van de dubbellijn b.

38. Even als bij de vorige groep zal ook bij deze oppervlakken K_1^2 in R_1 de grens aanwijzen tusschen de punten van R_1, welke met werkelijke gekoppelde punten of met onbestaanbare overeenkomen. Men heeft nu de volgende gevallen.

a. a en b zijn werkelijk bestaande; D ligt buiten K^2. Met de punten binnen K_1^2 komen onbestaanbare, met de punten buiten K_1^2 komen werkelijk bestaande gekoppelde punten overeen.

b. a en b zijn onbestaanbaar; D ligt binnen K^2. Met de punten binnen K_1^2 komen de werkelijk bestaande, met die buiten K_1^2 de onbestaanbare gekoppelde punten overeen.

c. a en b zijn onbestaanbaar; K^2 is eveneens onbestaanbaar. Er ontstaan in R geen onbestaanbare gekoppelde punten.

Geval B.

39. Daar de oppervlakken van het stelsel in R, behalve de beide rechte lijnen a en b, nog een vast punt D met elkander gemeen hebben, zoo wordt het kernoppervlak de kegel, die D tot top heeft en a en b tot richtlijnen, m. a. w. deze kegel gaat over in twee vlakken, die elkander volgens de lijn DP snijden.

Even als in het voorgaande geval zijn de kegelvlakken van het stelsel weder in twee afdeelingen te verdeelen. Een afdeeling is het kegelnet, welks gemeenschappelijke stralen PD, a en b zijn; de tweede bestaat uit de bundels vlakkenparen, bepaald door Da met alle vlakken door b en Db met alle vlakken door a. In R_1 komen met de kegels overeen alle vlakken door P_1; met de vlakkenparen alle vlakken door a_1 en b_1. De twee elkander snij-

dende lijnen a_1 b_1 vervangen de kegelsnede d_1^2 der vorige groep.

Met alle rechte lijnen in R_1, die P_1 D_1 snijden, komen overeen kegelsneden door D en het vlak δ in P rakende; deze laatsten toch zijn krommen, die de doorsnijding zijn van een vlak door P D met een oppervlak van het stelsel. Met een stralenbundel, liggende in een vlak α_1, welks top op een punt van P_1 D_1 ligt, komt overeen een kegelsnedenbundel door D, rakende in P aan δ en op een zelfde oppervlak liggende; ging α_1 nog door P_1 D_1, dan zijn het kegelsneden in een zelfde vlak door P D. Met alle stralen door een punt van P_1 D_1 komt overeen het kegelsnedennet, gevormd door de snijding van een vlakkenbundel, door P D gelegd en een oppervlakkenbundel, door $\overline{a\,b}$ en een kegelsnede van het stelsel door D en P gebracht. Diegenen van deze kegelsneden, welke in een zelfde vlak door P D liggen, osculeeren elkander in P.

De overige eigenschappen van lijnen, vlakken enz. in R en R_1 zijn weder, even als bij de eerste groep, geval B, zoodanig dat de ruimten R en R_1 tot elkander in een wederkeerig verband staan.

40. Geeft men nu in R_1 aan het beeld-oppervlak O_1^2 een willekeurigen stand, dan zal, even als bij de voorgaande groep, O^4 een dubbelpunt in D verkrijgen; dit punt wordt een kegelpunt, welks raakkegel weder overeenkomt met den kegel, tot top hebbende D_1 en tot richtlijn de doorsnede van O_1^2 met δ_1.

De rechte lijnen op O^4 splitsen zich weder in vier lijnen, gaande door D en overeenkomende met de vier stralen, door D_1 naar de snijpunten van a_1 b_1 met de doorsnede van δ_1 met O_1^2 getrokken. De andere acht worden vertegenwoordigd door de acht beschrijvende lijnen van O_1^2, die a_1 en b_1 snijden.

De constructie der verdere Kummer'sche kegels, waarvan er een vertegenwoordigd is door de lijnen a en b en twee zijn samengevallen in den kegel, uit de raaklijnen door D aan het oppervlak getrokken gevormd, geeft geen aanleiding tot bezwaren.

Geval C.

41. Daar het oppervlakkenstelsel geen bijzonderheden aanbiedt, zijn de oppervlakken K^2 en K_1^2 als in het geval A; het beeld-oppervlak is nu evenwel een kegelvlak O_1^2, dat tot top A_1^2 heeft.

Het oppervlak O^4 bezit nu, even als bij de voorgaande groep, twee gekoppelde kegelpunten; uit elk dezer kegelpunten gaan vier rechte lijnen; vier dezer lijnen snijden a en vier b; zij snijden elkander twee aan twee in K^2. Ook zijn er weder twee kegelsneden, volgens welke O^4 door het daardoor gebrachte vlak geraakt wordt.

Geval D.

42. Hierbij beginnen weder de bijzondere standen van O_1^2, waarbij als voren eerst ondersteld wordt, dat het oppervlakkenstelsel geen vast punt bezit. De voornaamste dezer standen zijn:

a. O_1^2 raakt K_1^2 in A_1.

b. O_1^2 raakt K_1^2 zoodanig, dat er in het raakpunt A_1 een keerpunt in de snijkromme is.

c. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

d. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkander raken.

e. O_1^2 gaat door den top P_1 van K_1^2.

f. O_1^2 gaat door den top P_1 van K_1^2, zoodat P_1 een keerpunt der snijkromme is.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

h. De koorde van den vorigen stand wordt een raaklijn aan de ruimtekromme.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een kegelsnede en twee elkander snijdende lijnen.

43. Bij nadere beschouwing ziet men, dat de standen a, b, c en d aanleiding geven tot een oppervlak O^4 met een kegelpunt A in het eerste geval, dat in het geval b het kegelpunt overgaat in een biplanaar punt van de eerste

soort; in het geval *c* ontstaan er twee gekoppelde kegelpunten, die in het geval *d* in een biplanaar punt van de tweede soort overgaan; terwijl het geval *a* met het geval B, het geval *c* met het geval C overeenstemt. De standen *e* en de daaraanvolgende vergen nadere bespreking.

e. Wanneer P_1 op O_1^2 ligt, dan komen met de rechte lijnen door P_1 overeen de paren gekoppelde lijnen door P. Nu snijdt evenwel een lijn l_1 O_1^2 nog slechts, behalve in P_1, in één punt; elk der met l overeenkomende gekoppelde lijnen l en l' snijdt dus O^4 in slechts één punt; het punt P is dus een punt geworden, zoodanig dat een lijn, daardoor getrokken, O^4 in één punt snijdt; P is dus een drievoudig punt. De kegel van de derde orde, die de raakkegel van dit punt moet zijn, heeft zich evenwel gesplitst in twee deelen t. w. in het vlak δ van $a\,b$ en in een kegel van de tweede orde, overeenkomende met het raakvlak in P_1 aan O_1^2 geconstrueerd. Alle rechte lijnen, door P_1 in dit vlak getrokken, zullen eveneens O_1^2 in geen ander punt dan P_1 snijden. Dit drievoudig punt kan, wegens het aanwezig zijn van slechts één raakvlak in dit punt, een planaar drievoudig punt heeten. Uit dit punt gaan vier rechte lijnen op O^4 liggende; zij komen overeen met de twee beschrijvende lijnen van O_1^2 door P_1 getrokken. Daar er verder nog vier beschrijvende lijnen op O_1^2 liggen, die K_1^2 raken, zoo heeft O^4, behalve de vier genoemde, nog acht rechte lijnen, welke geheel op haar liggen. Behalve den bijzonderen Kummer'schen kegel uit den top P en den kegel $a\,b$, construeert men de overige twee Kummer'sche kegels door eerst in R_1 de dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 te construeeren.

f. Wederom vertoont zich in P het drievoudige punt, maar het raakvlak aan O_1^2 in P_1 is nu tevens een raakvlak aan K_1^2; de kegel van de tweede orde, bij den vorigen stand ontstaande, splitst zich dus nu in twee vlakken, een door a en een door b; het drievoudig punt P wordt triplanaar.

g. Nevens het drievoudig punt, dat planaar is, ontstaat nog een kegelpunt met het planaar punt verbonden door een lijn op O^4.

h. Het kegelpunt heeft zich met het planaar drievoudig punt verbonden tot een bijzonder triplanaar punt van de tweede soort. Het raakvlak aan den kegel, overeenkomende met de beide raakvlakken door P, is tevens dat voor O_1^2.

i. Bij het planaar drievoudige punt komen op O^4 nog twee kegelpunten, overeenkomende met de snijpunten der rechte lijnen met de kegelsnede.

De bepaling van het aantal en de ligging der rechte lijnen voor elk dezer gevallen van O^4 kan zonder bezwaar geschieden op de wijze, zooals voor stand *e* is aangeduid.

Geval E.

44. Heeft het oppervlakkenstelsel een vast punt D, waardoor alle oppervlakken gaan, bestaat het alzoo uit alle oppervlakken van de tweede orde, gebracht door D en de elkander snijdende lijnen a en b, dan kan O_1^2 weder verschillende standen in R_1 innemen. De voornaamste hiervan zijn:

a. O_1^2 raakt aan het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt aan een der lijnen a_1 of b_1.

c. O_1^2 raakt a_1 en b_1.

d. O_1^2 raakt het vlak δ_1 in een punt van a_1.

e. O_1^2 gaat door het snijpunt P_1 van a_1 en b_1.

f. O_1^2 gaat door P_1 en raakt het vlak δ_1 in een ander punt.

g. O_1^2 gaat door P_1 en het raakvlak in dit punt bevat a_1 of b_1.

h. O_1^2 gaat door P_1 en raakt in dit punt het vlak δ_1.

45. Uit vergelijking met vroegere gevallen en standen leidt men nu de bijzondere gevallen van O^4 af.

a. Het dubbelpunt D van O^4 wordt een biplanaar punt van de eerste soort; de raakkegel is overgegaan in twee elkaar snijdende vlakken (als D *b*).

b. Nevens het kegelpunt D treedt een tweede kegelpunt op. Zij A_1 het raakpunt van O_1^2 met a_1, dan ligt dit kegelpunt op de lijn DA, welke op het oppervlak O^4 ligt; deze verbinding van kegelpunten moet dus on-

derscheiden worden van de in C besprokene gekoppelde kegelpunten.

c. Drie kegelpunten. Het kegelpunt D is met de beide andere door lijnen op het oppervlak verbonden.

d. De beide kegelpunten vereenigen zich tot een biplanaar punt van de tweede soort.

e. Dit doet weder, even als de drie volgende standen, oppervlakken met een drievoudig punt ontstaan. Het geval *e* geeft een oppervlak O^4 met een planaar drievoudig punt en een kegelpunt, verbonden door een rechte lijn op O^4, even als in het geval D *g*.

f. Nevens het planaar drievoudig punt is er een biplanaar punt van de eerste soort op het oppervlak O^4.

g. Het drievoudig punt wordt triplanaar; het raakvlak door a_1 komt overeen met twee vlakken, een door a en een door b, welke met δ de drie raakvlakken in het drievoudig punt vormen.

h. Dit geval is zeer merkwaardig. Ter beoordeeling van den vorm van het oppervlak O^4, brenge men vlakken door D_1 P_1; deze snijden O_1^2 in kegelsneden, welke door P_1 gaan en δ_1 raken; deze kegelsneden zijn bijzondere gevallen van kegelsneden, die twee punten met a_1 b_1 gemeen hebben; in R komen dus daarmede kegelsneden overeen, die δ in P raken.

Daar nu alle vlakken door P D het oppervlak O^4 in zulke kegelsneden snijden, zoo is P D een dubbele lijn van O^4 en O^4 gaat over in het romeinsche oppervlak van Steiner, bij hetwelk drie dubbellijnen uit een zelfde drievoudig punt gaan.

Geval F.

46. Evenals bij de voorgaande groep, geeft dit geval geen stof tot veel bijzonderheden. Heeft het stelsel oppervlakken een vast punt en neemt O_1^2 geen bijzonderen stand in de ruimte R_1 in, dan bezit O^4, behalve D, nog een tweede kegelpunt A, overeenkomende met den top A_1 van

den kegel O_1^2. Het geval stemt dus geheel en al overeen met het geval C.

Geval G.

47. Bij dit geval en het volgende komen de verschillende bijzondere standen ter sprake, die de kegel O_1^2 in de ruimte R_1 kan innemen. In de eerste plaats wordt weder ondersteld, dat het oppervlakkenstelsel zelf geen vast punt bezit. De voornaamste bijzondere standen zijn dan de volgende:

a. De beide kegels K_1^2 en O_1^2 snijden elkander in een ruimtekromme van de vierde orde met dubbelpunt; de top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2.

b. De beide kegels K_1^2 en O_1^2 snijden elkander weder in een ruimtekromme met dubbelpunt; dit dubbelpunt ontstaat nu doordat K_1^2 en O_1^2 hetzelfde raakvlak hebben.

c. De top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2; maar de gevormde ruimtekromme heeft in A_1 een keerpunt.

d. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in twee kegelsneden.

e. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in een ruimtekromme met dubbelpunt; de top P_1 van K_1^2 ligt op O_1^2.

f. De top P_1 van K_1^2 ligt weder op O_1^2, maar de ruimtekromme heeft een keerpunt.

g. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

h. Deze ruimtekromme met koorde gaat over in een kegelsnede met dubbel tellende rechte lijn.

i. De kegel O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$.

k. O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$ en de top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2.

l. O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$ en snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

m. O_1^2 raakt vlak $D_1\ a_1$ en de top P_1 van K_1^2 ligt op O_1^2.

n. O_1^2 raakt vlak $D_1\ a_1$ en vlak $D_1\ b_1$.

48. De gevallen *a* tot *d* geven aanleiding tot verschillende vormen van dubbelpunten. De stand *a* doet de beide

gekoppelde dubbelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort samenvallen, van welk punt de bijzondere raaklijn niet op het oppervlak ligt; dit geval stemt overeen met geval D, stand *d*. In het geval *b* zijn er drie kegelpunten even als geval E, stand *c*. In het geval *c* is er bij het kegelpunt een biplanaar punt van de tweede soort gevormd en wordt er alzoo een uniplanaar punt gevormd.

Bij den stand *d* ontstaan er vier kegelpunten in het geheel.

De standen *e* tot *h* hebben betrekking op het ontstaan van drievoudige punten, even als dat bij de gevallen D en E het geval was. Voor den stand *e* verkrijgt men de verbinding van een drievoudig punt met twee gekoppelde kegelpunten. Het drievoudig punt is planaar; de raakkegel wordt vertegenwoordigd door het raakvlak in P_1 aan O_1^2. Uit dit drievoudige punt gaan twee rechte lijnen, elk naar een der dubbelpunten. Dit geval stemt overeen met geval D, stand *i*. Voor het geval *f* gaat het drievoudige punt in een triplanaar punt over.

Bij den stand *g* ligt de top A_1 van O_1^2 op K_1^2 en de top P_1 van K_1^2 op O_1^2. De beide kegelpunten hebben zich nu vereenigd tot een biplanaar punt van de tweede soort; terwijl het drievoudige punt planaar is gebleven.

Eindelijk hebben bij het geval *h* de beide kegels een zelfde raakvlak langs een gemeenschappelijken straal. Het drievoudige punt is dus triplanaar geworden, terwijl het dubbelpunt een biplanaar punt van de tweede soort is. Hierdoor ontstaat geval *E*, stand *h*.

Geheel anders wordt de gedaante van O^4 bij de nu volgende standen *i* tot *n*. Deze gevallen toonen overeenkomst met die gevallen van de eerste groep, waarbij het beeldoppervlak ingeschreven was in den omhullingskegel van D_1 aan K_1^2. Ontstond in dat geval een keerkegelsnede, zoo moeten nu op dezelfde wijze de dubbellijnen overgaan in keerlijnen.

i. Beschouwen wij eerst den stand van den kegel O_1^2, waarin hij aan het vlak $D_1\ a_1$ raakt, maar de top overigens een willekeurige plaats inneemt. De raakvlakken aan kegel K_1^2 snijden O_1^2 volgens kegelsneden, rakende

aan D_1 a_1. Met elk dezer raakvlakken (n°. 36) komt een vlak door a overeen, 't welk dus O^4 snijdt volgens a en een kegelsnede aan a rakende (n°. 37); a is dus een keerlijn van O^4. Verbindt men A_1 met D_1, dan komen met A_1 twee gekoppelde punten in R overeen; daar A_1 evenwel in D_1 a_1 ligt, is een dezer punten in a gekomen. De vlakken door D_1 A_1 snijden O_1^2 volgens twee rechte lijnen, met welke in R overeen komen twee kegelsneden, die met elkander gemeen hebben een punt van b, het met A_1 overeenkomende en niet in a liggende punt A, en elkander raken in een punt van a. Daar dit voor alle vlakken door D_1 A_1 het geval is, zoo is A een dubbelpunt van het oppervlak O^4, terwijl het daarmede gekoppelde punt in a een sluitpunt van de keerlijn is.

De beide zooeven genoemde kegelsneden zullen elkander in dit punt raken. Het tweede sluitpunt op a is het punt, overeenkomende met het snijpunt van a_1 en den straal van O_1^2, die in D_1 a_1 ligt. Het daardoor gaande raakvlak is het vlak $D\,a$, dat O^4 snijdt, behalve in a, in twee lijnen, waarvan er een samenvalt met a en de andere naar A gaat.

k De methode, bij den vorigen stand gebruikt, kan nu ook worden toegepast; de beide in den vorigen stand gescheiden sluitpunten hebben zich nu vereenigd; terwijl gelijktijdig het kegelpunt van het voorgaande geval op de keerlijn terecht is gekomen.

l. Als K_1^2 door O_1^2 volgens twee kegelsneden gesneden wordt, dan zal er nog een tweede kegelpunt ontstaan, en het oppervlak O^4 heeft dus in het geheel twee kegelpunten, terwijl de sluitpunten als voren bepaald worden.

m. In dit geval verkrijgt men, als bij den stand *f*, een triplanaar punt, maar de lijn a is keerlijn, daar D_1 a_1 het gemeenschappelijke raakvlak der beide kegelvlakken is.

n. Eindelijk zal bij dit geval zoowel de rechte lijn a als de rechte lijn b een keerlijn zijn; het dubbelpunt is op de lijn D P komen te liggen. Op elk der keerlijnen is er een sluitpunt en er liggen nog twee rechte lijnen op

het oppervlak, die de sluitpunten verbinden met het kegelpunt D.

Geval H.

49. Zij D wederom het vaste punt, dat alle oppervlakken van het stelsel met elkander gemeen hebben; construeert men dan als voren het vlakkenpaar K^2 en de twee elkaar snijdende lijnen a_1 b_1, dan heeft men voor den kegel O_1^2 met den top A_1 de volgende standen als de voornaamste.

a. De top A_1 van O_1^2 ligt op het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de lijn a_1.

c. O_1^2 raakt de lijnen a_1 en b_1.

d. O_1^2 raakt het vlak δ_1.

e. Het snijpunt P_1 van a_1 en b_1 ligt op O_1^2.

f. O_1^2 ligt met den top A_1 op δ_1 en een der stralen, volgens welke dit vlak O_1^2 snijdt, gaat door P_1.

g. O_1^2 raakt δ_1 en de raakstraal gaat door P_1.

h. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1.

i. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1 en de lijn b_1.

k. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1 en P_1 ligt op O_1^2.

l. O_1^2 raakt vlak D_1 a_1 en vlak D_1 b_1

50. In overeenstemming met het vroeger gevondene ziet men nu, dat in het geval *a* het punt A met het punt D een biplanaar punt van de tweede soort vormt, evenals geval D, stand *d* en geval G, stand *a*; bij den stand *b* ontstaan er drie kegelpunten, als geval E, stand *c* of geval G, stand *b*; bij stand *c* ontstaan er vier kegelpunten gelijk geval G, stand *d*. Bij stand *d* ontstaat er een uniplanaar punt.

De standen *e*, *f*, *g* geven wederom tot drievoudige punten in P aanleiding. In het geval *e* is er dus, behalve de kegelpunten D en A, een planaar drievoudig punt, zoodat deze stand een vorm van O^4 geeft, overeenstemmende met geval D, stand *i*. De raakkegel komt overeen met het raakvlak van den kegel in P_1.

Bij den stand *f* gaat het raakvlak door een der stralen, volgens welk O_1^2 δ_1 snijdt; het drievoudig punt blijft

is planaar; maar het kegelpunt D gaat over in een biplaar punt van de tweede soort, evenals geval G, stand g. een bijzonder geval, waarin de kegel verkeeren kan is nog, at hij niet alleen door P_1 gaat, maar ook a_1 raakt; alsan ontstaan er in het geheel twee kegelpunten en het rievoudig punt wordt triplanaar even als geval G, stand f.

Bij het geval g komt, even als bij geval E, stand h, het ppervlak van STEINER te voorschijn.

Bij de standen h, i, k, l komen, even als bij het voorgaande geval, de vormen van O^4 te voorschijn, waarbij of wel één der dubbellijnen of wel beide keerlijn worden.

Bij den stand h is er een kegelpunt D en een keerlijn a; de lijn b is dubbellijn gebleven. Dit stemt overeen met geval G, stand i.

Bij den stand i komen er in het geheel twee kegelpunten, als geval G, stand l.

Bij den stand k is P een drievoudig punt geworden, 't geen dus overeenstemt met geval G, stand m.

Eindelijk is er, zoo O_1^2 aan D_1 a_1 zoowel als aan D_1 b_1 raakt, een oppervlak met twee keerlijnen ontstaan, 't welk nog buitendien een kegelpunt bezit.

V. DERDE GROEP.

51. Terwijl bij de geheele voorgaande groep de beide rechte dubbellijnen, waarin de dubbelkegelsnede was overgegaan, òf wel bestaanbaar òf wel onbestaanbaar waren, zoo zijn in dit geval de lijnen a en b samengevallen tot één lijn a, door welke een vlak δ gelegd wordt, dat dezelfde beteekenis heeft als vroeger en dus de meetkundige plaats is van alle rechte lijnen, die een punt van a met een punt van de met haar samenvallende rechte lijn b verbinden. De verdeeling in de gevallen A tot H blijft behouden. Bij het geval A staan weder vooraan de wijzigingen, die er in de beide ruimten plaats hebben in den vorm en stand der hoofdelementen.

Geval A.

52. In het stelsel oppervlakken bestaat de voornaamste wijziging hierin, dat alle oppervlakken kegelvlakken zijn geworden, rakende aan het vlak δ in de lijn a.

Neemt men vier dezer kegelvlakken aan, dan zullen deze elkander twee aan twee snijden in kegelsneden, welker vlakken door een punt D gaan; de vlakken $D\,a$ en $D\,b$ der voorgaande groep zijn nu evenwel samengevallen; a is dus een dubbellijn van K^2 en K^2 moet alzoo overgegaan zijn in twee elkander snijdende vlakken.

Met een willekeurig vlak der ruimte R_1 komt nu een kegel van het stelsel overeen; gaat dit vlak door de in R_1 liggende lijn a_1, dan wordt de kegel in R een vlakkenpaar; men ziet dus, dat er in elk kegelnet, tot het stelsel behoorende, een vlakkenpaar is; in het geheele stelsel dus een bundel van vlakkenparen. De vlakkenparen door a vormen een involutie, projectief met den vlakkenbundel door a_1. De dubbelvlakken dier involutie zijn de vlakken die K^2 vormen; met hen komen twee vlakken in R_1 overeen; zij vervangen het oppervlak $K_1{}^2$. Als voren komen weder met de vlakken door D de vlakken door een vast punt D_1 overeen.

Met de rechte lijnen, door a getrokken, komen overeen rechte lijnen, die a_1 snijden; met een rechte lijn evenwel, die a_1 snijdt een tweetal lijnen door een punt van a; met willekeurige rechte lijnen in R_1 kegelsneden van het stelsel, die dus in een punt van a het vlak δ raken. Met willekeurige rechte lijnen in R komen overeen kegelsneden in R_1, gaande door D_1 en rakende aan de beide $K_1{}^2$ vervangende vlakken; met kegelsneden in R, die δ in een punt van a raken, kegelsneden, die de twee vlakken raken; snijden de kegelsneden in $R\,a$ in twee punten, dan snijden de overeenkomstige kegelsneden in $R_1\,a_1$. Met een stralenbundel door een punt A_1 op a_1 en liggende in een vlak α_1 door a_1, komen overeen de twee stralenbundels, door een punt A van a gaande en in de met α_1 overeenkomende vlakken α en α^1 liggende.

53. Laat nu in R_1 het beeldoppervlak O_1^2 een algemeen oppervlak van de tweede orde zijn. De groepen kegelsneden, die op O^4 liggen, worden thans in R_1 vertegenwoordigd door de rechte lijnen op O_1^2 en de kegelsneden, volgens welke vlakken door a_1 gebracht O_1^2 snijden; buitendien zijn er nog twee groepen, die men verkrijgt, wanneer men de beide nog overschietende KUMMER'sche kegels construeert. Om deze te verkrijgen, dient men de beide kegels te construeeren, bepaald door de doorsnijding van O_1^2 met de beide vlakken K_1^2.

Met de punten A_1 en B_1, in welke O_1^2 de lijn a_1 snijdt, komen twee punten A en B op a overeen. Trekt men door A_1 en B_1 lijnen, dan komen daarmede in R overeen lijnen; daar evenwel de lijnen in R_1 het oppervlak O_1^2, behalve in A_1, slechts in één punt snijden, zoo snijdt elk der lijnen van de gekoppelde paren in R het oppervlak O^4, behalve in A, in slechts een enkel punt; hieruit volgt, dat zoowel A als B een drievoudig punt is. Wat betreft het soort drievoudige punten, zoo zijn A en B beide planaar; met de raakvlakken in A_1 en B_1 aan O_1^2 komen de raakkegels in A en B overeen.

Door A_1 en B_1 gaan verder in het geheel vier beschrijvende lijnen van O_1^2; hieruit volgt, dat O^4 in het geheel acht rechte lijnen bezit, waarvan er door elk drievoudig punt vier gaan; dit viertal rechte lijnen ligt gedurig op een raakkegel; en elk dezer vier wordt door een der vier uit het andere drievoudig punt gesneden.

De beide drievoudige punten moeten ook beschouwd worden als toppen van KUMMER'sche kegels; in de dubbele knooplijn a zijn deze twee kegels samengevallen, terwijl nog overblijft die kegel, die met den omhullingskegel uit D_1 aan O_1^2 overeenstemt.

Daar de lijn a geheel en al een dubbele knooplijn is, zijn klempunten verdwenen, wel kan men een ander bijzonder punt opsporen.

Legt men namelijk door D_1 vlakken, dan zullen deze a_1 in een punt C_1 en O_1^2 in een kegelsnede c_1^2 snijden. Uit het punt C_1 kunnen in het algemeen twee raaklijnen aan

c_1^2 getrokken worden; met deze raaklijnen komen in R overeen de twee paren gekoppelde lijnen, die de vier raaklijnen van den dubbelknoop C aan de snijkromme c^4 vormen. Laat nu evenwel het snijvlak gelegd worden door de lijn, die uit D_1 getrokken, de snijkromme van het vlak $D_1\ a_1$ met O_1^2 raakt. Noemt men nu C_1 weder het snijpunt dezer lijn met a_1, dan valt een der beide bovengenoemde raaklijnen met $D_1\ C_1$ te zamen, 't geen ten gevolge heeft, dat in R van de vier raaklijnen er twee onveranderd blijven bestaan; van de twee andere valt er een in de raaklijn aan de dubbelknoop, de andere is $D\,a$. De dubbelknoop is dus voor dezen stand in een snavelpunt overgegaan; daar er uit D_1 twee raaklijnen in het vlak $D_1\ a_1$ aan O_1^2 kunnen getrokken worden, bezit de dubbele knooplijn twee snavelpunten. De beide raakvlakken door deze aan den KUMMER'schen kegel, die D tot top heeft gebracht, snijden O^4 volgens kegelsneden, die elkander in het snavelpunt osculeeren.

54. Het onderzoek naar die punten van de ruimte R_1, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, kan volgens de vroegere methoden geschieden. Men heeft gezien, dat de vlakkenparen in R een involutie vormen, van welke de vlakken, waarin K^2 is overgegaan, de dubbelvlakken zijn. De vlakken $D\,a$ en δ liggen verder harmonisch ten opzichte dezer dubbelvlakken, die voortaan α en β zullen heeten. De meetkundige plaats van alle punten in R_1, die overeenkomen met de punten van α en β, zijn de twee vlakken α_1 en β_1, die ook ten opzichte van $D_1\ a_1$ en δ_1 harmonisch liggen. Zooals in overeenstemming met het voorgaande blijkt (n°. 38), zijn er twee gevallen mogelijk.

a. α en β zijn bestaanbaar. Die punten van R_1, die in den tweevlakkenhoek liggen, in welken D_1 ligt, benevens in den daar tegenoverstaanden, komen overeen met de bestaanbare gekoppelde punten van R; de andere punten komen overeen met de onbestaanbare gekoppelde punten.

b. α en β zijn onbestaanbaar. Met alle punten van R_1 komen bestaanbare gekoppelde punten van R overeen.

Geval B.

55. Hebben de oppervlakken van het stelsel, behalve dubbel tellende lijn a, nog een vast punt D met elkanr gemeen, dan vereenigen zich de twee vlakken α en β, aarin het kernoppervlak K^2 is overgegaan, tot één vlak door $D\,a$ en de evengenoemde vlakkeninvolutie wordt arabolisch. De oppervlakken van het stelsel bestaan uit e kegels, welker top op a ligt, die δ volgens a raken en og door het vaste punt D gaan, en uit de vlakken door , met het vlak α een oppervlak uitmakende. Met de erste komen de willekeurige vlakken in R_1 overeen; met le laatste de vlakken door a_1.

Even als voorheen komen met alle rechte lijnen, die a snijden, rechte lijnen, die a_1 snijden overeen en staat de ruimte R weder in hetzelfde verband tot R_1 als omgekeerd R_1 tot R.

Neemt het beeld-oppervlak O_1^2 nu een willekeurigen stand in de ruimte R_1 in, dan heeft O^4 een kegelpunt D; de raakkegel in dit punt komt overeen met den kegel, die D_1 tot top heeft en tot richtlijn de doorsnede van O_1^2 met δ_1. De beide drievoudige punten op a worden weder vertegenwoordigd door de snijpunten A_1 en B_1 van a_1 met O_1^2. Uit elk dezer drievoudige punten gaat een rechte lijn naar D, welke geheel op O^4 ligt; terwijl met de beide andere lijnen, uit A_1 gaande en op O_1^2 liggende, nog twee lijnen uit A op O^4 liggende overeenkomen. Eveneens is het met B gesteld.

Geval C.

56. Hierbij wordt weder ondersteld, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is, maar het basis-oppervlak een kegeloppervlak O_1^2 is, dat tot top C_1 heeft. Het oppervlak O^4 bezit twee gekoppelde kegelpunten; uit elk dezer punten gaan twee rechte lijnen, overeenkomende met $C_1 A_1$ en $C_1 B_1$. De rechte lijnen verbinden dus de kegelpunten met de drievoudige punten. Bij de beide laatst behandelde gevallen blij-

ven de opmerkingen, die bij het geval A omtrent het bestaan van snavelpunten op a gemaakt zijn, van waarde.

Geval D.

57. Men onderstelle, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is en O_1^2 een algemeen regeloppervlak; de voornaamste der bijzondere standen, die men aan O_1^2 geven kan, zijn de volgende:

a. O_1^2 raakt a_1.

b. O_1^2 raakt α_1.

c. O_1^2 raakt α_1 en β_1.

d. O_1^2 raakt α_1 in een punt van a_1.

De stand a geeft aanleiding tot het samenvallen van de twee drievoudige punten A en B; het raakvlak van O_1^2 gaat tevens door a_1. Hieruit volgt, dat het drievoudige punt, ontstaande door de bijeenvoeging der punten A en B, triplanaar is. De drie raakvlakken zijn δ en de beide vlakken met het raakvlak aan O_1^2 overeenkomende. Er zijn slechts vier rechte lijnen op O^4 overgebleven.

In den stand b vertoont zich nevens de planare drievoudige punten nog een kegelpunt; dit oppervlak stemt overeen met het geval B.

In den stand c komen er twee kegelpunten; zoodat dit oppervlak met het geval C overeenstemt.

Eindelijk heeft in den stand d het kegelpunt zich bij de beide samengevallen drievoudige punten gevoegd en een triplanaar punt gevormd, waarvan de drie raakvlakken tot twee zijn samengekomen, namelijk het vlak δ en het vlak α. Dit punt kan dan een triplanaar punt van de tweede soort heeten. Er gaan uit dit punt nog twee rechte lijnen, in het vlak α liggende.

Geval E.

58. Onderstellende, dat het oppervlakkenstelsel een vast punt D bevat, waardoor alle kegelvlakken gaan, kan men

k nu de voornaamste bijzondere standen van O_1^2 vast-
llen; zij zijn:

a. O_1^2 raakt het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt δ_1 in een punt van a_1.

Bij den stand *a* gaat het kegelpunt D over in een biplanaar punt van de eerste soort. Met de twee vlakken, waarin e raakkegel is overgegaan, komen overeen de beide vlakken oor D_1 en de beschrijvende lijnen van O_1^2, die in δ_1 liggen.

Bij den stand *b* vallen de beide drievoudige punten samen in een triplanaar punt van de eerste soort, terwijl het egelpunt behouden blijft.

Bij den stand *c* ontstaat een bijzonder geval van het ppervlak van STEINER; het geval namelijk, dat twee der uit het tripelpunt gaande lijnen samenvallen.

Geval F.

59. In dit geval ontstaat er geen nieuwe vorm. Daar het stelsel oppervlakken door een gemeenschappelijk vast punt gaat, komt met den top C_1 van den kegel O_1^2 slechts één kegelpunt C in R overeen. Het oppervlak O^4 heeft dus twee kegelpunten, D en C, en twee planare drievoudige punten A en B en stemt overeen met het geval C.

Geval G.

60. Laat vooreerst aangenomen worden, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is en kegel O_1^2 met den top C_1 een bijzonderen stand inneemt; dan zijn de voornaamste bijzondere standen de volgende:

a. O_1^2 ligt met den top C_1 op een der vlakken α_1 of β_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt het vlak α_1 of β_1.

d. O_1^2 raakt het vlak $D_1 a_1$.

In het geval *a* vereenigen zich de beide kegelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort, waaruit twee rechte lijnen getrokken kunnen worden, welke dit biplanare punt

verbinden met de beide drievoudige punten, welke planaar gebleven zijn.

In het geval *b* blijven de beide kegelpunten bestaan; maar de twee tripelpunten vereenigen zich tot een triplanaar punt van de eerste soort, welks raakvlakken, behalve uit δ, bestaan uit de twee vlakken, overeenstemmende met het raakvlak door a_1 aan O_1^2.

Het geval *c* geeft aanleiding tot een drievoudig punt, dat triplanaar is, maar waarvan de beide raakvlakken zijn samengevallen; dit geval onderscheidt zich van het geval D, stand *d*, door dat het raakvlak, volgens één enkele lijn, het oppervlak raakt, in plaats van het volgens twee lijnen te snijden; alzoo ontstaat geval *E*, stand *c*.

Eindelijk voldoet in den stand *d* het oppervlak aan de voorwaarde, dat elk punt van de dubbele knooplijn *a* een snavelpunt is. Hieruit volgt, dat de lijn *a* overgaat in een snavellijn. Behalve deze bevat O^4 nog een kegelpunt, dat overeenkomt met den top C_1 van O_1^2. Van dit kegelpunt gaat een rechte lijn naar het triplanare punt, overeenkomende met het raakpunt van O_1^2 met a_1. Van dit triplanare punt valt een der raakvlakken langs δ, het andere is $C\,a$. Het met C gekoppelde punt C' is in *a* komen te vallen.

Geval H.

61. Neemt men eindelijk aan, dat het stelsel een vast punt D bezit, en beschouwt men de bijzondere standen van kegel O_1^2, dan geraakt men tot de volgende standen:

a. De top C_1 van O_1^2 ligt op δ_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt δ_1.

d. O_1^2 raakt het vlak $D_1\,a_1$.

Na het voorgaande ziet men, dat het geval *a* aanleiding geeft tot een biplanaar punt van de tweede soort, en dus overeenstemt met geval G, stand *a*; bij den stand *c* keert geval E, stand *c*, weder; bij het geval *b* heeft men, even als bij geval G, stand *b*, twee kegelpunten en een triplanaar punt van de eerste soort; ten slotte komt bij den stand *d*

et oppervlak met een snavellijn en een kegelpunt weder rug.

VI. Algemeene opmerkingen.

62. Niettegenstaande de vele verkregen vormen en de uitgebreide onderverdeeling, waartoe dit onderwerp aanleiding heeft gegeven, is het in te zien, dat het aantal vormen van oppervlakken, dat men door vergelijking der ruimten R en R_1 verkrijgen kan, hiermede niet uitgeput is. Een korte aanwijzing van de aanvullingen, die te maken zijn, moge hier nog hare plaats vinden.

In de eerste plaats worde opgemerkt, dat men aan het beeldoppervlak ook zoodanigen bijzonderen stand kan geven, dat daarmede in R een regeloppervlak van de vierde orde overeenkomt. Een bijzondere stand, behoorende tot de eerste groep, kan hiervoor tot voorbeeld dienen.

Laat d^2 een werkelijke kegelsnede zijn en K^2 en $K_1{}^2$ regeloppervlakken van de tweede orde. Is nu l_1 een beschrijvende lijn van $K_1{}^2$, dan kan het beeldoppervlak $O_1{}^2$ zoodanig gesteld worden, dat het niet alleen een beschrijvende lijn bezit, samenvallende met l_1, maar dat deze beschrijvende lijn in drie punten van l_1 hetzelfde raakvlak voor de beide oppervlakken heeft, zoodat $O_1{}^2$ en $K_1{}^2$ elkander langs de geheele lijn l_1 raken. De beschrijvende lijnen van $O_1{}^2$, die tot het l_1 snijdende stelsel behooren, zijn dan allen raaklijnen aan $K_1{}^2$. Nu komen evenwel met raaklijnen aan $K_1{}^2$ in R overeen rechte lijnenparen, die d^2 snijden; met het oppervlak $O_1{}^2$ moet dus een regeloppervlak O^4 overeen komen, dat de kegelsnede d^2 tot dubbelkromme heeft. Daar met de lijn l_1 een beschrijvende lijn l van het kernoppervlak K^2 overeenkomt, en in de punten van l gedurig twee gekoppelde beschrijvende lijnen van O^4 elkaar ontmoeten, zoo is ook l een dubbellijn van O^4 en het regeloppervlak O^4 behoort tot die soort, die een kegelsnede, met een deze snijdende rechte lijn tot dubbelkromme heeft.

Op dezelfde wijze kan men ook bij de andere groepen typen van regeloppervlakken van de vierde orde terugvinden.

In de tweede plaats kan hier de opmerking herhaald worden, reeds door REYE gemaakt, dat men ook O_1^2 zoodanig stellen kan, dat O^4 in een oppervlak van de derde orde overgaat, tot de vierde orde aangevuld door het vlak δ. Daartoe moet O_1^2 door het punt D_1 gelegd worden (No. 5). Het ligt eveneens buiten het doel dezer verhandeling, hierop verder in te gaan; slechts volge hier de opmerking, dat men in dezen stand van O_1^2 een middel heeft, om de 27 rechte lijnen van het ontstaande oppervlak O^3 op te sporen.

Zooals bij No. 11 gebleken is, zijn er acht lijnen van O_1^2, die K_1^2 raken, waarmede zestien rechte lijnen op O^3 overeen komen. Maar als O_1^2 door D_1 gaat, zullen er ook kegelsneden op gelegen zijn, welke door D_1 gaan en K_1^2 dubbel raken, met welke dus rechte lijnen in R overeenkomen (No. 7 en No. 11). Zij kunnen geconstrueerd worden door weder de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 te construeeren en hieraan door D_1 raakvlakken te leggen. Er ontstaan alzoo acht raakvlakken en dus acht kegelsneden op O_1^2 gelegen, met welke acht rechte lijnen op O^3 overeenkomen. Buitendien gaan er nog twee rechte lijnen van O_1^2 door D_1, met welke in R overeenkomen twee rechte lijnen door D en de lijn, die hare snijpunten met δ verbindt. In het geheel zijn er dus $16 + 8 + 3 = 27$ rechte lijnen. Ook de ligging dezer lijnen ten opzichte van elkander is duidelijk te zien. De lijnen, met de acht kegelsneden op O_1^2 overeenkomende, snijden d^2 niet en moeten dus een punt gemeen hebben met de rechte lijn in δ gelegen; deze wordt nog buitendien gesneden door de beide lijnen overeenkomende met de lijnen van O_1^2, die door D_1 getrokken zijn; er zijn dus in het geheel tien lijnen, die de gemelde lijn in δ snijden zullen. Elk der acht kegelsneden op O_1^2 wordt door tien beschrijvende lijnen van O_1^2 gesneden, met welke op O^3 rechte lijnen overeenkomen, t. w. door de acht raaklijnen aan K_1^2 en de twee beschrijvende lijnen door D_1.

Zoo ziet men, dat ook de rechte lijnen van O^3, die hiermede overeenkomen, door tien andere rechte lijnen worden gesneden. Op deze wijze voortgaande kan men van elke rechte lijn uitmaken, door welk tiental andere zij gesneden wordt, en de ligging alzoo volkomen nagaan.

Insgelijks kan men door toepassing der gevonden beginselen tot kennis komen van de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid der rechte lijnen op O^3.

Eindelijk worde opgemerkt, dat men ook den stand van O^2 zoodanig regelen kan, dat er een cyclide mede overeen komt. Zooals reeds is opgemerkt, is d^2 alsdan de oneindig ver gelegen onbestaanbare cirkel; K^2 wordt de orthogonaalbol van het stelsel. Stelt men nu in dit stelsel $O_1{}^2$ zoodanig, dat O^4 vier dubbelpunten verkrijgt, daarbij zorgende, dat twee dezer dubbelpunten op d^2 komen te vallen, dan ontstaan de meer bijzondere cycliden, die het eerst een punt van studie o. a. bij Dupin en Maxwell hebben uitgemaakt.

63. Is alzoo aangegeven, welke bijzondere gevallen uit de hier behandelde vormen nog zouden kunnen worden afgeleid, tevens moet worden opgemerkt, dat er nog enkele vormen in de voorafgaande beschouwing gemist worden. Die oppervlakken namelijk, die tot dubbelkromme twee elkaar snijdende lijnen hebben, en waarbij of wel één dezer lijnen, of wel beide keerlijnen zijn, treden alleen op in verbinding met minstens een kegelpunt. Toch laat zich wel nagaan, dat, daar de dubbelkegelsnede keerkegelsnede worden kan, zonder dat een kegelpunt optreedt, dit ook met het oppervlak met twee dubbellijnen het geval moet zijn. De oppervlakken met keerlijnen evenwel ontstaan bij de hier gevolgde methode uit kegelvlakken en zullen dus een kegelpunt moeten bezitten. Bij vergelijking der door Segre behandelde vormen zal men zien, dat dit juist de ontbrekende zijn.

De reden hiervan is gelegen in het feit, dat deze oppervlakken ook kunnen teruggebracht worden tot een andere rubriek, de rubriek namelijk der oppervlakken van de vierde orde met een dubbellijn. Deze vormen evenwel

een geheel bijzondere afdeeling, welker behandeling tot een volgenden arbeid blijft voorbehouden. Ook de regeloppervlakken met twee elkander kruisende dubbellijnen zoude men volgens de behandelde methoden niet kunnen verkrijgen.

Tevens zijn hierbij aangewezen de beide richtingen, waarin zich de studie verder kan voortbewegen; de richting, die uit de algemeene constructiën, in het voorgaande behandeld, bijzondere gevolgen doet afleiden; en de richting waarbij men zich voorstelt dezelfde methode ook op andere oppervlakken en op het vinden van andere algemeene eigenschappen toe te passen.

Tilburg, Juni 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 25 October 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, VAN DIESEN, ZEEMAN, SCHOLS, BAEHR, KAPTEIJN, MOLL, WEBER, SURINGAR, HOEK, BIERENS DE HAAN, GRINWIS, PEKELHARING, MULDER, KOSTER, FRANCHIMONT, FORSTER, VAN RIEMSDIJK, MAC GILLAVRY, KORTEWEG, STOKVIS, ZAAIJER, PLACE, BEHRENS, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ENGELMANN, VAN BEMMELEN, MARTIN, MICHAËLIS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. DE BUSSY, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 13 October 1890; 2°. A. LANCASTER, Bibliothecaris van het Observatoire royal te Brussel, 1890; 3°. den Ministre de l'Instruction publique et des beaux-Arts te Parijs, 3 October 1890; 4°. L. DELISLE, Directeur van de Bibliothèque nationale te Parijs, 16 October 1890; 5°. CH. SCHEFER, Socretaris van de Ecole spéciale des langues orientales vivantes te Parijs, 10 October 1890; 6°. den Secretaris van de Société Académique Indo-Chinoise te Parijs,

11 October 1890; 7°. den Bibliothecaris van het Muséum d'Histoire naturelle te Parijs, 23 October 1890; 8°. T. J. Stieltjes jr., te Toulouse, 5 October 1890; 9°. den Secretaris van de Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 12 October 1890; 10°. A. Durieux, Secretaris van de Société d'Emulation te Cambrai, 5 October 1890; 11°. den Secretaris van de Académie nationale de Savoie te Chambéry, 9 October 1890; 12°. W. H. Wesley, Bibliothecaris van de royal astronomical Society te Londen, 30 September 1890; 13°. R. Copeland, Bibliothecaris van de royal Observatory te Edinburg, 19 Augustus 1890; 14°. J. B. Balfour, Secretaris van de royal botanical Society te Edinburg, 9 October 1890; 15°. M. Stenta, Bibliothecaris van de Societá Adriatica di Scienze naturali te Triëst, 5 October 1890; 16°. von Wieser, Directeur van het Tiroler Ferdinandeum te Innsbrück, 22 Augustus 1890; 17°. Mommsen, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 29 September 1890; 18°. A. Gruber, Secretaris van de Naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B., 29 September 1890; 19°. W. Blasius, Voorzitter van het Verein für Naturwissenschaft te Brunswijk, 30 September 1890; 20°. Laubmann, Directeur van de kön. Hof- und Staatsbibliothek te München, 1 October 1890; 21°. C. F. W. Peters, Directeur van de kön. Universitäts-Sternwarte te Koningsbergen, 7 October 1890; 22°. J. von Sachs, te Würzburg, 18 October 1890; 23°. A. Rilliet, Secretaris van de Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 1890; 24°. E. Betti, Directeur van de real Scuola normale superiore te Pisa, 29 September 1890; 25°. J. Gonzalez, Secretaris van de real Academia de la Historia te Madrid, 6 October 1890; 26°. S. Muller, Secretaris van de Société royale des Antiquaires du Nord te Kopenhagen, 1890; 27°. F. Malmberg, Directeur van het Nautisk-meteorologiska Byran te Stockholm, 29 September 1890; 28°. R. Thalen, Bibliothecaris van de Société royale des Sciences te Upsala, 4 Juni 1890; 29°. A. Pavlow, Secretaris van de Société impériale des Naturalistes te Moscou, 22 September 1890; 30°. Bonola, Secretaris van de Société Khédiviale de Géo-

graphie te Caïro, 19 September 1890; 31°. W. H. Browne, Bibliothecaris van John Hopkins University te Baltimore, 9 October 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 30 September 1890; 2°. Curtius, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, Juli 1890; 3°. G. Limpricht, Bibliothecaris van de Schlesisshe Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 30 Juli 1890; 4°. den Secretaris van het historischer Verein für Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 1 Juni 1890; 5°. H. Hildebrand, Secretaris van de kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien te Stockholm, 24 September 1890; 6°. R. Thalen, Secretaris van de Société royale des Sciences te Upsala, Juni 1890; 7°. Th. Lincoln Caley, Directeur van het Office of Engineers, U. S. Army te Washington, 21 Juni 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren J. A. C. Oudemans, Schoute en A. C. Oudemans jr., dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2° eene missive van den Heer C. J. van Schelle (Zuid-Flores, 14 Augustus 1890), waarin hij zijn dank betuigt voor zijne benoeming tot Correspondent;

3°. een brief van den Heer Schoute, ter begeleiding van eene verhandeling van den Hoogleeraar Dr. F. de Boer: »Toepassing van de methode Darbaux op de differentiaalvergelijking $s = f(r\ t)$", waarvoor eene plaats verzocht wordt in de werken der Akademie. — De Heeren Bierens de Haan en Grinwis verklaren zich, op het verzoek des Voorzitters, bereid, daarover verslag uit te brengen in de Novembervergadering.

— De Heeren Behrens en Martin brengen een gunstig

verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. VAN CAPPELLE. Zij stellen voor, haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen, doch den schrijver eerst nog in de gelegenheid te stellen, daarin eenige bekortingen in te voeren.

— De Heeren SURINGAR, MARTIN, WEBER en PEKELHARING brengen advies uit in zake de missive van den Minister van Binnenlendsche Zaken van 20 September 1890, waarin het gevoelen der Akademie gevraagd wordt over een advies van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië, inhoudende een verzoek om subsidie voor wetenschappelijke natuurkundige onderzoekingen in die gewesten. Aan de missive des Ministers waren toegevoegd: een gunstig advies omtrent die aanvrage van den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid, en een brief van den Minister van Koloniën, ter toelichting van de wijze, waarop het natuurwetenschappelijk onderzoek van den Indischen Archipel tegenwoordig plaats heeft.

De Commissie stelt voor, warme adhaesie te betuigen omtrent het verzoek aan den Minister van Binnenlandsche Zaken gericht door het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Zij steunt de argumenten, door den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid voor eene gunstige beschikking aangevoerd, en voegt daaraan eenige ter zake dienende beschouwingen toe; zij betoogt dat eene samenwerking van de beide Departementen van Koloniën en Binnenlandsche Zaken, zooals nu ten aanzien van het ondersteunen van wetenschappelijk onderzoek in Nederlandsch-Indië wordt voorgesteld, zeer gewenscht is; oppert den wensch, dat West-Indië niet in beginsel van het natuurkundig onderzoek worde uitgesloten, doch dat de Minister zijne bescherming aan onze Koloniën in haar geheel moge verleenen, en eindigt met de verklaring, dat de Akademie niet anders dan gevoelig kan zijn voor het bewijs van vertrouwen, haar geschonken in het voorstel, dat de subsidie, die gevraagd wordt, niet zal worden toegekend dan aan personen, die de onderscheiding ten volle

waard zijn en omtrent welke advies is ingewonnen bij de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Daar het uitgebrachte rapport geene aanleiding geeft tot discussie, stelt de Voorzitter voor, het bestuur der Letterkundige Afdeeling daarmeê in kennis te stellen, daar in de bijlage, door den Minister van Koloniën ingezonden, eene zinsnede over anthropologisch-ethnographische onderzoekingen voorkomt.

Aldus wordt besloten.

— De Heer VAN DIESEN doet, met herinnering aan zijne mededeeling van 27 Januari 1872, over den toestand van de Maas langs Noordbrabant bij hoogen waterstand, het thans in volle uitvoering zijnde plan zien van verlegging van de uitmonding der Maas van Woudrichem naar den Amer, waardoor die toestand zal worden verbeterd.

Bij het schetsen der hoofdtrekken van dat plan treedt hij tevens in eene vergelijking met het onderwerp van den generaal KRAYENHOFF, die het eerst, in 1822, het denkbeeld opperde van eene scheiding van Waal en Maas, welk denkbeeld thans op meer volledige wijze zal worden verwezenlijkt dan toen werd beoogd.

Een paar opmerkingen van de Heeren PLACE, MICHAËLIS en VAN DE SANDE BAKHUYZEN worden door den spreker beantwoord.

— De Heer MULDER biedt voor de Verslagen en Mededeelingen een opstel aan, getiteld: »Over de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride".

— De Heer FRANCHIMONT biedt voor de boekerij der Akademie aan de dissertatie van den Heer E. A. KLOBBIE, getiteld: *De werking van salpeterigzuur op stikstofhoudende lichamen*, en licht die met eenige woorden toe.

De Heer KLOBBIE beschouwt de werking van salpeterigznur op waterstofverbindingen in 't algemeen als te beginnen met additie van een waterstofatoom aan de dubbel gebonden

zuurstof van het salpeterigzuur, waarna op de eene of andere wijze vorming van water kan plaats vinden.

Uit een overzicht van hetgeen er bekend is omtrent de werking van salpeterigzuur op stikstofverbindingen, die waterstof aan de stikstof gebonden bevatten, blijkt het, dat die waterstof onder zekere omstandigheden met salpeterigzuur in werking kan treden, dat de grootere of geringere gemakkelijkheid, waarmede zij dit doet, althans voor een gedeelte, afhangt van de atoomgroepen, die tegelijk met haar aan de stikstof gebonden zijn, en eindelijk, dat soms door die atoomgroepen de bedoelde werking zelfs belet kan worden.

Zijn eigen onderzoekingen betreffen de urethanen en hunne derivaten. De urethanen zelve worden door salpeterigzuur ontleed onder ontwikkeling van stikstof en koolzuurgas. Uit de mono-alkylurethanen verkreeg hij nitrosoderivaten; acetylurethaan gaf weer stikstof en koolzuurgas, terwijl carboxymethylurethaan niet werd aangegrepen. Dimethylurethaan en merkwaardigerwijze ook methylacetylurethaan bleven onveranderd.

Op onaangename wijze maakte hij kennis met de werking der nitroso-alkylurethanen op het menschelijk organisme.

Ammoniak werkt op deze nitrosoverbindingen niet dan tenzij er water aanwezig is. Hierbij ontstaat wel urethaan, maar in de plaats van het verwachte nitrosamine of zijne verbinding met ammoniak, treden slechts de ontledingsproducten — stikstof en alcohol — op. Hetzelfde geldt voor de werking van aminen en voor die van alkaliën of basen. Door sterke zuren worden zij ontleed op de wijze zooals bij nitrosaminen plaats heeft. Bij de reductie ontstaan, behalve de hydrazinen, welke niet afgezonderd konden worden, in kleine hoeveelheid, tetrazoverbindingen, welke eveneens uit de hydrazinen door broomwater gevormd konden worden.

Tot de gevolgtrekkingen, die hij uit zijne resultaten maakt, behooren deze: 1° dat aan waterstof, die met stikstof verbonden is, het vermogen om met salpeterigzuur in werking te treden, ontnomen kan worden door de nabijheid van twee sterk negatieve groepen, zooals carboxymethyl; 2° dat de groep NO en een H-atoom niet tegelijk aan een

N-atoom gebonden kunnen zijn, evenmin als dit bij de koolstof het geval schijnt te wezen.

— De Heer VAN RIEMSDIJK biedt, uit naam van Dr. J. LORIÉ voor dezelfde boekerij aan een exemplaar van diens: »Contributions à la géologie des Pays-Bas; IV. Les deux derniers forages d'Amsterdam".

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN **Dr. H. VAN CAPPELLE:**

GEOLOGISCHE RESULTATEN VAN EENIGE IN WEST-DRENTHE EN IN HET OOSTELIJK DEEL VAN OVERIJSSEL VERRICHTE GRONDBORINGEN.

EENE BIJDRAGE

TOT DE KENNIS DER ONTWIKKELINGSGESCHIEDENIS VAN HET NEDERLANDSCH DILUVIUM.

(Voorgedragen in de Vergadering van 25 October 1890).

De tweeledige titel is in overeenstemming met de splitsing van den inhoud der verhandeling. Het eerste gedeelte is van tabellarisch-beschrijvenden aard. Het geeft vrij uitvoerig de beschrijving van grondmonsters, verzameld bij gelegenheid van boringen, die de waterverzorging van Meppel en Almelo tot doel hadden. Zeven boringen werden aan den *Bisschopsberg* bij *Meppel* uitgevoerd, negen ten Westen en ten Oosten van Almelo en vijf te Ootmarssum. Ofschoon geene dezer boringen dieper dan 29 meters is doorgedrongen, zijn zij toch voor de geologie van Nederland belangrijk, omdat de boorpunten aan weerszijden en op geringen afstand van de grenslijn tusschen het Skandinaafsch en het gemengd diluvium gelegen zijn.

In de tweede, redeneerende, helft zijner verhandeling heeft de schrijver getracht, van deze ligging der boorpunten partij te trekken om de vraag te beantwoorden, of ook in Nederland, evenals in Noord-Duitschland, twee ijstijden kunnen aangetoond worden, gescheiden door eene interglaciale periode. Hij vond in de boorprofielen de bekende onderaf-

elingen van het Nederlandsch diluvium terug: het praelaciale, het gelaagde en niet gelaagde glaciale en het postglaciale diluvium, echter van zeer ongelijke dikte en op zeer verschillende hoogten gelegen. Hij meent de heuvelachtigheid van het diluvium aan opheffingen van daaronder liggende tertiaire gronden te moeten toeschrijven, verder dan aan dislocatie van rivierbezinkselen uit lateren tijd afkomstig.

Te Ootmarssum vond hij in de onderste lagen veel glauconiet, hetgeen volgens hem door de Vecht uit de krijtformatie in Westfalen moet aangevoerd zijn. Reeds in de onderste lagen van het glaciale diluvium worden de Westfaalsche gesteenten door meer zuidelijke, Rijnsche, verdrongen, die in de hooger gelegene wederom voor zand en grint van Noordsche gesteenten plaats maken. Deze opvolging van gesteenten werd nu in een der boorgaten te Meppel *tweemaal* aangetroffen, en daartusschen een laagje *veen* met overblijfselen van riet en grassen. De Heer VAN CAPPELLE meent dezelfde tweemalige afwisseling van Skandinaafsche en zuidelijke gesteenten ook in de profielen der diepe boring in de boterfabriek te Sneek te herkennen, en ziet daarin het bewijs eener uitgebreide oscillatie van het ijs, met andere woorden voor de veronderstelling eener interglaciale periode, gedurende welk tijdvak de Rijn en de Vecht de heerschappij boven de gletscherbeken zouden herkregen hebben.

Overigens stelt de Heer VAN CAPPELLE zich voor, dat onder het inkrimpen der ijsmassa's de gletscherbeken de moraines veelvuldig doorgroefd en gesloopt hebben, zoodat slechts stukken van grondmoraines overgebleven zijn, als bijv. de Bisschopsberg bij Meppel en het Mirdumerklif in Friesland. Voorts, dat om dienzelfden tijd de rivieren, tot den voormaligen loop terugkeerende, in de meer zuidelijke streken van Nederland dit werk gingen voortzetten, waarbij een gemengd en tevens gelaagd diluvium gevormd werd, terwijl in het Noorden vorming van gelaagd Skandinaafsch diluvium plaats had.

De Commissie is van oordeel, dat de verhandeling van den Heer VAN CAPPELLE niet zonder belang is als eene bijdrage tot de kennis der geologische gesteldheid van Nederland. Hoewel wat al te uitvoerig, en te veel met hypothesen werkende, waarvan soms de eene op de andere steunt, mag zij toch voor publikatie aanbevolen worden. Met het oog op meerdere overzichtelijkheid zou het overweging verdienen, de lijsten, bij de boorprofielen behoorende, achteraan te plaatsen en voor de beschouwingen eene meer beknopte, ineengedrongen redactie te zoeken.

TH. H. BEHRENS.
K. MARTIN.

RAPPORT

AAN DE

VIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

(Voorgedragen in de Vergadering van 25 October 1890).

De ondergeteekenden, in dato 30 Sept. ll. uitgenoodigd om rapport uit te brengen aangaande eene in hunne handen gestelde Missieve van Z. Excell. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 20 Sept. 1890 N°. 2074, Afdeeling K. W. met drie hiernevens teruggaande bijlagen, en betreffende natuurkundige onderzoekingen in Ned. Indië, hebben de eer, der Afdeeling het volgende in overweging te geven: allereerst, wat de hoofdzaak betreft, in haar antwoord aan Z. Excell. den Minister van Binnenlandsche Zaken warme adhaesie te betuigen aan het verzoek van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Ned. Indië, in dato 31 Maart 1890 van uit Batavia tot Z. E. gericht, en uitvoerig toegelicht en ondersteund door den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid, in zijne missieve van 23 Juni 1890 N°. 5921 aan Zijne Excellentie den Gouverneur-Generaal van Nederlandsch-Indië.

Het verzoek heeft de strekking, dat jaarlijks op de Begrooting van Binnenlandsche Zaken eene bepaalde som worde gebracht ter subsidiëering van wetenschappelijke reizen naar Nederlandsch-Indië, onder bepaling dat het subsidie niet zal worden toegekend dan na inwinning van het advies der Koninklijke Academie van Wetenschappen, als waarborg

voor de toekenning daarvan aan personen, die deze onderscheiding ten volle waardig zijn.

Uwe commissie zou een overbodig werk verrichten, wanneer zij in eene herhaling trad van de argumenten, waarmede het subsidiëeren van wetenschappelijke onderzoekingsreizen naar Ned. Indië, ook door Binnenlandsche Zaken, in de aangehaalde brieven op zoo uitstekende wijze wordt aanbevolen.

Het zij haar veroorloofd, alleen de hoofdpunten hier aan te stippen. Zij betreffen:

1⁰ de eer van Nederland, die met het grondig wetenschappelijk onderzoek zijner koloniën door Nederlanders, gemoeid is.

Dit argument zou alleen reeds voldoende zijn om elke ondersteuning van staatswege met ingenomenheid te begroeten.

2⁰ wordt een goede invloed verwacht op het universitaire onderwijs, wanneer Hoogleeraren van Nederlandsche Universiteiten in staat gesteld worden, de schatten der tropische natuur door eigen aanschouwing te leeren kennen.

Wij stemmen dit van ganscher harte toe, en meenen bovendien, dat, wanneer eens vaststaat, dat dergelijke onderzoekingen van staatswege worden op prijs gesteld en gesteund, dit een krachtige aansporing zijn zal voor de aankomende natuuronderzoekers van Nederland, om in dezelfde richting werkzaam te zijn, en het voorbeeld van hunne voorgangers te volgen.

3⁰ wordt gewezen op de voordeelen, die de wetenschappelijke kennis der koloniën voor de exploitatie harer natuurschatten moet opleveren, al zijn die voordeelen doorgaans niet van te voren bepaaldelijk aan te wijzen. De Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid wijst hierop, naar aanleiding van aanmerkingen op dit punt, het vorig jaar in de tweede kamer der Staten-generaal te berde gebracht.

Uwe commissie meende, dat thans wel algemeen erkend was, dat de wetenschap steeds vruchten draagt voor de maatschappij, en meer en rijker vruchten, naarmate men haar meer den vrijen loop laat, en niet naar de bepaalde voordeelen vraagt, die van elk onderzoek in het bizonder te wachten zijn.

Voor zoover het echter noodig mocht wezen, hieromtrent 'g argumenten aan te voeren, stelt uwe commissie voor, 'n afdruk van eene redevoering van een harer leden over leggen, waarin (p. 1—25) dit thema voor de botanie ehandeld en met voorbeelden toegelicht is, terwijl uit den ırd der zaak ook lichtelijk dergelijke voorbeelden uit andere ıkken van natuuronderzoek zouden kunnen worden aanehaald.

4° De aanvraag van een subsidie aan Binnenlandsche 'aken, terwijl reeds een subsidie van wege Koloniën bestaat, ıeeft aanleiding gegeven, dat in de reeds aangehaalde brie-'en eensdeels de belangen van Nederland, anderendeels de belangen van de koloniën, bij natuurwetenschappelijk onderzoek van deze, zijn in het licht gesteld. Die scheiding is slechts van administratieven aard, en aan de Kon. Academie van Wetenschappen, als wetenschappelijk lichaam, moet het op zich zelf geheel onverschillig zijn, of de gelden tot ondersteuning van wetenschappelijke onderzoekingen door het Departement van Koloniën, of door dat van Binnenlandsche Zaken, of door beide worden vestrekt, wanneer het gezamenlijk bedrag maar voldoende is om aan billijke verlangens te gemoet te komen.

Toch acht Uwe Commissie het van belang, er op te wijzen, dat die zuiver administratieve scheiding wel eens eene breede opvatting in den weg schijnt te staan.

Allicht wordt gezegd, dat b.v. eene verrijking onzer Musea met voorwerpen uit de koloniën een belang is van het moederland; terwijl toch die verrijking op zich zelve niets beteekent, wanneer zij niet strekt tot bevestiging, verspreiding en vermeerdering van onze kennis betreffende de koloniën. Ook de omvang en de richting van het universitair onderwijs in Nederland is voor onze koloniën geenszins onverschillig. Omgekeerd zijn de belangen der kolonie tevens die van het moederland. Beide, moederland en kolonie, staan niet tegenover, of als vreemden naast elkander, maar zijn nauw aaneengesloten deelen van eenzelfde geheel.

Eene samenwerking van de beide Departementen van

Koloniën en Binnenlandsche Zaken, gelijk nu ten aanzien van het ondersteunen van wetenschappelijk onderzoek in Ned. Indië wordt voorgesteld, komt ons voor, ook ten opzichte van het veldwinnen en bevestigen dier opvatting, niet van gewicht ontbloot te zijn.

5⁰ Waarschijnlijk geheel onwillekeurig, is in het voorstel alleen aan wetenschappelijke reizen naar Nederlandsch-Oost-Indië gedacht, en, voorzoover subsidiën uit de koloniale begrooting worden verleend, is dit zeker ook niet anders mogelijk. Toch heeft West-Indië de hulp van wetenschappelijk onderzoek van uit het moederland ongetwijfeld niet minder noodig, en verdient dit gedeelte onzer koloniën niet minder belangstelling.

Nu er sprake is van een subsidie, van wege het Departement van Binnenlandsche Zaken te verstrekken, stelt Uwe Commissie voor, aan Z. E. den Minister in bedenking te geven, hierbij onze koloniën in haar geheel te gedenken en dus West-Indië niet in beginsel uit te sluiten.

6⁰ Wat eindelijk het voorstel betreft, om, als waarborg voor de toekenning van subsidie aan personen die deze onderscheiding ten volle waardig zijn, tot de toekenning niet te besluiten dan na inwinning van het advies der Kon. Academie v. Wetenschappen, zoo kan de Academie, onzes inziens, niet anders dan gevoelig zijn voor dit bewijs van vertrouwen en stellen wij voor, aan Z. Excell. den Minister te berichten, dat zij tot het geven van zoodanig advies, des verlangd, gaarne bereid zal zijn.

Over de wijze, waarop zoodanig advies alsdan het best zal kunnen worden voorbereid, zal o. i. gevoegelijk kunnen worden beraadslaagd, wanneer het subsidie toegekend zal zijn, en wij hieromtrent nader bericht van Z. Excell. den Minister zullen hebben ontvangen.

Leiden, *Amsterdam*, *Utrecht*.
25 October 1890.

W. F. R. SURINGAR.
K. MARTIN.
MAX WEBER.
C. A. PEKELHARING.

VERLEGGING

VAN DE

UITMONDING DER MAAS, VAN WOUDRICHEM NAAR DEN AMER.

DOOR

G. VAN DIESEN.

In de mededeeling, die ik den 27sten Januari 1872 deed over den toestand van de Maas langs Noord-Brabant bij hoogen waterstand (*Versl. en Meded.*, 2de Reeks, Deel VI), vestigde ik de aandacht der Vergadering op de stoornis, die de geregelde loop der rivier ondervond door het werken der drie overlaten: de zoogenaaamde Beerssche Maas, den overlaat van Heerewaarden en den Bokhovenschen overlaat. Ik deed de wenschelijkheid uitkomen van eene sluiting dier drie overlaten en gaf mijne verwachting te kennen, dat de *Maas* door verruiming van haar winterbed en met eenige verzwaring harer dijken zou zijn in te richten tot het doorlaten van al het water, dat bij de hoogste standen, mits van haar alleen, kwam afstroomen.

Meer dan hetgeen ik voor 18 jaar als wenschelijk voorstelde is thans in volle uitvoering; dank hebbe de volharding van den toenmaligen hoofdingenieur, later inspecteur van den waterstaat H. S. J. Rose en van den Minister Jhr. G. J. G. Klerck, beiden overleden spoedig na den aanvang van het werk.

Bij de wet van 26 Januari 1883 werd besloten tot verwezenlijking van het denkbeeld eener volledige scheiding

van Maas en Waal; het eerst ontwikkeld in 1823 door den luitenant-generaal Baron KRAYENHOFF, onder meer lid van de 1ste Klasse van het Kon. Ned. Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten. (*Proeve van een ontwerp tot scheiding der rivieren de Whaal en de Boven Maas*, uitgegeven te Nijmegen bij de Wed. J. C. VIEWEG en ZOON. 1823).

De volledige scheiding der Maas van de Waal is veel meer dienstig voor den afvoer van hoog opperwater en ijs langs beide rivieren dan wanneer men zich bepaalde bij de sluiting der drie overlaten met verruiming van de uiterwaarden en verzwaring der dijken. Te Woudrichem, waar dan al het Maaswater, dat tot 2700 M^3 per secunde stijgen kan, zich op de Merwede zou storten, zou dan eene, voor den afvoer van de Waal nadeelige, verhoogde waterstand veroorzaakt worden.

Thans zal, na voltooiing der scheiding, de Waal aldaar eene verlaging in den waterstand aantreffen, die aan het gemis van afvoer over den overlaat van Heerewaarden ten goede zal komen.

Het steilere verhang zal den stroom op de Waal doen versnellen en dus den afvoer van water en ijs bevorderen.

De Maas zal bij hare nieuwe uitmonding aan het Keizersveer een waterstand aantreffen, die, volgens de gemiddelde jaarlijksche standen van 1871 tot 1880, 2.38 M. lager zal zijn dan te Woudrichem.

Ofschoon het hoofddenkbeeld van den Generaal KRAYENHOFF wordt gevolgd, zal het werk, dat nu in uitvoering is, toch in menig opzicht daarvan afwijken.

1°. De overlaat van Heerewaarden zou volgens zijn ontwerp nog tot ontlasting van de Waal bij hoogen waterstand blijven dienen.

Die overlaat zou daartoe over zekere lengte niet hooger dan tot 4.96 boven A.P., te St. Andries, worden opgehoogd; welke hoogte, volgens waarnemingen van dien tijd, zou overeenkomen met den waterstand op de rivier, waarbij de overlaat van den Ouden Rijnmond, bij Lobith, op het punt stond van te gaan werken.

Het nadeel van zijdelingsche afleidingen is in den loop an deze eeuw in Nederland meer en meer ingezien, en reeft aanleiding gegeven tot de bepaling, die bij amendement in de wet is gebracht, dat met de verlegging van len Maasmond een volkomen afsluiting van den aanvoer van Waalwater ook bij hoogen stand van deze rivier moet gepaard gaan. Naarmate het werk der verlegging vordert, wordt de overlaat van Heerewaarden opgehoogd, om eindelijk tot bandijkshoogte te worden afgesloten.

Met November van dit jaar zal eene hoogte van 7.50 boven A.P. te St. Andries, opklimmende met het verhang der rivier, worden bereikt.

2°. Volgens beide plannen vangt de verlegging aan bij Hedikhuizen. KRAYENHOFF richtte het nieuwe rivierbed vandaar ten zuiden van Heusden, tusschen die stad en het dorp Oud Heusden, door den Elshoutschen dijk naar het kasteel van Ganzoijen, om verder het Oud-Maasje, dat nog den vroegeren loop der rivier aanwijst, tot beneden toe te volgen. Bij het thans in uitvoering zijnde werk zal de Maas niet ten zuiden maar ten noorden langs de wallen van Heusden loopen, en voorts wel het stroomgebied van het Oude Maasje volgen, maar niet al zijn kronkelingen. Met ruime bochten zal de nieuwe rivier genoemd riviertje eerst rechts en vervolgens links laten liggen om er zich eerst bij het Keizersveer in den grooten weg tusschen Breda en Gorinchem mede te vereenigen. De vereeniging moet in dezen zin worden opgevat dat, gerekend van het Keizersveer, de weg van het Oude Maasje wordt gevolgd; want in het plan ligt: het Oude Maasje boven dat veer af te dammen en door een schutsluis voor de scheepvaart toegankelijk te maken.

Beneden het Keizersveer wordt de oude weg verruimd en verbreed, en ook de Amer tot bij Lage Zwaluwe door verdieping en normaliseering, met de noodige afdamming van de ten noorden gelegen killen van het Bergsche veld, tot bed voor de nieuwe rivier gereed gemaakt.

3°. Het gedeelte van de Maas van Hedikhuizen tot Woudrichem, dat door de verlegging moest onttrokken worden aan de doorstrooming van Maaswater, en waarin ook geen

toestrooming van Waalwater door den mond bij Woudrichem meer kon worden toegelaten, wilde men eene volledige scheiding van Waal en Maas tot stand brengen, moest worden afgedamd.

KRAYENHOFF wilde dat doen door twee dammen: een aan het boven- en een aan het benedeneind, voorzien van schutsluizen, en dus het riviervak in een kanaal herscheppen, lang, volgens zijn opgaaf, 18.84 kilom., dat uit de Waal gevoed zou moeten worden.

Volgens het tegenwoordige plan blijft het riviervak nabij het boveneind open, wordt het nabij den benedenmond afgedamd en wordt daar eene schutsluis gebouwd. Het afsluiten aan beide einden zou het voordeel opleveren van een standvastigen waterstand en van afwending van hoogen waterstand, zij deze ook lager dan tot nu toe, van de dijken, die daardoor nog minder aan onderhoud en aan verdediging zouden kosten, dan volgens het tegenwoordig plan reeds het geval zal zijn. Tegenover deze voordeelen levert het gekozen plan dat van minder tijdverlies van doorschutten; hetgeen vooral voor de stoomvaart een belang is, waarmede in den tijd van KRAYENHOFF's ontwerp geen rekening behoefde te worden gehouden. Het nadeel van den op- en neergang van het water, en van stroom verbonden aan het plan, dat nu in uitvoering is, wordt opgewogen door de aanslibbing van de uiterwaarden bij hooge waterstanden, waarop door de eigenaren hooge prijs wordt gesteld, en door krachtige waterloozing door de sluizen van de Bommelerwaarden, tijdens lage ebben.

4°. Van groot belang was de bepaling der breedte, die aan het zomerbed en aan het winterbed van de rivier moest worden gegeven.

Aan het zomerbed moest volgens het ontwerp van KRAYENHOFF eene breedte worden gegeven van 145 M. aan het boveneind der nieuwe rivier, bij het Heleind, en eene van 165 M. bij het Keizersveer, zijnde eene verwijding van 20 M. over eene lengte, bedragende volgens zijn opgaaf 21510 M.

Van normaliseering van den Amer is in het ontwerp van KRAYENHOFF geen sprake, evenmin als van eene breedte, die voor den afvoer van hoog opperwater noodig kon zijn: voor het zoogenaamd winterbed. Beneden de Waspiksche

aart zou, volgens hem, de bestaande bedijking met eene verhooging en verbetering misschien kunnen behouden blijven. Hiermede zal hij waarschijnlijk bedoeld hebben de zomerdijken, die aan genoemd vak langs het Oude Maasje, volgens de kaart bij zijn werk gevoegd, op 200 tot 300 M. onderlingen afstand, het water uit den buitenpolder keerden.

Zoo ver eene rivier buiten den invloed is van de getijden in zee, is het niet moeielijk de afmetingen te berekenen, die zij voor haar bed behoeft, om bij lagen stand een geschikte vaargeul voor de scheepvaart op te leveren en bij hoogen stand al het water door te laten, dat haar uit haar stroomgebied wordt toegevoerd, zoo men slechts de hoeveelheid kent, die bij de hooge en bij de lage standen moet worden doorgelaten. Krayenhoff deelt slechts de uitkomst mede van waarnemingen, die hij ten aanzien van geringen afvoer gedaan heeft, en geeft dus alleen de breedte op, die hij voor het zomerbed noodig acht.

Zooals boven werd medegedeeld, vermeerdert die breedte bij het ontwerp van Krayenhoff met ongeveer 1 meter voor iederen kilometer.

Vermeerdering van breedte heeft op een rivier, die geen toevoer verkrijgt door zijrivieren en geen bijzondere vermindering van verhang ondervindt, geen reden van bestaan. Bij geringen afvoer blijft het water tusschen de evenwijdige wanden van het zomerbed met dezelfde snelheid afstroomen; het hoogt opperwater stroomt over de oevers en kan eveneens besloten blijven tusschen hooge terreinen of dijken, die, onder de bovengenoemde omstandigheden, benedenwaarts geen vermeerdering van breedte voor afstrooming behoeven aan te bieden. De aangenomen normale breedte van den Rijn neemt van Coblentz tot aan onze grens, d. i. over 271 kilom. toe van 320 tot 360 M. en dus met nog geen 0.15 M. per kilom.

Bij het afdalen van den stroom in het gebied van de zee, wordt het verhang al flauwer en flauwer, om geleidelijk in den horizontalen waterspiegel uit te loopen. Blijft men dan de rivier tusschen weinig of niet verwijdende oeverlijnen afvoeren, dan moet het gemis aan snelheid worden vergoed

door grooter profiel, dat eensdeels door verheffing van den waterspiegel en anderdeels in verband met dit laatste, door verhooging van oevers of bedijking moet gevonden worden.

KRAYENHOFF ging bij zijn ontwerp van dit stelsel uit; blijkbaar met het oog op het belang van de scheepvaart, die op de Maas bovenwaarts belemmering zou ondervinden van de verlaging van den waterstand, zoo lang de bodem niet was uitgeschuurd door de werking van het steiler geworden verhang. Hij bracht dus geene verwijding van eenige beteekenis in het bed voor de nieuwe rivier.

Bij de uitwerking van het tegenwoordige plan werd die moeielijkheid wel gevoeld, maar deed zich eene andere voor van tegenovergestelden aard, namelijk de vrees door landeigenaars geuit, dat de uitwatering op de nieuwe rivier een hoogeren waterstand zou aantreffen dan tot nog toe op het Oude Maasje en den Amer werd gevonden. Om aan die vrees te gemoet te komen, moesten de oevers zeewaarts zich van elkander verwijderen, ten einde den waterstand in de rivier te verlagen, zonder daartoe uitschuring af te wachten.

Ter bevrediging van de beide tegenstrijdige belangen heeft men bij het boveneind van de nieuwe rivier, waarop meest voor de scheepvaart moest worden gezorgd, op het zomerbed de minste verwijding toegepast en deze benedenwaarts geleidelijk toenemende ontworpen.

Over de bovenste 11000 M. lengte wordt overgegaan van de breedte van 160 M. in die van 200 M. (bij Drongelen); over de volgende 10,800 M. van 200 M. in 250 M. (bij Keizersveer) en over de laatste 3200 M. van 250 in 300 M.

Met de 85 M. grootere wijdte dan KRAYENHOFF bij het Keizersveer wilde geven aan den nieuwen mond, wordt een voor de uitwatering niet nadeelige waterstand verwacht.

De afstand, waarop de dijken worden aangelegd, die het winterbed zullen begrenzen, zal eveneens grooter zijn dan die welke KRAYENHOFF vermoedelijk dacht aan te nemen, bij het gemis aan gegevens omtrent den grootsten afvoer van de Maas.

Aannemende een afvoer van 2700 M_3. per secunde als

:n grootsten, die verwacht kan worden, is voor den onder-
ngen afstand der dijken, dus voor de breedte van het
interbed, 500 M. bepaald.

De afvoer van 2700 M³. is door den hoofdingenieur
SCHNEBBELIE, die aan het hoofd staat der uitvoering van het
werk, op grond van snelheidsmetingen, berekend voor den
hoogsten waterstand, die te Maastricht in deze eeuw in Decem-
ber 1880, werd waargenomen. Die waterstand bedroeg den 22
December aan de brug te Maastricht 47.07 M. + A.P. en
dus 0.42 M. meer dan die van 2 Februari 1862, waarvan
ik, volgens mijne in den aanvang genoemde mededeeling,
eene hoeveelheid van 2532 M³. heb berekend.

Beneden Keizersveer houdt de aan te leggen bedijking op,
en loopen winter- en zomerbed ineen, door versmalling van
het eerste en verbreeding van het laatste. Het gemeen-
schappelijk bed loopt door den Amer, die daartoe zooveel
noodig verbreed, versmald en verdiept is, langzaam verwij-
dende van 300 M. tot 495 M. bij Ruigteplaat tegenover
Lage Zwaluwe, op 35 kilometer van den aanvang van het
werk.

Omtrent de helling, die aan den bodem der nieuwe rivier
zal worden gegeven, bestaat volkomen overeenstemming
met KRAYENHOFF, voor zoo ver zijn ontwerp zich uitstrekt.

Tusschen Bokhoven, waar hij een middelbaren rivierstand
van 2.645 M. boven en Keizersveer, waar hij een gewonen
ebstand van 0.896 M. beneden A.P, aannam, wilde hij den
bodem evenveel t. w. 3. 541 M. doen hellen, zijnde over
25 kilom. 0.14 M. per K.M.

Bij het onderhanden werk wordt de bodem bij het beginpunt
op 1 M., op 25 kilom. benedenwaarts op 4.50 M. beneden
A.P, dus eveneens onder een helling van 0 14 M. per kilom.
aangelegd, en 10 kilom. benedenwaarts, aan het uiteinde,
op 7.50 beneden A.P. gerekend; zoodat voor het beneden
gedeelte eene helling van 0.30 per kilom. is ondersteld.

Voor de hand ligt de vraag naar het bedrag van de
verlaging van den waterspiegel: het hoofddoel van het werk
voor tijden van gevaar.

Hierbij komt vergelijking met de door KRAYENHOFF opgegeven cijfers niet te pas; om twee redenen. KRAYENHOFF heeft zich niet begeven in beschouwingen van den invloed bij zeer hooge waterstanden. Hij kende blijkbaar den afvoer niet waartoe, na hem, de Maas gebleken is in staat te zijn. In de tweede plaats is een gedeelte van het door hem ontworpen werk, namelijk de sluiting van het kanaal van St. Andries, reeds in 1856 uitgevoerd, krachtens de wet van 9 September 1853 (Staatsblad. N⁰. 99), en daarmede een belangrijke toevoer van Waalwater naar de Maas afgesneden, en die toevoer beperkt tot standen op de Waal, hooger dan 7.00 M. + A.P., waarbij de kaden van Heerewaarden overliepen.

De vraag naar den invloed der verlegging wordt uitvoerig beantwoord in eene nota, die het wetsontwerp vergezelde, dat in de tweede zitting der Tweede Kamer van 1884 op 1885 is aangeboden, voor de verklaring dat het algemeen nut de onteigening vorderde, noodig voor de uitvoering van het werk, (Wet van 11 December 1885, Staatsblad N⁰ 234).

Volgens die nota mag in de ongunstige onderstelling, dat een waterstand op de Waal, zoo als de hoogst bekende van 5 Januari 1883, samenvalt met een afvoer van de Maas ten bedrage van 2700 M³. door het keeren van het Waalwater, eene verlaging van 1.14 M. worden verwacht te Hedikhuizen; welke verlaging rivieropwaarts natuurlijk vermindert. Bij minder aanzienlijken afvoer van de Maas, waarbij de invloed van den toevoer uit de Waal grooter moest zijn, wordt ook voor de verlaging een grooter cijfer zelfs tot 1.78 M. verkregen, doch waren ook de waterhoogte en het gevaar minder.

De verlaging bij den genoemden afvoer bedraagt te Oyen slechts 0.10 M., volgens de berekening, en van een werkeloos worden van de Beerssche Maas boven Grave is dus geen sprake.

Daartoe zal eene geleidelijke beteugeling moeten medewerken.

Bij den Bokhovenschen overlaat mag men van de verlaging een belangrijk mindere werking, in de meeste gevallen staking, verwachten.

De wijze van berekening en vele andere zaken, die wor-

den behandeld in de uitvoerige memoriën van toelichting bij de ontwerpen van de genoemde wetten, zullen onderwerpen van wetenschappelijke behandeling kunnen uitmaken.

Het doel van deze mededeeling is: slechts in hoofdtrekken het belangrijke werk te schetsen, aan welks uitvoering, met inbegrip van bijkomende werken, tot bevrediging van velerlei belangen, die er door geraakt werden, een som van ruim vijftien millioen gulden wordt te kost gelegd.

Het werk is voor de helft gereed en ondervond tot nog toe geen tegenspoed van beteekenis, zoodat men zich mag vleien in 1894 de rivier door den nieuwen mond te zullen zien uitstroomen.

's Hage, Oct. 1890.

WATERSTANDEN BETREKKELIJK A.P.

1887.

	MOERDIJK.		KEIZERSVEER.		GORINCHEM.		WOUDRICHEM.		HEDIKHUIZEN.		HEDEL.	St. ANDRIES.
	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.		
Gemid.6 zomermaanden .	1.43	−0.58	1 27	−0.50	1.65	0.92	1.74	1.12	1.97	1.72	1.98	2.52
„ 6 wintermaanden.	1.31	0.78	1.15	−0 57	1.73	1.12	1.83	1.34	2.56	2.49	2.80	3.66
„ het jaar.....	1.37	-0.68	1.21	−0.54	1.69	1.02	1.78	1.23	2.26	2.11	2.39	3.09
Hoogste.....	2.94 30 Oct.	0.66 25 Oct.	2.30 30 Oct.	0.71 25 Oct.	3.50 1 April	3.37 1 April	3.75 1 April	3.66 1 April	4.50 24 Dec.	4.50 24 Dec.	4.98	6.19
Laagste.....	0.57 18 Jan.	-1.45 18 Jan.	0.20 18 Jan.	−1.01 20 Maart 2 Mei	0.99 17 Maart	0 20 2 Nov.	1.05 26 Oct.	0.40 3 Nov.	1.33 9 Sept.	1 02 16 Aug.	1.22	1.58
1871 — 1880.											**Crévecoeur.**	
Gemd. 6 zomermaanden .	1.38	− 0.65	1.32	−0.50	1.85	1.45	1.98	1.70	2.26	2.13	2.34	2.89
„ 6 wintermaanden.	1.38	−0.74	1.30	−0.33	2.26	1.97	2.45	2.24	3.30	2.25	3.61	4.54
Jaar.....	1.38	−0.70	1.31	−0.41	2.06	1.71	2.22	1.97	2.78	2.69	2.98	3.71
Hoogste.....	2.97	1.54	2.63	1.97	4.73	4.69	5.09	5.07	6.26	6.24	6.46	8.40
Laagste.....	−0.04	1.84	−0.05	-1.13	0.55	0.18	0 71	0 42	0.97	0.93	1.16	1.71

OVER DE OMZETTING VAN DINATRIUM-WIJNSTEENZUUR AETHYL

ONDER DEN

INVLOED VAN AETHYLCHLORIDE.

DOOR

E. MULDER.

Men wenschte te weten, waardoor het komt, dat mono- en di-natrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride niet schijnen te vormen mono- en di-aethyl-wijnsteenzuur aethyl, een reactie, die niets bevreemdends zou hebben. Vooral is dit het geval met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, want dit is symmetrisch samengesteld, hetgeen de moleculen in 't algemeen standvastiger maakt (noodwendig in het voordeel dezer reactie), niet het geval met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl:

dinatrium-wijnsteenzuur aethyl. mononatrium-wijnsteenzuur aethyl.

$$C_2H_5O-CO-\underset{\underset{ONa}{|}}{CH}-\underset{\underset{ONa}{|}}{CH}-CO-OC_2H_5 \qquad C_2H_5O-CO-\underset{\underset{ONa}{|}}{CH}-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CO-OC_2H_5.$$

Ook bevat mononatrium-wijnsteenzuur aethyl eenmaal den rest OH, en van daar een betrekkelijk mindere mate van standvastigheid (reeds vroeger waargenomen *)), dat trouwens met genoegzame waarschijnlijkheid volgt uit de hoeveelheid afgeleiden van wijnsteenzuur (en eenigen zijner zouten), ont-

*) Zie *Rec. d. Trav. Ch.* T. 8, 361.

staan als gevolg van oxydatie en herleiding door middel der resten hydroxyl van dit zuur (evenwel bij verhoogde temperatuur). Om die reden werd uitgegaan van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (ook met 't oog op een synthese van erythriet), en wel van dit tartraat zooveel mogelijk *bevrijd van alcohol*, om de grootste standvastigheid te geven aan het molecuul, met het doel gemelde reactie te bevorderen, te weten de vorming van diaethyl-wijnsteenzuur aethyl. Zelfs bij verwarming schijnt deze reactie niet plaats te hebben (zie later); men ziet geen chloornatrium gevormd worden, daarentegen wordt de massa meer en meer gekleurd. Dit is vooral het geval (ook met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl) bij aanwezigheid van alcohol, waarbij de oplossing aanvangt met geel te worden gekleurd, dan geelrood, roodbruin en vervolgens bruin (zoo mede zonder alcohol). Mono- en dipotassium-wijnsteenzuur aethyl doen nog gemakkelijker gekleurde produkten ontstaan bij verwarmen met aethylchloride, vooral bij aanwezigheid van alcohol, en zelfs dan bij gewone temperatuur, tevens het geval met mono- en dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, alhoewel in mindere mate (altijd werkende in buizen, daarna toegesmolten). Ook bij bewaren van deze verbindingen bij gewone temperatuur in bijzijn van alcohol zonder bijvoeging van aethylchloride, worden ten slotte gekleurde stoffen gemaakt, wederom vooral het geval met die van kalium. Met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, in tegenwoordigheid van alcohol (zonder en met aethylchloride), ontstaat somwijlen een massa met *helder gele kleur*, ook wel geleiachtig, nog meer het geval uitgaande van een hoeveelheid natriumaethylaat en ester van 3 Na op 1 mol. wijnsteenzuur aethyl. Alcohol, dit blijkt genoegzaam uit het medegedeelde, moet zooveel mogelijk worden verwijderd.

In het volgende zullen de proeven worden gegeven in de volgorde waarin zij werden genomen, te beginnen met de vermelding van eenige eigenschappen van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, nagegaan met het doel, om dat lichaam nog meer te leeren kennen in zijne standvastigheid, daar het in de volgende onderzoekingen de eerste plaats inneemt.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bij verhoogde temperatuur. Men had bij de bereiding reeds dit tartraat verhit bij ongeveer 62°, ten einde genoegzaam zeker te zijn, dat het zou bevrijd zijn van alcohol, en dit product geeft met zuiveren alcohol een geleiachtige massa, is oplosbaar in aethylchloride, en gedraagt zich in één woord als dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat niet is verhit en ontdaan is van alcohol. Toch volgen hier nog twee proeven onder deze omstandigheden genomen, en anderen gedaan bij een nog hoogere temperatuur. Het doel dezer bepalingen was tevens, om na te gaan, of aldus ook een geschikte methode te vinden zou zijn ter omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in een chinon. De onderzoekingen in die richting gedaan, leidden tot deze uitkomsten.

	Hoeveelheid natrium genomen voor het maken van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl:	Hoeveelheid wijnsteenzuur aethyl:	Zuivere alcohol:	Temperatuur en tijd:	Gewicht van het eindproduct, enz.:
I.	0,29 gr.	1,314 gr.	6 gr.	61°—62° gedurende 3 uur	1,5745 gr.; tint zeer licht geel.
II.	0,29 »	1,3175 »	6 »	60° gedurende 3 uur	1,512 gr.; zeer weinig gekleurd.
III.	0,29 »	1,3175 »	6 »	100° gedurende 3 uur	1,3965 gr.; helder geel gekleurd.
IV.	0,29 »	1,317 »	6 »	121° gedurende 3 uur	1,295 gr.; kleur geelbruin.
	hetzelfde product			142° gedurende 3 uur	1,156 gr.; kleur bruin; ontwikkeling van gas.
	»	»		160° gedurende 3 uur	1,121 gr.; kleur bruin.

Ter vorming van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl wordt voor 0,29 gr. natrium theoretisch een hoeveelheid wijnsteenzuur aethyl vereischt van 1,315 gr., terwijl aan eindproduct moet ontstaan 1,575 gr.

Het product na verhitten bij ongeveer 160° kon vooral van eenig belang wezen, in zooverre namelijk, als er een betrekkelijk groote hoeveelheid van een chinon zou kunnen gevormd zijn. De massa bleek zeer oplosbaar te zijn in water en wel met roodbruine kleur (en alkalische reactie), en nam een gele kleur aan bij toevoegen van zoutzuur. De waterige oplossing geeft met ferridchloride een kersroode verkleuring, tevens het geval, indien de oplossing zwak zuur is gemaakt met zoutzuur.

De waterige oplossing wordt neêrgeslagen met alcohol, terwijl een vloeibaar afzetsel met roodbruine kleur ontstaat; wordt fractionnair neêrgeslagen, dan zet zich ten slotte een kleine hoeveelheid af van een vaste kleurlooze verbinding. Het gekleurde neêrslag geeft, na weder oplossen in water en opnieuw neêrslaan met alcohol, een vloeibaar afzetsel met een eenigzins oranje kleur. Dit laatste neêrslag bezit in waterige oplossing een alkalische reactie, en neemt met zoutzuur een gele kleur aan onder vrijkomen van eenig gas. De watervrije oplossing laat, na plaatsen onder een exsiccator, een geleiachtige gekleurde massa terug, die na oplossen in water nog dezelfde reactie vertoont met ferridchloride.

Het product verkregen na verhitten bij 100° is veel minder oplosbaar in aethylchloride dan het geval is met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl verhit bij ongeveer 60°. De massa bezit een *helder gele* kleur. Zij lost gemakkelijk op in water; alcohol slaat er uit neder een vloeibaar lichaam, dat weldra krystalliseert (wijnsteenzuur dinatrium verhoudt zich op overeenkomstige wijze). Uitgaande van 0,29 gr. natrium, werd 0,911 gr. van deze krystallijne stof erlangd, die bij nader onderzoek bleek te zijn wijnsteenzuur dinatrium (zoo met betrekking tot de reactie met calciumchloride). Het filtraat geeft met ferridchloride de kersroode verkleuring, het vormt geen noemenswaardig afzetsel meer met alcohol, na alvorens eenigen tijd onder een exsiccator te hebben gestaan.

Men zou op 't oogenblik niet kunnen zeggen, welke de reden mag zijn, dat gezegd product zoo weing oplosbaar is in aethylchloride, terwijl het toch voor verreweg het grootste gedeelte moet wezen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, waarvan het wijnsteenzuur dinatrium een afgeleide is. Zelfs gedurende eenige weken in aanraking met aethylchloride (als altijd in een toegesmolten bnis), en nu en dan geschud, werd betrekkelijk weinig van dit lichaam opgelost.

Wordt dinatrium-wijnsteenzuur aethyl geruimen tijd verhit bij ongeveer 60°, b. v. 8 uur, dan bezit het product een licht gele kleur, en geeft in waterige oplossing met ferridchloride zeer duidelijk de meer genoemde reactie, zonder nochtans noemenswaardig in gewicht te hebben verloren, integendeel soms een weinig te veel in gewicht bedragende van hetgeen door de theorie wordt geeischt (uitgaande b.v. van 0,29 gr. natrium).

Aangezien het ontstaan van een chinon zou kunnen bevorderd worden door aanwezigheid van natriumaethylaat, werd uitgegaan van de helft van wijnsteenzuur aethyl op dezelfde hoeveelheid natrium (en zuiveren alcohol), bijgevolg was de verhouding die uitgedrukt door 4 Na op 1 mol. wijnsteenzuur aethyl. De bewerkingen waren overigens dezelfden als bij de bereiding van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (dus werd ook gedurende 3 uur verhit bij ongeveer 62° in het waterstofledig). Er ontstond een *helder geel* gekleurde massa; daarna verhit bij 100° (gedurende 3 uur) nam de gele kleur in sterkte toe. Het lichaam is gemakkelijk oplosbaar in 5 c.c. water (uitgaande van 0,29 gr. natrium); alcohol doet hieruit een vloeibaar afzetsel ontstaan dat niet kristalliseert. Afgezonderd en opnieuw opgelost in water, geeft alcohol nogmaals een vloeibaar afzetsel, dat evenmin aanschiet in krystallen. Zoowel dit vloeibare product (in watervrije oplossing) als de moederloog, doen met ferridchloride de kersroode verkleuring ontstaan.

Maar veeleer dan dezen weg en dergelijke wegen in te slaan, had men meer vertrouwen in het *aethylchloride*, en wel vooral wat aangaat de vorming van een chinon, als gevolg eener *primaire* en nagenoeg overeenstemmende *secundaire*

reactie (van het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl), en daarmede een chinon, dat zoo samengesteld mogelijk is onder de gegeven omstandigheden; een chinon, dat een rol zou kunnen vervullen in de synthese van gewoon inosiet (of van een stof daarmede geometrisch isomeer), en in meer dan één opzicht van belang.

Over de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl door aethylchloride. In den beginnne werd dinatrium-wijnsteenzuur aethyl voor onoplosbaar gehouden in aethylchloride, maar geleid door beschouwingen van meer of min theoretischen aard, werd dit tartraat geruimen tijd geschud met aethylchloride (in een toegesmolten buis), en inderdaad werd er iets van opgelost, maar uiterst weinig. Na langer schuddende, werd nog meer opgelost. Maar ten slotte kwam men tot de ontdekking, dat de *tijd* hier de voornaamste factor is, en men deze twee lichamen slechts geruimen tijd met elkander heeft in aanraking te laten (als altijd in een toegesmolten glazen buis), om het tartraat in een betrekkelijk groote hoeveelheid te zien oplossen, zoo 1,5 gr. tartraat in 4 gr. van het chloride (en daarmede is het maximum nog lang niet bereikt; zie later), waartoe evenwel eenige dagen worden vereischt.

De theoretische beschouwingen, waarvan werd uitgegaan, hadden ten grondslag, dat de scheikundige neiging die *aethylchloride* wel zal moeten uitoefenen op dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (aangezien de resten van natrium zich bevinden in het alcoholisch gedeelte van het molecuul), zich niet openbarende in den vorm eener reactie, die het ontstaan van chloornatrium (en diaethyl-wijnsteenzuur aethyl) tengevolge heeft, zich wel zou kunnen doen gelden door het tartraat op te lossen, een eigenschap, welke meer of min een scheikundig of physisch-scheikundig karakter vertoont, en als 't ware een zekere mate van (dus geheeten) aantrekking aankondigt.

In geval dinatrium-wijnsteenzuur aethyl eenigen alcohol bevat (evenwel minder dan zou overeenkomen met een verbinding in een gelijk aantal mol.), wordt het veel gemakkelijker opgelost in aethylchloride. Wordt het tartraat (in een betrekkelijk groote hoeveelheid) geruimen tijd verhit (b.v. nagenoeg 5 uur) bij ongeveer 60^0 (als altijd veronder-

steld in het gedeeltelijk waterstof-ledig), dan kan het gebeuren, dat het in aanraking met aethylchloride gedurende dagen niet merkbaar verandert, om dan in een betrekkelijk korten tijd te worden opgelost. Verondersteld, dat de aanwezigheid van een weinig alcohol de oplosbaarheid bevordert van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, zoo laat het zich vrij duidelijk verklaren, dat, als de reactie eenmaal is aangevangen, de alcohol, ontstaan bij de omzetting, het opgelost worden steeds sneller en sneller doet plaats hebben.

Merken we daarenboven op, dat de drukking bij het maken van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, betrekkelijk laag moet zijn (gemiddeld 10^{mm} en minder), anders kan het voorkomen, dat de massa, in plaats van geleiachtig te blijven, in den aanvang alvorens vast te worden, vloeibaar wordt, onder gelijktijdig afzetten van een geelgekleurde stof; met andere woorden, de reactie schijnt onder deze omstandigheden een ander verloop te hebben. Dit kan vooral dan het geval zijn, wanneer met een betrekkelijk groote hoeveelheid wordt gewerkt (stel uitgaande van $0,29 \times 9 = 2,61$ gr. natrium), onder welke omstandigheden ook de alcohol moeilijker is te verwijderen, vooral, wanneer het geheel in een sterk samenhangende massa is omgezet.

Zooals later zal blijken, wordt de grootste hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride omgezet, maar schijnt een gedeelte somwijlen onaangetast te blijven. Vormt zich onder deze omstandigheden een systeem van evenwicht? Later zal dit punt ter sprake komen. Voor het oogenblik mogen eenige feiten worden vermeld, die betrekking hebben op de wijze van ontstaan van gemelde oplossing en eenigen harer eigenschappen, en tevens van het product na verdampen van het aethylchloride terugblijvende.

Alvorens dinatrium-wijnsteenzuur aethyl wordt opgelost, ontstaat een *geleiachtige* massa, die een groot deel der buis vult, wanneer men uitgaat van de vroeger vermelde verhouding tusschen dit tartraat en aethylchloride. Om evenwel dit verschijnsel te kunnen waarnemen, is het noodig, van een betrekkelijk groote hoeveelheid dezer stoffen uit te

gaan, want eenmaal gevormd, wordt deze geleiachtige massa gemakkelijk opgelost. De oplossing vangt aan met zeer licht geel te zijn gekleurd, om na eenigen tijd te hebben gestaan, wat donkerder van kleur te worden. Laat men de overmaat (zie later) aan aethylchloride verdampen onder een exsiccator, dan doet zich eerst een geleiachtige massa voor, die geel is gekleurd, later overgaande in een gomachtig product, in het gedeeltelijk ledig vormende een gemakkelijk te verdeelen glasachtige massa, die licht geel is gekleurd. Als dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, is ook dit lichaam hygroscopisch, maar geplaatst in de vochtige lucht ontstaat er veelal geen krystallijne verbinding (wijnsteenzuur di-natrium) in merkbare hoeveelheid, en slechts een geleiachtige massa, die niet vervloeit.

I. Het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl werd gemaakt volgens de vroeger gegeven methode *), te weten 0,29 gr. natrium opgelost in 6 gr. zuiveren alcohol en 1,3165 gr. wijnsteenzuur aethyl (aan het einde der bewerkingen werd bij ongeveer 62° gedurende 3 uren verhit in het waterstofledig), opleverende 1,586 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (bevrijd van alcohol), terwijl de theorie eischt 1,575 gr.. Deze hoeveelheid werd opgelost in 3,901 gr. aethylchloride (dit laatste met veel zorg gezuiverd; tevens het geval met dat, in later te vermelden proeven gebruikt), in een glazen buis, daarna digtgesmolten. Na verdamping van het overtollige aethylchloride, bleef terug 1,7565 gr.; na plaatsen in het gedeeltelijk waterstof-ledig (en daarna vullen der buis met waterstof, als gewoonlijk) herleid tot 1,742 gr.. Bijgevolg had er een vermeerdering plaats in gewicht van 1,742—1,586 = 0,156 gr. Dit product wordt opgelost in 10 c.c. water. De glasachtige massa begint met geleiachtig te worden. De oplossing is nauwelijks geel gekleurd, en bevat in suspensie druppeltjes van een stof, die men voorloopig zal bestempelen met *lichaam B*. Aan de oplossing, die sterk alkalisch reageert, werd tijd gelaten tot verzeepen, en daarna neêrgeslagen met alcohol. Hierdoor ontstond

*) Rec. d. Trav. Ch. T. 8, 374.

en vloeibaar afzetsel (lichaam *B* daarentegen werd opgelost), dat weldra krystallijn werd, op de wijze zooals veelal geschiedt bij neêrslaan eener waterige oplossing van wijnsteenzuur di-natrium met alcohol. De hoeveelheid bedroeg die van 0,33 gr., terwijl 1,575 gr dinatrium-wijnsteenzuur aethyl vordert 1,222 gr. wijnsteenzuur di-natrium (ongerekend het krystalwater, dat werd verwijderd); zie II.

De moederloog gaf met ferridchloride een *kersroode* verkleuring, die zoowel verdween door een overmaat van zoutzuur als van potassa.

II. De proef werd herhaald met 0,29 gr. natrium, 6 gr. zuiveren alcohol en 1,316 gr. wijnsteenzuur aethyl; het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, opgelost in 4 gr. aethylchloride, werd behandeld met 5 c.c. water (bijgevolg met de helft van I), dat eenige uren vereischt (het doel hiervan was om de verzeeping te bevorderen, aangezien dan de concentratie grooter is). Ook ditmaal deed zich een kleine hoeveelheid voor van lichaam *B*. Er werd alcohol bijgedaan; men liet de massa eenigen tijd staan, totdat de oplossing niet meer merkbaar troebel werd bij opnieuw toevoegen van alcohol, en bepaalde daarna de hoeveelheid wijnsteenzuur di-natrium gevormd, die bleek te zijn 0,428 gr. (ook werd op deze stof gereageerd met calciumchloride), afkomstig van het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat door het aethylchloride niet was veranderd. De moederloog gaf daarenboven dezelfde reactie met ferridchloride. Onder een exsiccator geplaatst, bleef terug 1,117 gr.; dit gaf na behandeling met alcohol aan daarin onoplosbare deelen 0,278, terwijl het alcoholisch filtraat terugliet 0,741 gr. van een *glasachtige* stof met lichtgele kleur, oplosbaar in water met alkalische reactie, met ferridchloride een kersroode verkleuring gevende. Noemen we voorloopig dit product *lichaam A* (zie later).

III. De verhouding der stoffen, waarvan werd uitgegaan, was genoegzaam dezelfde. Het product van 1,568 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl werd opgelost in 4 gr. aethylchloride, na verdamping van aethylchloride gevende 1,745 gr. van een lichaam, dat in het gedeeltelijk ledig van waterstof werd herleid tot 1,73 gr., bijgevolg een vermeerdering

in gewicht aanbiedende van 1,73—1,563 = 0,167 gr.. Na oplossing in water en een paar dagen te hebben gestaan, werd de oplossing neêrgeslagen met alcohol, waardoor een afzetsel ontstond van 0,475 gr. wijnsteenzuur di-natrium (waarop werd gereageerd met calcium-chloride, enz.). De moederloog werd geplaatst onder een exsiccator, het terugblijvende behandeld met alcohol, gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator, gevende 0,645 gr. van lichaam *A* (nog nader te zuiveren).

IV. Van genoegzaam dezelfde verhouding der eerste stoffen uitgaande, gaf 1,58 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl na behandeling met aethylchloride 1,809 gr..

Bij gevolg is in drie proêven gevonden:

	Natrium gebruikt;	Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl gevormd:	Product na behandeling met aethylchloride:	Verschil:
I.	0,29 gr.	1,586 gr.	1,742 gr.	0,156 gr.
III.	» »	1,563 »	1,73 »	0,167 »
IV.	» »	1,58 »	1,809 »	0,229 »

Verhit met kalk, bleek het product chloor te bevatten. Volgens de medegedeelde wijze te werk gaande, is dit product een mengsel, zooals later zal blijken, van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, van de ontstane verbinding met aethylchloride, en wellicht tevens van alcohol. Later is gevonden, dat na lang staan der oplossing van aethylchloride, er zich een *afzetsel* vormt, en dat onder deze omstandigheden de oplossing geen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl meer schijnt te bevatten, dat dan tevens niet aanwezig is in het product na verwijdering der overmaat van aethylchloride. Uitgaande van een versche oplossing, zou men, de hoeveelheid wijnsteenzuur di-natrium bepalende door behandeling met water, kunnen berekenen de hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl dat onaangetast bleef, en uit de aanvankelijk bepaalde toename in gewicht kunnen besluiten tot de door de ontstane verbinding hoeveelheid opgenomen aethylchloride (of nog beter door een chloorbepaling). Maar de bepaling van het wijnsteenzure di-natrium laat te wenschen over, ook verbindt zich het aethylchloride waarschijnlijk zoowel met het dina-

rium-wijnsteenzuur aethyl als met de ontstane verbinding, om niet te spreken van den alcohol (zie een weinig later). Men moet alzoo werken met een product, dat geen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevat, door de oplossing zoolang te laten staan, dat zich geen afzetsel meer vormt. Voegen we er nog aan toe, dat 1,575 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl een toename in gewicht zou eischen van 0,365 gr., aannemende, dat één mol. hiervan zich verbindt met één mol. aethylchloride, maar hoogst waarschijnlijk komt er alcohol vrij, die verdampt.

Ten einde op meer afdoende wijze den omzettenden invloed van aethylchloride op dinatrium-wijnsteenzuur aethyl te leeren kennen, is een contrôle-proef gedaan door dit tartraat te ontleden met water zonder tusschenkomst van het chloride. Er werd uitgegaan van een hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl afkomstig van 0,29 gr. natrium, dit zij 1,575 gr. van het tartraat, opgelost in 5 c.c. water, en deze oplossing werd, na eenigen tijd te hebben gestaan, met alcohol neêrgeslagen Na filtratie, werd het filtraat eenigen tijd gelaten onder een exsiccator, en opnieuw met alcohol behandeld, dat nog een weinig wijnsteenzuur dinatrium gaf. Alles te zamen werd 0,952 gr. wijnsteenzuur di-natrium erlangd in plaats van 1,222 gr., zooals de theorie eischt, bijgevolg is er een tekort van 1,222—0,952 = 0,27 gr.. Hierbij dient er evenwel aan te worden herinnerd, dat het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl gedurende drie uur bij ongeveer 62° was verhit, als gevolg waarvan eenige omzetting plaats heeft.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl tegenover aethylchloride bij verwarming. Bij 50° in een toegesmolten buis gedurende 1 uur verhit, veranderde de kleur der oplossing niet merkbaar; na 3 uur was deze eenigermate in sterkte toegenomen, in meerdere mate het geval na 24 uur. Na 72 uur in 't geheel te zijn verwarmd, was de kleur geel-rood geworden, en eenig afzetsel ontstaan. Er werd 1,5 gew.-d. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl genomen op 4 gew.-d. aethylchloride.

Lichamen A en B nader beschouwd. De producten van I en II, te weten 0,741 en 0,645 gr. werden opgelost in ge-

wonen abs. alcohol, de oplossing gefiltreerd van eenig afzetsel, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator. Het terugblijvende lichaam *A* werd vervolgens opgelost in een weinig water, en gefiltreerd van een weinig van lichaam *B* (zie vroeger). Het filtraat werd gezet onder een exsiccator en de terugblijvende massa vervolgens behandeld met eenigen alcohol (en gefiltreerd van eenig krijstallijn lichaam). Na verdamping bleef 0,665 gr. terug van lichaam *A*, meer of min gezuiverd. Dit product is vervloeibaar in vochtige lucht geplaatst, te gelijker tijd iets van een krystallijne stof afzettende, namelijk van wijnsteenzuur di-natrium, waaruit volgt, dat het product nog niet geheel zuiver is. Het is *onoplosbaar* in aethylchloride en zoo ook in abs. aether. De waterige oplossing kan worden verhit bij het kookpunt en na bekoelen toch nog de reactie geven met ferridchloride. Met verdund zoutzuur doet lichaam *A* afzetten van een olieachtige vloeistof, dus wel van lichaam *B* (zie vroeger).

In geval het oorspronkelijk product, behalve de ontstane verbinding bevat dinatrium-wijnsteenzunr aethyl, kunnen vele reacties intreden onder den invloed van water, tevens door de aanwezigheid van aethylchloride. Het zou wel eenigermate ontijdig zijn, om thans deze reacties te willen behandelen. Maar het is duidelijk, dat lichaam *A* een natrium-afgeleide zal zijn van de verbinding nagenoeg of geheel in zijn oorspronkelijken vorm, en dat lichaam *B* zal wezen de aethylester van dit lichaam (hetzij de zure, of de neutrale), of dit lichaam in vrijen staat.

Om den aethylester der gevormde verbinding te erlangen, werd uitgegaan van 1,58 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dit opgelost in 4 gr. aethylchloride; terugbleef (na het waterstof-ledig) 1,809 gr. (zie p. 180), dat werd behandeld met verdund zoutzuur. Lichaam *B* liet niet op zich wachten, maar ook de oplossing gaf de reactie met ferridchloride (lichaam *B* is eenigermate oplosbaar in water, zie iets later). Geplaatst onder een exsiccator bleef 1,871 gr. terug; behandeld met alcohol bleek 0,85 gr. onoplosbaar te zijn, terwijl de alcoholische oplossing na verdamping terug liet 0,963 gr. van een syropig lichaam (er was water toege-

voegd aan de alcoholische oplossing om een estervorming van mogelijk aanwezig wijnsteenzuur te voorkomen), dat werd behandeld met abs. aether, na verdampen hetzelfde product teruglatende. Een weinig water doet een olieachtige vloeistof ontstaan, wel lichaam *B*, dat weinig oplosbaar is in water. Dit lichaam *B* zal bij gevolg niets anders zijn dan gemeld siropig product na opname wellicht van water. Beiden bezitten een zeer licht gele kleur, door toevoeging van eenig alkali in intensiteit toenemende. Opgelóst in water en schuddende met aether, gaat alle stof over in den aether, waarvan men zich kan overtuigen door de reactie met ferridchloride (altijd na toevoegen van alcohol bij de aetherische oplossing).

Gaat men uit van lichaam *A*, lost dit op in water, behandelt dit met Na O H (onder verwarming op een waterbad) tot blijvende alkalische reactie, maakt de oplossing zuur met verdund zwavelzuur, en schudt vervolgens uit met aether, dan werd betrekkelijk weinig van een siropige massa verkregen; reden waarom het wenschelijk werd geacht, om een anderen weg te volgen, en wel dezen, van veeleer te trachten de oorspronkelijke verbinding af te zonderen.

Het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride (na verwijdering der overmaat van dit chloride) tegenover abs. aether. Ter afzondering der oorspronkelijke verbinding werd deze massa behandeld met abs. aether. Verondersteld, dat daarin dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (onaangetast gebleven) aanwezig is, dan zou dit onoplosbaar kunnen zijn (in verbinding met alcohol of aethylchloride of beiden). Wordt aether gedaan bij gemeld product, dan wordt de glasachtige massa veranderd, en blijft terug een kleurloos lichaam (zie later). Bij plaatsen der oplossing onder een exsiccator, blijft opnieuw een glasachtige *geel* gekleurde massa terug. Dit lichaam is volkomen oplosbaar in abs. aether. en doet aanvankelijk een *geleiachtige* massa ontstaan (tevens het geval met het oorspronkelijk product). Geplaatst aan vochtige lucht, wordt het omgezet in een *geleiachtige* massa, fluoresceerende in blauw (zoo ook in aetherische oplossing).

Zelfs na vele dagen te zijn blootgesteld aan vochtige lucht, vervloeit de massa niet (noch vertoonen zich krystallen van wijnsteenzuur di-natrium). De aetherische oplossing geeft met ferridchloride de *kersroode* verkleuring na toevoeging van alcohol.

Later zal blijken, dat, ingeval de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride lang genoeg heeft gestaan om niets meer te doen afzetten, de overblijvende oplossing een product geeft, dat genoegzaam geheel oplosbaar is in abs. aether.

Over het gebruik van abs. aether met aethylchloride ter vermeerdering der opbrengst aan de verbinding en ter verkrijging van een genoegzaam zuiver product. Men wilde weten, of het eenig voordeel zou aanbieden, om aether toe te voegen, alvorens het vrije aethylchloride is verdampt.

Wordt aether gedaan bij een versche oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride, dan wordt niets afgezet, hoeveel aether men er ook bijvoegt. Geplaatst onder een exsiccator, verdampt noodwendig het grootste deel van het aethylchloride het eerst; nochtans wordt geen afzetsel gevormd, en evenmin, wanneer bijkans al de aether is verdampt. Ten slotte blijft een geleiachtige massa terug, overgaande in een *glasachtig* product. Na oplossing in water en neêrslaan met alcohol (onder reeds vroeger opgegeven omstandigheden), werd 0,149 gr. wijnsteenzuur dinatrium erlangd van 1,5 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (aanvankelijk opgelost in 4 gr. aethylchloride), bijgevolg minder dan in den regel het geval was (zonder de oorspronkelijke oplossing in aethylchloride te hebben laten staan). Zooals reeds vroeger werd medegedeeld, bedraagt de theoretische hoeveelheid die van 1,222 gr. wijnsteenzuur di-natrium; zie ook pag. 187.

Laat men het aethylchloride in die mate verdampen, dat er een siropige massa terugblijft, dan nog lost deze zich op in abs. aether, maar deze oplossing bevat evenzoo eenig dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat niet in het lichaam was omgezet.

Over de kleinste hoeveelheid aethylchloride vereischt ter oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en ter omzetting in de verbinding. Zonder eenig bezwaar werd deze hoeveelheid herleid van 4 gew.-d (zooals vroeger geschiedde en ook later nog wel zal worden gedaan) tot 3 gew.-d. op 1,5 gew.-d. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl. Alvorens op te lossen, wordt bijkans de geheele massa geleiachtig. Bij toevoegen van abs. aether aan de oplossing daarna gevormd, ontstond geen afzetsel. Bij vermindering nogmaals der hoeveelheid aethylchloride, b.v. tot 2 gew.-d., veranderde het geheel in een geleiachtige massa, die in dezen toestand scheen te volharden. Dientengevolge werd het als aangewezen beschouwd, om bij het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl eerst aether te doen en vervolgens aethylchloride, uitgaande van de verhouding van 1,5 gew.-d. dinatrium wijnsteenzuur aethyl, 4 gew.-d. abs. aether ($M = 105,76$), en vervolgens 2 gew.-d. aethylchloride ($M = 64,31$); het geheel gedaan in een buis, daarna toegesmolten. Het dinatrium-wijnsteenzunr aethyl scheen echter onaangetast te zijn, na eenige dagen met aethylchloride en aether te zijn in aanraking geweest. De verklaring van dit verschijnsel kan wel geen andere wezen dan deze, dat de aether zich meester maakt van het aethylchloride, en bij gevolg het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl niet kan worden omgezet in de nieuwe verbinding Eenmaal verbonden met aethylchloride, schijnt het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl dit chloride niet af te staan aan aether. In ieder geval is nog mogelijk, dat een aanraking gedurende een langeren tijd tusschen dit tartraat en aethylchloride met aether, niet zonder invloed zou geweest zijn op de uitkomst.

Scheiding der oorspronkelijke verbinding van het product, ontstaan door dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride. Nog in de meening verkeerende, van gebruik te kunnen maken van de eigenschap, die aether schijnt te hebben, om zich van het vrije aethylchloride meester te maken, had men in een proef aether gedaan bij de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride. Het eindproduct is evenwel oplosbaar in aether, dus ook het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat onaangetast was gebleken. De

glasachtige massa, na verdampen van den aether terugblijvende, geeft bij staan aan vochtige lucht wel een geleiachtige massa (fluoresceerende in blauw), maar weldra vertoonen zich krystallen van wijnsteenzuur di-natrium. Dit product beantwoordt bijgevolg niet aan de vereischte zuiverheid. Verwijdert men daarentegen dadelijk zooveel mogelijk het aethylchloride in een waterstof-ledig, en behandelt het terugblijvende met abs. aether, dan zou na filtratie en verdampen van den aether een betrekkelijk zuiver product kunnen erlangd worden. Geplaatst in vochtige lucht wordt ook dit geleiachtig, echter zonder krystallen te geven van wijnsteenzuur di-natrium. Men liet de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride lang genoeg staan, om geen afzetsel meer te vormen.

I. Een hoeveelheid van 0,725 gr. van gemeld product, tamelijk innig vermengd met de chromaten van lood en kalium, gaf 0,9201 gr. kooldioxyde en 0,3009 gr. water;

0,6524 gr. van dezelfde stof, niet innig vermengd, gaf 0,8564 gr. kooldioxyde en 0,2741 gr. water;

0,7166 gr. van hetzelfde product, innig vermengd, gaf 0,9022 gr. kooldioxyde en 0,2834 gr. water;

0,4976 gr van de stof, innig vermengd met kalk, leverde op 0,2091 gr. chloorzilver, bevattende 0,0507 gr. chloor;

0,6876 gr. van dit lichaam gaf 0,2933 gr. chloorzilver, inhoudende 0,07246 gr. chloor. Het werd niet innig vermengd met de kalk.

De samenstelling van dit product is bijgevolg, berekend op 100 gew.-d.:

koolstof.	34,6	34,2	34,3
waterstof	4,6	4,5	4,4
chloor	10,4	10,5	— .

Werkende onder genoegzaam dezelfde omstandigheden, wordt nu en dan een product verkregen, dat veel minder oplosbaar schijnt te zijn in aether (zie later). Om die reden werd in de volgende proef geen gebruik gemaakt van aether, daarentegen liet men de oplossing van dinatrium-

wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride betrekkelijk geruimen tijd staan, om daarna de heldere oplossing af te hevelen van een afzetsel gevormd. Bij verdampen van het aethylchloride ontstaat ook hier aanvankelijk een geleiachtige massa, die dan een gomachtig aanzien verkrijgt en ten slotte een glasachtig product vormt, in het gedeeltelijk waterstofledig. In vochtige lucht geplaatst, wordt de vaste stof (met gele kleur) geleiachtig, zonder vorming van krystallen van wijnsteenzuur di-natrium; het fluoresceert in blauw (geheel zooals het lichaam met aether bereid),

De analyse gaf de volgende uitkomsten.

II. Een hoeveelheid van 0,9181 gr. dezer stof, niet innig vermengd met de chromaten van lood en kalium, gaf 1,1493 gr. kooldioxyde en 0,3723 gr. water;

0,8665 gr. vau dit lichaam, niet innig vermengd met kalk, gaf 0,3661 gr. chloorzilver, bevattende 0,09053 gr. chloor;

0,8391 gr. van het product gaf na verbranding 0.3463 gr. stof, na behandeling met zoutzuur gevende 0,366 gr. chloornatrium, bevattende 0,14406 gr. natrium, (bepaling verricht door den Heer L. E. O, DE VISSER).

Bijgevolg is gevonden berekend, op 100 gew.-d.:

koolstof	34,1
waterstof	4,5
chloor.	10,4
natrium	17,2

In de volgende bereidiug werd tevens geen aether gebruikt, en overigens op dezelfde wijze te werk gegaan.

III. *a*. Een hoeveelheid van 1,2534 gr. van dit product gaf met kalk 0,5449 gr. chloorzilver, bevattende 0,1347 gr. chloor.

b. Deze bepaling werd naar een geheel andere methode uitgevoerd. Een hoeveelheid van 1,1101 gr. van hetzelfde product werd opgelost in 5 c.c. water, terwijl de oplossing eenigen tijd aan zich zelve werd overgelaten, om daarna te filtreeren ter afzonderiug eener kleiue hoeveelheid van lichaam *B*). De oplossing werd zuur opgemaakt met salpeterzuur, en neêrgeslagen met zilvernitraat.

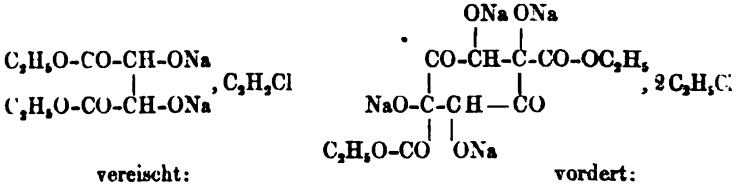
Er werd verkregen 0,48 gr. chloorzilver, bevattende 0,1186 gr. chloor.

Berekend op 100 gew.-d. geeft dit eenzelfde gehalte aan chloor, te weten:

	a	*b*
chloor	10,7	10,7.

De producten der bereidingen I, II en III verhouden zich op overeenkomstige wijze bij plaatsing in vochtige lucht (zie vroeger). Opgelost in water, geeft alcohol geen neêrslag van wijnsteenzuur di-natrium.

Het product gemaakt zonder of met aether is wel waarschijnlijk een verbinding van het gevormde lichaam met aethylchloride. Laten we hieronder volgen de samenstelling (op 100 gew.-d.) van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl op 1 mol. verbonden met 1 mol. aethylchloride; en van het chinon op 1 mol. vereenigd met 2 mol. van dit chloride:



	vereischt:	vordert:
koolstof. . .	37,3	35,7
waterstof . .	5,4	4,1
chloor. . . .	11,3	13,2
natrium. . .	14,6	17,1.

Het gevonden gehalte aan chloor beantwoordt wel niet aan deze formule van het chinon vereenigd met aethylchloride. Maar men zou kunnen opmerken, dat het *vaste* product aanvankelijk gevormd door dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride, van dit chloride verliest (zie later) in het gedeeltelijk (waterstof) ledig, en dat bijgevolg het eindproduct zou kunnen zijn een mengsel van verbindingen van het chinon met dit chloride. Veronderstellende, dat dit mengsel bevat 1½ mol. chloride op 1 mol. chinon, heeft men:

	gevonden. I.			II.	III.		berekend.
koolstof . .	34,6	34,2	34,3	34,1	—	—	35,6
waterstof. .	4,6	4,5	4,4	4,5	—	—	3,9
chloor . . .	10,4	10,5	—	10,4	10,7	10,7	10,5
natrium . .	—	—	—	17,2	—	—	18,2.

Het geanalyseerde product is hygroscopisch, en een betrekkelijk kleine hoeveelheid water oefent een tamelijk merkbaren invloed uit op het gehalte aan koolstof en waterstof, maar betrekkelijk weinig invloed op dat van chloor. Een lichaam onder zulke omstandigheden ontstaan, waar wel secondaire reacties niet zullen ontbreken, kan toch ook wel bezwaarlijk zuiver zijn. Maar in ieder geval is opmerkingswaardig de overeenkomst in samenstelling, vooral der producten I en II, met het oog op verschillen in de wijze van bereiding.

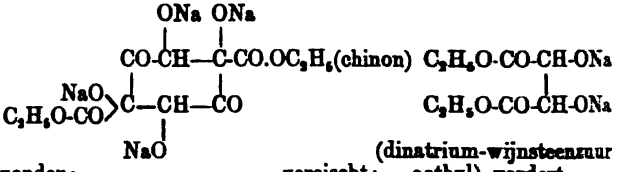
Melden we nog, dat het eenmaal is voorgekomen, dat een product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride, hetwelk weinig oplosbaar was in abs. aether, na verdampen, in betrekkelijk geringe hoeveelheid gaf van een lichaam (overigens genoegzaam dezelfde eigenschappen vertoonende van het vroegere product), dat niet meer bevatte dan ongeveer 2 p.c. chloor; bijgevolg hield deze stof als 't ware geen chloor in als integreerend bestanddeel. Men zou derhalve een mengsel kunnen hebben (zie vroeger) van de oorspronkelijke verbinding zonder en met 1 of 2 mol. aethylchloride.

In geval dit chloride zich bevindt in de (gesloten) keten, waar de resten O Na zich bevinden, zou het zich ongeveer kunnen verhouden als in den regel het geval is met krystalwater; en de waargenomen feiten zouden dan niets bijzonders aanbieden (zie later).

Neemt men het gemiddelde der analysen van I, II en III, berekent vervolgens koolstof- en waterstof-gehalte behoorende tot het chinon (?) en het aethylchloride, dan wordt gevonden voor de samenstelling van het lichaam zonder chloride:

Gemiddelde van I, II en III:		Verdeeling:	Samenstelling van het lichaam zonder chloride:
koolstof. .	34,3	27,1 van het chinon (?) 7,2 van het chloride	27,1
waterstof .	4,5	3,0 van het chinon (?) 1,5 van het chloride	3,0
chloor. . .	10,5		
natrium. .	17,2		17,2
zuurstof. .	33,5		83,5
	100,0		80,8.

Op 100 gew.-d. berekend, is bij gevolg de samenstelling van het chinon? (te weten, in dat geval van tetra-natrium-aethylester):



	gevonden:	vereischt:	(dinatrium-wijnsteenzuur aethyl) vordert:
koolstof. . .	33,5	35,2	38,3
waterstof. .	3,6	2,9	4,8
natrium . .	21,3	22,5	18,4.

Zie hieonder over de samenstelling van het in ether onoplosbare gedeelte.

Samenstelling van het afzetsel. Na oplossen van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride, en verdrijven zooveel mogelijk van dit chloride (zonder afzetsel en oplossing te hebben gescheiden), behandelen vervolgens van het terugblijvende met abs. aether, blijft een gedeelte onopgelost. Laat men dit laatste staan met abs. aether, om dezen daarna te decanteeren, en herhaalt men deze bewerking, tot geen noemenswaardige hoeveelheid aan vaste stof meer oplost, dan blijft een bleekgele bijkans kleurlooze verbinding terug. De waterige oplossing is lichtgeel van kleur en bezit een alkalische reactie, terwijl deze door ferridchloride sterk *kersrood* wordt gekleurd. Geplaatst aan vochtige lucht, vormt dit lichaam een geleiachtige massa. In een woord, deze stof verhoudt zich over 't algemeen, zooals het geval is met het

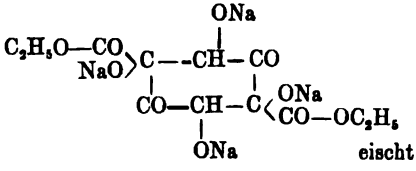
in aether oplosbare product. Een hoeveelheid van 0,7308 gr. gaf 0,9312 gr. kooldioxyde en 0,2436 gr. water;

1,0018 gr. van dezelfde stof gaf 0,0516 gr. chloorzilver (bepaald langs den natten weg, zie vroeger), bevattende 0,01276 gr. chloor.

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met (zie p. 189):

			Samenstelling zonder chloride:
koolstof.	34,7	33,8 van het chinon (?) 0,9 van het aethylchloride	33,8
waterstof	3,7	3,5 van het chinon (?) 0,2 van het chloride	3,5
chloor.	1,3		
natrium en zuurstof.	60,3		60,3
	100,0		97,6.

Voor de samenstelling der verbinding zonder chloride heeft men bij gevolg op 100 gew.-d.:



gevonden:		eischt:
koolstof. .	34,6	35,2
waterstof .	3,6	2,9.

De samenstelling is dus ongeveer dezelfde als die van het in aether oplosbare product zonder chloride.

Men is geneigd, om het verschil tusschen de uitkomsten der analyse en hetgeen de formule eischt ten deele toe te schrijven aan de eigenschap der stof van hygroscopisch te zijn, terwijl de betrekkelijk groote hoeveelheid aether, waarmede deze te behandelen is, met hoeveel voorzichtigheid ook te werk gegaan, al ligt eenig water doet opnemen uit de dampkringslucht Uit het medegedeelde volgt wel met genoegzame zekerheid, dat deze verbinding het afzetsel vormt, ontstaan uit de oplossing van het dinatrium-wijnsteenzuur

aethyl in aethylchloride; toch kan hiervan wat in oplossing blijven. Later zal men moeten nagaan, hoe het komt, dat een deel dezer stof niet is verbonden met aethylchloride, wel het geval naar 't schijnt met een andere hoeveelheid. Wellicht vervult de alcohol, vrij gekomen als gevolg der reactie, hier eenige rol. Zooveel schijnt zeker, dat de massa van afzetsel en oplossing, na onder een exsiccator (met zwavelzuur) te hebben gestaan, en vervolgens in het gedeeltelijk ledig, alcohol verliest, zooals wel blijkt uit de vermeerdering in maat van het zwavelzuur der U-buis, want aethylchloride wordt niet in een noemenswaardige hoeveelheid door zwavelzuur opgenomen.

Analyse van het afzetsel, meer onmiddelijk afgezonderd. Het vloeibaar gedeelte werd zooveel mogelijk afgeheveld, en daarna het afzetsel gewasschen met abs aether.

a. Een hoeveelheid van 0,7644 gr. stof gat 0,9737 gr. kooldioxyde en 0,2584 gr. water (er werd tamelijk innig vermengd met de chromaten).

b. 0,6329 gr. stof gaf 0,8069 gr. kooldioxyde en 0,2121 gr. water (er werd niet innig vermengd met de chromaten).

c. 0,3323 gr. stof gaf 0,0115 gr. chloorzilver, bevattende 0,00284 gr. chloor of 0,8 p.c, dat (berekend als aethylchloride, zie vroeger), geen noemenswaardigen invloed uitoefent op koolstof- en waterstofgehalte.

Berekend op 100 gew.-d. volgt uit *a* en *b*.:

	a	*b*	Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl vordert:
koolstof	34,7	34,8	38,3
waterstof	3,7	3,7	4,8.

Het lichaam is genoegzaam kleurloos. Overigens bezit het dezelfde reacties als dat naar een eenigzins gewijzigde methode gemaakt (zie vroeger). De hoeveelheid verkregen product is evenwel blijkbaar minder, toch is de samenstelling genoegzaam dezelfde, ongerekend eenig verschil in gehalte aan chloor (aethylchloride).

Deelen wij nogmaals mede, dat dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in vochtige lucht geplaatst begint met vloeibaar te

worden, om vervolgens krystallen af te zetten van wijnsteenzuur di-natrium; niet het geval met gemelde produkten (zie vroeger).

Zooals reeds vroeger werd opgemerkt, gebeurt het somwijlen, dat het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride veel minder oplosbaar is in abs. aether. Bij een dusdanig mengsel werd een weinig aethylchloride gevoegd, terwijl men de massa (bij gevolg aether bevattende) gedurende vele weken liet staan, nu en dan schuddende. Bijkans alles werd opgelost (behalve een weinig eener stof). Uit deze proef zou men kunnen afleiden, dat onder gemelde omstandigheden de aanwezigheid van aether de inwerking van het aethylchloride niet tegengaat (zie vroeger); maar het is wenschelijk, om wat voorzichtig te zijn met het trekken van eenig besluit, want een zoo langdurig contact had niet plaats in vroegere proeven.

Een hoeveelheid van 0,7914 gr. van dit product, niet innig vermengd met lood- en kalium-chromaat gaf 0,9642 gr. kooldioxyde en 0,3033 gr. water;

0.9756 gr. van dezelfde stof, innig vermengd, gaf 1.2008 gr. kooldioxyde en 0,3724 gr. water. Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	33,2	33,6
waterstof	4,2	4,2.

Hieruit volgt wel, dat men in hoofdzaak met dezelfde verbinding heeft te doen.

In bereiding III van het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride (bevattende 10,4 p.c. chloor), bleef na verdrijven der overmaat van aethylchloride (bij gewone temp.) een gomachtige massa terug van 9,318 gr., in het gedeeltelijk waterstof-ledig herleid tot 7,897 gr. (bij gewone temp.), dus verliezende 1.421 gr. van het chloride. Verondersteld, dat dit laatste op 1 mol. chinon bevat 1½ mol. aethylchloride (zie vroeger), dan zouden deze 7,897 gr. bevatten 1,512 gr. chloride, dat met het vervluchtigde, zijnde 1,421 gr., uitmaakt de som van 2,933 gr.. Berekend op het mol.-gew. van het chinon ($M = 407,08$), vindt men

187 gew.-d. aethyl-chloride, terwijl de theorie voor $3\,C_2H_5Cl$ vordert 192,93 gew.-d. ($= 3 \times 64,31$; M van C_2H_5Cl is 64,31).

In bereiding III (bevattende 10,7 p.c. chloor), bleef na behandeling in het gedeeltelijk ledig 7,968 gr. over van de oorspronkelijke hoeveelheid 9,155 gr., dus een verschil gevende van 1,187 gr.. Als boven berekend, bevatten deze 7,968 gr. aan aethylchloride 1,526 gr., dat de som uitmaakt van $1,187 + 1,526 = 2,713$ gr.. Op 1 mol. chinon heeft men bij gevolg 171 gew.-d. chloride, terwijl, als gezegd, de theorie voor $3\,C_2H_5Cl$ eischt 192,93 gew.-d.. In de laatste proef was de massa van den aanvang af een weinig gedissocieerd, als gevolg van het verdrijven van het vrije chloride, in den toestel aanwezig, door droge lucht (de gomachtige massa vertoonde toen barsten, en werd ten deele ondoorschijnend); de hoeveelheid van 171 gew.-d. zal dus wat te laag zijn. In de eerste proef daarentegen was geen droge lucht doorgelaten, en bij gevolg zal 1,421 gr. wat te groot zijn, en de uitkomst van 187 gew.-d. dus ook eenigermate te hoog zijn.

Over de standvastigheid der verbindeng. Men wenschte te weten, of het aethylchloride is te scheiden van het lichaam. Bij verhitten in het gedeeltelijk ledig (van waterstof) bij 60°, schijnt het lichaam niet merkbaar te worden veranderd, wel het geval tusschen 60°—90° en bij 90°, in welk geval van eenig gas vrijkomt (met 't oog op de analyse wellicht aethylen C_2H_4). Een hoeveelheid van ongeveer 6 gr. der oorspronkelijke stof werd herleid tot 5,4 gr., derhalve had een verlies plaats van 0,6 gr.. Het product was een weinig van kleur veranderd, die van geel veeleer rood-bruin was geworden, daarentegen was het oorspronkelijk karakter bewaard gebleven, oplosbaarheid in abs. aether, enz.. Bij analyse verkreeg men de volgende uitkomsten:

Een hoeveelheid van 0,9043 gr. gaf 1,1097 gr. kooldioxyde en 0,3208 gr. water (de stof werd niet innig vermengd met de chromaten van lood en kalium);

0,8153 gr. van hetzelfde product (innig vermengd) gaf 1,0143 gr. kooldioxyde en 0,3025 gr. water;

1,4536 gr. der stof (niet innig vermengd met kalk) leverde op 0,6744 gr. chloorzilver, bevattende 0,1667 gr. chloor;

0,4565 gr. vormde 0,2127 gr. Na Cl (na behandeling met verdund zoutzuur van het na gloeiing terugblijvende, zijnde 0,2012 gr.), een bepaling verricht door den Heer L. E. O. d. V..

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

koolstof	33,5	33,9
waterstof	3,9	4,1
chloor	11,5	—
natrium	18,3	—

Het resultaat is bij gevolg, dat aethylchloride onder deze omstandigheden niet is te verwijderen.

Product van inwerking van chloorwaterstofgas op de oorspronkelijke verbinding in aetherische oplossing. Er werd uitgegaan van de verbinding die 33,2 en 33,6 proc. koolstof gaf (zie pag. 193); deze was volkomen oplosbaar in abs. aether. De oplossing vormt bij behandeling met zoutzuurgas (in overmaat) een meer of min geleiachtige massa, zonder een ontstaan van chloornatrium Cl Na te vertoonen. Geplaatst onder een exsiccator (met SO_4H_2 en Ca O), bleef een *gomachtig* product terug (doorschijnend), bij ongeveer 20^0 veeleer tusschen vast en vloeibaar in, met licht gele kleur en fluoresceerende.

Een hoeveelheid van 0,9452 gr. dezer stof werd behandeld met water, gefiltreerd van eenig olieachtig lichaam (*B*; zie vroeger), de oplossing zuur gemaakt met salpeterzuur, en neêrgeslagen met zilvernitraat; er werd verkregen 0,9847 gr. chloorzilver, bevattende 0,2435 gr, chloor.

0,8791 gr. dezer stof gaf 0,9401 gr. kooldioxyde en 0,3177 gr. water.

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

		1 mol. van het (diaethyltetranatrium-)chinon + 1½ C_2H_5Cl + 3 H Cl. eischt:
koolstof	29,2	29,3
waterstof.	4,0	3,7
chloor.	25,8	25,9.

Hieruit zou dan kunnen volgen, dat zoutzuurgas aethylchloride niet uitdrijft. De overeenstemming dezer cijfers met de formule is opmerkingswaardig, maar niet afdoende. Ook zou met recht mogen verwacht worden, dat in plaats van 3 H Cl zouden zijn vastgelegd 4 H Cl.

Opmerkingswaardig is, dat de verhouding tusschen koolstof en waterstof ongeveer die is vereischt voor 1 mol. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl + 2 H Cl, waarvan de samenstelling de volgende is (zie lager):

koolstof	29,4
waterstof	4,3
chloor	21,6.

De waterige oplossing bezit slechts een zeer zwak zure reactie, en er zet zich een zware vloeistof af (lichaam *B*). Behandeld met zuiveren alcohol, blijft een geleiachtige massa terug, terwijl na filtratie en verdamping een lijvige zwak roodbruin gekleurde vloeistof overblijft (bevattende 1,2 p c. chloor). Met gewonen abs. alkohol geeft het (oorspronkelijk) product een massa, die eerst na toevoeging van een weinig water helder is te filtreeren. Geplaatst onder een exsiccator, blijft evenzoo een siropige massa terug. 0,7781 gr. dezer stof leverde 1,3215 gr. kooldioxyde en 0,4534 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

		wijnsteenzuur aethyl vordert:	de ester van het chinon eischt:
koolstof . . .	46,3	46,6	45,0
waterstof. . .	6,5	6,8	5,0.

Bij uittrekken van het (oorspronkelijk) product met abs. aether, wordt na filtratie en verdamping een lijvige vloeistof erlangd. Een hoeveelheid van 0,7125 gr. gaf 1,2596 gr. kooldioxyde en 0,417 gr. water, op 100 gew.-d. beantwoordende aan:

koolstof	48,2
waterstof	6,5.

Ook deze lichamen doen met water een zware vloeistof

afzetten, die na eenigen tijd wordt opgelost, en met ferridchloride een kersroode verkleuring geeft.

Het oorspronkelijk product (der reactie met chloorwaterstofgas) laat na behandeling met aether een geleiachtige massa terug, zonder eenig afzetsel van gekrystalliseerd chloornatrium, ook behoudt de massa nagenoeg den oorspronkelijken vorm. Na verdampen van den aether blijft een amorphe kleurlooze massa terug, die zeer gemakkelijk vervloeit. Een hoeveelheid van 0,647 gr. dezer stof gaf 0,0632 gr. kooldioxyde en 0,0388 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof.	2,7
waterstof	0,7

De siropige massa met aether afgezonderd, werd in het gedeeltelijk luchtledig verhit. Nabij ongeveer 100° ging van een kleurlooze vloeistof over. Geanalyseerd werd hetgeen overging bij 110°—120° (*a*), bij 120°—130° (*b*), en bij 120°—130° (*c*); ten slotte ging nog wat over bij 130°—140°, maar tusschen 140°—150° geen noemenswaardige hoeveelheid meer.

a. 0,7467 gr. gaf 1,325 gr. kooldioxyde en 0,4712 gr. water.

b. 0,9444 gr. leverde 1,707 gr. kooldioxyde en 0,5999 gr. water.

c. 0,6919 gr. gaf 1,2722 gr. kooldioxyde en 0,4711 gr. water. Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

	a	*b*	*c*
koolstof . .	48,4	49,3	50,1
waterstof . . .	7,0	7,0	7,5.

Wijnsteenzuur aethyl destilleerde niet. Het vloeibare product is eerst na eenigen tijd oplosbaar in water; met ferridchloride geeft het een roode verkleuring. In de retort blijft een gekleurde siropige massa terug, oplosbaar in aether en alcohol, onoplosbaar in water.

Uitgaande van 17 gr. van het oorspronkelijk dikvloeibare lichaam, destilleerde in het gedeeltelijk luchtledig, alles te

zamen genomen, ongeveer 4 gr. van de kleurlooze vloeistof, terwijl zich eenig gas ontwikkelde. Dit gas zal wel zijn kooldioxyde, en bij behandeling van het eerste product met chloorwaterstofgas schijnt ook van dit gas vrij te komen, lettende op de analytische gegevens van het lichaam voor en na behandeling met chloorwaterstof, en op de analysen van het dikvloeibare product met aether afgezonderd. Op 't oogenblik kan nog niet worden gezegd, of dit ontledingsproduct brandigdruivenzuur aethyl is of eenige andere verbinding. Het is bijna ondoenlijk, om een dusdanige hoeveelheid te ontleden van het product van uitgang, met chloorwaterstofgas, dat men in staat zou zijn, van de vloeistof genoeg te bekomen ter nadere zuivering, zooveel tijd vorderen daartoe de vereischte bereidingen.

Verzeeping van het in aether oplosbare product. Er werd uitgegaan van een product dat 10,6 p. c. chloor bevat en dit gedaan bij een waterige oplossing van bijtende soda in een dusdanige verhouding, dat er op 1 Cl voorhanden waren 2 Na OH (0,806 gr- natrium werd opgelost in 12 c.c. water, en hierbij gevoegd 5,55 gr. van gezegd product). Aanvankelijk ontstaat een geleiachtige massa, die geheel wordt opgelost (gekleurd door ferridchloride), om na eenigen tijd een weinig van een krystallyne stof af te zetten. Na decanteeren, doet alcohol er een vloeibaar lichaam uit afzetten, dat niet in krystallynen staat overgaat. De moederloog werd afgeschonken, en het afzetsel na oplossen in water geplaatst onder een exsiccator, waarbij een gomachtige massa terugbleef.

BESLUIT.

1. De oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride doet na eenigen tijd een afzetsel ontstaan. Na decanteeren der oplossing geplaatst onder een exsiccator, en daarna in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), blijft een amorph product (*a*) terug met gele kleur, *oplosbaar*

n abs. aether. De aetherische oplossing laat na verdampen van den aether een product terug van dezelfde samenstelling *) als het oorspronkelijk product (*a*). Het bevat chloor (ongeveer 10 p.c.), en wel onder den vorm van aethylchloride; ook komt van dit chloride vrij uit de massa in vacuo, na onder den exsiccator te zijn vast geworden. Geplaatst in vochtige lucht, wordt product *a* geleiachtig, en in waterige of in alcoholische oplossing door ferridchloride kersrood gekleurd.

Verhit in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), doet product *a* geen aethylchloride vrijkomen (in noemenswaardige hoeveelheid), maar van een ander chloorvrij gas, zooals wel schijnt te volgen uit de analyse †) (zie later 6.).

2. Wordt oplossing en afzetsel aanvankelijk geplaatst onder een exsiccator, vervolgens in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), en daarna de terugblijvende massa behandeld met abs. aether, dan blijft een genoegzaam kleurloos lichaam terug §) (bij gevolg onoplosbaar in aether), dat zeer weinig chloor bevat (in den vorm van aethylchloride), en als verontreiniging is te beschouwen.

Aan vochtige lucht blootgesteld, vormt ook dit product een geleiachtige massa, terwijl de waterige oplossing door ferridchloride eveneens kersrood wordt gekleurd.

Men bekomt eenzelfde product **) door de oplossing te decanteeren van het afzetsel, en dan dit laatste met abs. aether te wasschen. De samenstelling dezer producten is wel dezelfde als die van het lichaam in oplossing gebleven (namelijk in aethylchloride), ongerekend het gehalte van chloor in den vorm van aethylchloride ††. Hieruit zou men kunnen besluiten, dat het mechanisme der reactie betrekkelijk eenvoudig zal wezen.

3. De oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in

---

*) Zie deze Verhandeling p. 186, 187.

†) l. c. p. 194.

§) l. c. p. 190.

**) l. c. p. 192.

††) l. c. p. 190.

aethylchloride wordt niet neêrgeslagen door abs. aether. Maar vangt men aan met het toevoegen van aether, en doet er vervolgens aethylchloride bij, dan wordt dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *niet* opgelost, De aether schijnt zich dus meester te maken van het aethylchloride; of, anders uitgedrukt, de verbindingspanning van den aether wint het van die van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *).

4. Wordt een aetherische oplossing van product *a* behandeld met chloorwaterstofgas, dan wordt het geheel meer of min geleiachtig. Geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk) blijft een eenigzins geleiachtige doorschijnende massa terug. Abs. aether zondert er een dikvloeibaar lichaam uit af; dit werd geanalyseerd, *terwijl chloornatrium amorph* terugblijft in den vorm der oorspronkelijke massa, nog een kleine hoeveelheid van een andere stof bevattende †).

5. Voegt men aethylchloride bij dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, alvorens den alcohol te verwijderen, dan is de uitkomst genoegzaam dezelfde, als ware geen aethylchloride aanwezig (overigens denzelfden weg volgende als bij de bereiding van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl).

6. Men moet bijgevolg aannemen, dat er een systeem van evenwicht bestaat tusschen

dinatrium-wijnsteenzuur aethyl,
aethylchloride,
de ontstane verbinding en
alcohol,

hetwelk in 't algemeen de bekende regels zal volgen. De aanwezigheid van alcohol gaat de reactie tegen, als die van aethylchloride haar bevordert.

Men stelt zich voor, om deze onderzoekingen te vervolgen, en te trachten het scheikundig mechanisme der reactie meer

*) l. c. 185.
†) l. c. 195.

e leeren kennen in een volgende verhandeling, terwijl in leze bladzijden veeleer analytische gegevens zijn medegedeeld. Iet onderwerp is betrekkelijk nieuw, en de hoeveelheid verbindingen, die zouden kunnen optreden, zóó groot, dat ook de voorzichtigheid gebiedt, om het theoretisch gedeelte nog wat te laten rusten.

Utrecht, 25 October 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 November 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, VAN DIESEN, VAN RIEMSDIJK, SCHOUTE, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, WEBER, VAN DER WAALS, MARTIN, VAN BEMMELEN, PEKELHARING, KORTEWEG, ZEEMAN, STOKVIS, MOLL, HOEK, SCHOLS, BAEHR, LORENTZ, BIERENS DE HAAN, KOSTER, MICHAËLIS, MAC GILLAVRY, BAKHUIS ROOZEBOOM, ZAAIJER en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— De Voorzitter opent de Vergadering.

— De Secretaris leest den brief van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (23 November 1890), waarin der Academie wordt kennis gegeven van het overlijden van Zijne Majesteit Willem III, onzen geëerbiedigden en geliefden Koning, op den 23en November j.l.

De Voorzitter rijst van zijn zetel op en richt tot de Vergadering, die hem staande aanhoort, het volgende woord:

»Mijne Heeren! Er zijn dagen van rouw, waarin men behoefte gevoelt te spreken en elkander te wijzen op de grootte van het geleden verlies, maar er zijn ook rouwdagen,

waarin dat verlies zoo sterk, zoo algemeen wordt gevoeld, dat het onnoodig is zijn omvang te schetsen en in plaats daarvan een eerbiedig zwijgen passend is.

Dit is zeker thans het geval, nu de Akademie den dood te betreuren heeft van hem, die haar door zijn koninklijk woord in het leven riep; nu wij Nederlanders den Vorst zagen heengaan, onder wiens ruim 40-jarige regeering ons Vaderland op zoo menig gebied, zeker niet het minst op dat der wetenschappen, zich krachtig heeft kunnen ontwikkelen; nu wij den laatsten mannelijken afstammeling uit het geslacht der Oranjes, waarmeê ons geheele volksbestaan zoo nauw verbonden is, welhaast zullen zien ten grave dalen bij den grooten Zwijger.

Doch bij die droeve klachte kan zich gelukkig een opgewekte toon voegen, als wij, met een hoopvollen blik in de toekomst, denken aan de jeugdige Vorstin, op wier schouderen thans reeds het koninklijke kleed rust; op haar, die door het geheele Nederlandsche volk vol liefde en eerbied als Koningin begroet wordt.

Moge het onzer koningin Wilhelmina, aanvankelijk geleid en gesteund door hare edele moeder, gegeven zijn, lange jaren de gelukkige Vorstin van ons volk te wezen, en hare regeering zich kenmerken door een krachtig wetenschappelijk leven in Nederland en een vruchtbaren arbeid onzer Akademie".

De Voorzitter verklaart, dat heden enkel eenige zaken zullen worden afgedaan, die geen uitstel gedoogen, en dat de zitting daarna zal worden opgeheven.

Een antwoord aan Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken is reeds opgezonden en een brief van rouwbeklag voor H. M. de Koningin-weduwe wordt door het Bestuur ontworpen.

— De Heer Michaëlis leest het rapport, 't welk strekken moet als antwoord op den brief des Ministers van Binnenlandsche Zaken van 15 Aug. ll., waarin gehandeld wordt over een internationaal congres te Parijs, ter vaststelling

van een eersten meridiaan, liefst dien van Jeruzalem. De Commissie, waarvan de heer MICHAËLIS voorzitter is, stelt, op nader ontwikkelde gronden, voor, aan den Minister te antwoorden. dat het der Afdeeling wenschelijk voorkomt, aan de Italiaansche Regeering te kennen te geven, dat het min verkieslijk schijnt om, hangende de quaestie van de keuze van den eersten meridiaan, bij de twee, waarvan thans sprake is, nog een derden voor te stellen en daardoor de kans op spoedige overeenstemming nog te verminderen. — De conclusie van het rapport wordt aangenomen.

Een tweede rapport, door dezelfde Commissie uitgebracht, heeft betrekking op twee missiven van den Minister van Binnenlandsche Zaken: ééne van 31 Oct. 1890, »*over eene nieuwe tijdregeling van bepaalde gedeelten van Europa*", en eene andere van 18 Nov. 1890 „*over de invoering van eenheid van tijd bij de spoorwegadministratiën*": onderwerpen dus van ongeveer gelijksoortige strekking. — Op nader ontwikkelde gronden stelt de Commissie voor, dat de Afdeeling den Minister verzoeke het daarheen te leiden, dat:

1°. aan den Belgischen Gezant geantwoord worde dat de Nederlandsche Regeering voornemens is machtiging te geven tot het invoeren van de nieuwe tijdsregeling, bijaldien dit door België en Duitschland gedaan wordt;

2°. dat de Maatschappij tot exploitatie van Staatsspoorwegen worde gemachtigd om toe te treden tot de regeling, voorgesteld door het Verein der Deutschen Eisenbahnverwaltungen; en

3°. dat, bij eventueele invoering der nieuwe regeling, deze ook worde toegepast bij de telegraphie en bij de uurwerken der verschillende gemeenten.

Het voorstel der Commissie wordt zonder discussie aangenomen.

De Secretaris deelt mede, dat bij hem is ingekomen een schrijven van den Heer J. A. C. OUDEMANS, ter begeleiding van eene verhandeling van den Heer E. ENGELENBURG,

Civiel-Ingenieur te Utrecht, getiteld: „Hyetographie van Nederland", ter plaatsing in de werken der Akademie. De Voorzitter verzoekt de Heeren J. A. C. OUDEMANS en VAN DIESEN daarover in de in de volgende vergadering rapport uit te brengen.

— De vergadering wordt gesloten.

Door den Heer VAN DER WAALS wordt, na het sluiten van de Vergadering, aan den Secretaris overhandigd de volgende:

Mededeeling van den Hr. Dr. W. H. JULIUS *te Utrecht.*

Volgens de spectrobolometrische methode *) werd de selectieve absorptie van warmtestralen door verschillende vloeistoffen nagegaan †). Het onderzoek strekte zich uit over stralen, wier golflengte 1 tot 20 μ bedraagt, en had hoofdzakelijk ten doel, eenig verband op te sporen tusschen de kenmerkende trillingsperioden en de chemische samenstelling der moleculen.

De vloeistoffen bevonden zich in een absorptievat, vervaardigd uit één stuk klipzout en zóó ingericht, dat men door het inbrengen van zoutplaten lagen van verschillende dikte aan de proef kon onderwerpen. Voor het onderzoek van water diende een vat met wanden en inzetstukken van vloeispaat, welk materiaal voor stralen van 0 tot 11 μ beschouwd kan worden als volkomen diathermaan.

Van de volgende lichamen werd het absorptiespectrum bepaald:

---

*) De gebruikte toestellen waren, behoudens kleine wijzigingen, die welke men beschreven vindt in: W. H. JULIUS, „Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase". Leipzig 1890, LEONHARD SIMION.

†) KNUT ÅNGSTRÖM heeft in een onlangs verschenen verhandeling over de warmteabsorptie van eenige gassen en dampen (*Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* 1890 No. 7, Stockholm) aangetoond, dat aether, benzol en zwavelkoolstof in vloeibaren toestand absorptiespectra bezitten, welke met die der bijbehoorende dampen in hoofdzaak overeenstemmen, hoewel sommige maxima een weinig verschoven zijn.

water,
verzadigde oplossing van keukenzout in water,
methylalcohol,
aethylalcohol,
propylalcohol,
butylalcohol (normaal),
» (iso-),
amylalcohol,
aethylmercaptaan,
aethylaether,
hexaan (normaal dipropyl),
benzol,
zwavelkoolstof,
verzadigde oplossing van zwavel in zwavelkoolstof,
tetrachloorkoolstof,
chloroform,
tetrachloorsilicium,
siliciumchloroform,
bromoform,
chloorzwavel (verzadigd met zwavel),
phosphortrichloride.
—
koolstof (diamant).

Bij al deze stoffen vertoont het warmtespectrum twee of meer duidelijke absorptiebanden, in tegenstelling met de vroeger onderzochte emissiespectra van gloeiende gassen, waar steeds een enkel maximum sterk op den voorgrond trad.

Verder bleek, dat de gedaante der absorptiekrommen (welke ontstaan als men de deviatie als abscis, de in procenten uitgedrukte absorptie als ordinaat kiest) niet alleen afhangt van den aard der elementen, waaruit de verbinding is opgebouwd, maar evenzeer van de wijze, waarop de atomen in het molecuul gerangschikt zijn, van de structuur.

Zoo vertoonen de eerste vijf alcoholen der vetzuurreeks, die uit dezelfde elementen zijn opgebouwd en bovendien groote overeenkomst in constitutie bezitten, absorptiekrommen wier gedaante slechts weinig uiteenloopt. Bij alle vindt men een zeer sterk maximum, waarvan de golflengte omstreeks 3,47 μ bedraagt, terwijl (door een laag van 0,2 mM. dikte) de golven $> 9\ \mu$ nagenoeg geheel worden teruggehouden. Duidelijk merkbare verschillen bestaan echter bij deze alcoholen in de plaats en de intensiteit van zwakkere absorptiebanden, die tusschen de genoemde gelegen zijn.

Het spectrum van aethylmercaptaan wijkt van dat van aethylalcohol aanmerkelijk af, hoewel in sommige opzichten

overeenkomst behouden blijft. Het invoeren van een ander element, bij behoud van gelijke structuur, heeft dus hier grooteren invloed op den aard der moleculaire bewegingen dan bijv. de overgang van $C_2 H_5 . OH$ op $C_5 H_{11} . OH$, hoewel daarbij het aantal atomen in het molecuul verdubbelt.

Maar ook ten gevolge van verschil in structuur bij verbindingen, wier empirische formulen niet of slechts weinig van elkaar verschillen, kan de absorptiekromme een geheel ander aanzien verkrijgen. Dit blijkt bij de beschouwing der spectra van butylalcohol en aethylaether, van hexaan en benzol.

Intusschen schijnt een bepaald maximum ($\lambda = 3{,}47\ \mu$) in meer of minder sterke mate bij alle lichamen, die $C_x H_y$ bevatten, voor te komen en bij alle andere te ontbreken. Bij benzol, chloroform en bromoform is het echter een weinig verschoven.

De sterke absorptieband van diamant, gelegen bij $\lambda = 5{,}1\ \mu$, was in het spectrum van geen der onderzochte koolstofverbindingen terug te vinden.

Uit de in vorm zeer uiteenloopende absorptiekrommen der overige vloeistoffen (die alle eenige scherpgeteekende maxima bezitten, waarvan enkele aan verschillende spectra gemeen zijn) kunnen nog niet met eenige zekerheid algemeene gevolgtrekkingen worden afgeleid. Omtrent de bijzonderheden moeten wij dus verwijzen naar het uitvoerig verslag der waarnemingen, dat binnen korten tijd aan de Akademie zal worden aangeboden.

RAPPORT

OVER HET

AAN DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN TE GEVEN ANTWOORD OP Z. EXCs. BRIEF VAN 15 AUGUSTUS 1890,

WAARIN GEHANDELD WORDT

OVER HET KIEZEN VAN EEN EERSTEN MERIDIAAN.

De Koninklijke Academie van Wetenschappen te Bologna heeft in overweging gegeven om als aanvangpunt voor de bepaling van de lengten, in overeenstemming met het begin der tijdrekening, bij alle beschaafde volken in gebruik, aan te nemen den meridiaan van Jerusalem.

Het gronddenkbeeld dier Academie wordt in het »Exposé des raisons appuyant la transaction proposée" aldus weêrgegeven:

»Partant, l'Académie des Sciences de Bologne suggère, »de fait, *qu'on n'innove rien de ce qui se pratique aujour-»d'hui, mais qu'on se borne à ajouter, sur les dépêches télé-»graphiques* à côté de l'heure locale de la station, soit du »départ, soit de l'arrivée, l'heure du méridien de Jérusalem."

In de vergadering van 24 Februari 1883 had de Commissie, door de Academie benoemd, de eer te adviseeren, de lengten op de zeekaarten en de tijdsopgaven in de zeevaartkundige almanakken naar eenzelfden meridiaan te regelen.

De conferentie te Washington heeft zich in het algemeen voor de invoering van den meridiaan van Greenwich als

eersten meridiaan verklaard en de Nederlandsche Gemachtigde ter conferentie heeft zich met dit votum vereenigd. De Fransche afgevaardigden hadden daartegen bezwaar en onthielden zich met dien van Brazilië van stemming, terwijl alleen de afgevaardigde van San Domingo tegenstemde. Het voorstel, dat nu van de Academie van Bologna uitgaat, heeft blijkbaar in hoofdzaak ten doel, den twistappel weg te nemen, doch door den omvang, waartoe dit voorstel beperkt is, schijnt het zeer twijfelachtig of dit doel wel zal worden bereikt.

Aan de wenschelijkheid van het aannemen van eenzelfden meridiaan wordt niet meer getwijfeld, en het oogenblik zal eenmaal aanbreken dat daartoe ook voor andere aangelegenheden dan die der telegraphie wordt overgegaan. Indien echter het voorstel van Bologna werd aangenomen, zou daarvan geen ander gevolg te wachten zijn, dan dat men, wanneer dat oogenblik dáár zal zijn, het aantal meridianen, waartusschen gekozen moet worden, met één vermeerderd, en dus de zaak, wel verre van haar te vereenvoudigen, nog ingewikkelder heeft gemaakt.

Op dien grond zoude de Commissie der Afdeeling in overweging willen geven, den minister voor te stellen, aan de Italiaansche Regeering te antwoorden, dat het min verkieslijk schijnt om, hangende de quaestie van de keuze van den eersten meridiaan, aan de twee, waarvan thans sprake is, nog een derden toe te voegen, en daardoor de kans op spoedige overeenstemming nog te verminderen.

MICHAËLIS.
CH. M. SCHOLS.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

RAPPORT

OVER HET

AAN DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN TE GEVEN ANTWOORD OP Z. EXCs. BRIEVEN VAN 31 OCTOBER EN 18 NOVEMBER 1890,

WAARIN GEHANDELD WORDT

OVER HET INVOEREN VAN EENE NIEUWE TIJDREGELING VOOR BEPAALDE GEDEELTEN VAN EUROPA EN OVER DE INVOERING VAN EENHEID VAN TIJD BIJ DE SPOORWEGADMINISTRATIËN.

Bij brieven van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 31 October en 18 November jl., Nos. 2334 en 2478, afd. Kunsten en Wetenschappen, werd de Academie uitgenoodigd haar gevoelen mede te deelen betreffende voorstellen tot invoering eener nieuwe tijdregeling voor bepaalde gedeelten van Europa en tot invoering van eenheid van tijd bij de spoorwegadministratiën.

Aangezien beide vragen op geheel gelijksoortige onderwerpen betrekking hebben, kwam het ons wenschelijk voor die gelijktijdig te behandelen, en hebben wij de eer daarop te antwoorden.

Het is wenschelijk dat in een Rijk, vooral van zoo geringen omvang als Nederland, niet naar meer dan één spoorwegtijd worde gerekend, en uit Art. 3 van het Algemeene Reglement voor den dienst op de spoorwegen blijkt, dat ook de Regeering daarvan overtuigd is.

Ontegenzeggelijk behooren de uurwerken voor den telegraaf hetzelfde uur aan te wijzen als die der spoorwegen, en hoogst wenschelijk is het, dat die der gemeenten, en dus ook die van het dagelijksch leven, naar denzelfden tijd geregeld worden.

Welke de meridiaan is, waarnaar het uur bepaald wordt, is, binnen zekere grenzen, tamelijk onverschillig. Regelde men zich tot nu toe volgens den meridiaan van Amsterdam, niets belet om zich in het vervolg te regelen naar dien van Greenwich, daar het verschil in tijd zich tot ongeveer 20 minuten bepaalt; maar er kan geene andere reden zijn om tot die wijziging over te gaan dan deze, dat men daardoor gelijke tijdsaanwijzing verkrijgt als de naburige volken.

Wanneer dus België en Duitschland hun spoorwegtijd naar den meridiaan van Greenwich regelen, brengt het belang van Nederland mede, dit eveneens te doen; maar zoo lang die Staten, en vooral Duitschland, niet tot dien maatregel overgaan, bestaat daartoe ook hier geen grond.

De Afdeeling geeft mitsdien in overweging, den Minister te adviseeren om het daarheen te leiden:

1°. dat aan den Belgischen gezant geantwoord worde, dat de Nederlandsche Regeering voornemens is machtiging te geven tot het invoeren van de nieuwe tijdsregeling, bijaldien hetzelfde door België en Duitschland gedaan wordt;

2°. dat de Maatschappij tot exploitatie van Staatsspoorwegen worde gemachtigd om toe te treden tot de regeling, voorgesteld door het Verein der Deutschen Eisenbahnverwaltungen; en

3°. dat, bij eene eventueele invoering van de nieuwe regeling, deze ook worde toegepast bij de telegrafie en bij de uurwerken der verschillende gemeenten.

MICHAËLIS.
CH. M. SCHOLS.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

VERSLAG

AAN DE

NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN,

OMTRENT DE

VERHANDELING VAN DEN INGENIEUR VAN DE WATERSTAAT

J. C. RAMAER.

DE OMVANG VAN HET HAARLEMMERMEER EN DE MEREN WAARUIT HET ONTSTAAN IS.

Deze verhandeling bevat eene uitvoerige kritische studie over de geschiedenis van het Haarlemmermeer.

Bij de beoordeeling daarvan moet de opmerking vooraf gaan, dat omtrent: den tijd waarin de drie oorspronkelijke meren (Spiering—Haarlemmer—Leidsche) vereenigd zijn — de uitgestrektheid van het verzwolgen land — de oorzaken van het landverlies — het aantal der verdwenen dorpen enz. enz. — tot nog toe veel onzekers was overgebleven.

De schrijver heeft door zijn onderzoek bewezen, dat vele dwalingen en verkeerde voorstellingen hetzij door de overlevering zijn overgebracht, hetzij door vroegere kaartenteekenaars en schrijvers uit gebrekkige gegevens waren afgeleid.

Hij heeft daarvoor in de eerste plaats al de voorhanden kaarten opgespoord en aan een nauwkeurig kritisch onderzoek onderworpen, ten opzichte van derzelver oorspronkelijkheid, ouderdom en vertrouwbaarheid. (H. III—VI.) Voorts heeft hij alle historische verklaringen en getuigenissen verzameld en onderzocht, die omtrent den toestand van de

meren en van hunne oevers in de archieven van het Rijk, Rhijnland, Delfland, Haarlem, Leiden, Amsterdam en de kaartenverzameling Bodel Nijenhuis te vinden waren (H. VII—VIII).

Daarop laat hij eene algemeene beschouwing volgen over de oorzaken, die landverlies aan de oevers der veen-meren kunnen voortbrengen of wel verhoeden, voor zoover die uit de waarnemingen op verschillende plaatsen in het Hollandsche veengebied kunnen afgeleid worden (H. IX).

Die beschouwingen past hij kritisch toe op de geschiedenis van het Haarlemmermeer, zooals hij die uit al de door hem verzamelde gegevens heeft samengesteld, wat betreft: de afgesleten of weggeslagen stukken, de oevers, de vereeniging der drie meren, en de uitbreiding van het gansche meer (H. X—XV). Ten slotte stelt hij een onderzoek in naar den toestand van Rhijnland in de middeleeuwen, en naar de oorzaken waardoor de Leidsche Rhijn in haar tegenwoordig bed is gekomen, gedurende het tijdvak dat door den Romeinschen tijd en de verstopping des Rhijnmonds begrensd wordt (H. XVI—XVII).

Uit de grafelijke rekeningen, uit de Informaciën en Enquesten van 1494 en 1514, uit de oude lijsten (Blaffers) van de goederen van Utrecht's bisdom, Egmond's klooster enz. enz. betreffende de ambachten en hunne grenzen in de middeleeuwen en tot in de 17e eeuw, heeft hij het vraagstuk trachten op te lossen, hoe het met de bewoning gesteld is geweest, zoowel van de omstreken der drie meren, als met die van het later verdwenen land.

Al deze gegevens, historische en physische heeft de schrijver met elkander in verband gebracht, en daaruit uitvoerig betoogd:

1e. dat de oude overlevering zeer overdreven is;

2e. dat de oeverlijnen, zooals die op de kaart van Bolstra in het verloop der zestiende eeuw zijn opgegeven, geheel foutief zijn;

3e. dat de geheele vereeniging der meren allengs heeft plaats gehad, en vooral verhaast is na de doorbraken der tusschengelegen strooken lands, welke op 1472 en 1509 moeten gesteld worden;

4e. dat geene andere dorpen verdwenen zijn dan Rietwijk en Nieuwerkerk na 1500;

5e. dat het verdwenen land zeer schaarsch bewoond is geweest, en behalve tot wei- en hooiland vooral tot verveening gediend heeft, welk verveenen het geheele verlies bevorderd en verhaast heeft. Op eene kaart heeft de schrijver een tal van oeverlijnen uit het tijdperk van 1250—1850 geconstrueerd, waaruit tevens de grootte van het verdwenen land, de omvang der drie meren en later van het vereenigde meer blijkt, en in bunders berekend wordt.

Een tal van kaarten is ter toelichting bijgevoegd.

Het lijdt geen twijfel, dat deze uitvoerige kritische studie, omtrent de veranderingen die een deel van Hollands bodem (het eigenlijke Holland) heeft ondergaan in historischen tijd, van groot belang is, en ook voor de geschiedenis der vervormingen van de gansche laagveen-vorming in Nederland eene algemeene beteekenis heeft. Bovendien mag het onze sympathie en toejuiching verdienen, dat na den arbeid van Acker Stratingh, Venema, Westerhoff, Mr. H. J. Andreae, Mr. G. de Vries, en anderen, de geschiedenis van den bodem onzes lands opnieuw ter hand genomen is door een onzer Waterstaats-ingenieurs, die aan het hydrographisch onderzoek een historischen arbeid heeft verbonden, en zich daarvoor eene uitvoerige en tijdroovende bronnenstudie getroost.

Over de wijze, waarop de schrijver dezen arbeid heeft uitgevoerd, mag ons oordeel gunstig luiden.

Het komt ons voor, dat de kritiek der verschillende oude kaarten zeer goed is, en dat het den schrijver is gelukt de oorzaken en den gang van het landverlies in bijzonderheden op te sporen. Wat het historische gedeelte betreft, zoo hebben wij gemeend ons niet op ons eigen oordeel te mogen verlaten, en daarom het advies te moeten inwinnen van ons medelid der letterkundige Afdeeling Prof. Fruin, die ons dit, nevens eenige belangrijke historische aanwijzingen, met de meeste welwillendheid heeft geschonken. Zijn oordeel is gunstig. Hij betuigt zijne instemming met des schrijvers kritiek van de kaarten, en

oordeelt de historische bescheiden en getuigenissen belangrijk en goedgekozen. Hij acht de geschiedenis van het Meer door dezen arbeid thans voor het eerst in de bijzonderheden vastgesteld, al blijven er naar zijn inzien enkele twijfelachtige punten over. Zoo bijv. schijnt schrijvers meening, dat voor het afdammen van het Spaarne de afslag van het meer gering zoude geweest zijn, in strijd met het aanleggen van den Wendeldijk en met het aanleggen van dien dijk vóór 1297. Zoo wordt ook niet verklaard uit welke oorzaak tijdens Karel den Stoute de strook lands tusschen de Haarl. en Leidsche Meren zoo snel weggeslagen werd, terwijl de oorzaak van het verdwijnen van het land tusschen Spiering- en Haarlemmermeer bevredigend verklaard wordt. Ook zou het wenschelijk zijn te beproeven om den juisten tijd van het verdwijnen van het land tusschen Haarl. en Leidsche meer nog stelliger te bepalen uit de Grafelijkheidsrekeningen. Tot 1345 vinden wij in de gedrukte stukken (die niet verder gaan) vermeld de beden van Burggravenveen en Vennep, en de tienden van een blok daar ter plaatse. Waarschijnlijk zal dit in de ongedrukte stukken op het Rijksarchief zoo voortgaan, totdat deze landen ophouden te bestaan.

Uit de gedrukte rekeningen heeft de schrijver met nauwkeurigheid geput wat daarin voor zijn onderwerp voorkomt, evenwel niet alles. Tot bevestiging van zijn betoog kan hij nog gebruik maken van de reiswegen daarin vermeld. Vooreerst: hoe weinig gebaand en hoe weinig bereden de weg tusschen Amsterdam en Haarlem over de later weggeslagen reep gronds, den Heerweg, omstreeks 1345 was, blijkt uit dezen post II bldz. 406:

»Item (N. N.) dat hi reit met 's Graven gezin van
»Haarlem tot Amsterdam, *om den wech te wisen*".

De gewone weg van Amsterdam naar 's Gravenhage leidt dan ook over het meer naar Heemstede en vandaar te land. Op deze wijze wordt een misdadiger vervoerd, zooals blijkt uit het volgende (I. 290):

»Eerst van 1 scepe, daar men voerde van Amsterdam
»bi Heemstede . . . . . Item van 1 waghen, daar
»men mede vervoerde van Heemstede in die Hage".

Men zou geneigd zijn hieruit af te leiden, dat de waterweg van Amsterdam naar Leiden niet gebruikt werd wegens de ondiepte van de geul of de geulen door de Vennep. Doch die gissing wordt weersproken door I. 336, waar het vervoeren van bier te scheep wordt vermeld van Amsterdam naar Leiden. Ook reeds veel vroeger werd die waterweg, van Haarlem uit, gebruikt. Tijdens den oorlog tusschen WILLEM I en LODEWIJK VAN LOON, omstreeks 1200, komen de Kennemers te scheep naar Leiden, blijkbaar van Haarlem over de meren en door de geulen.

De beschouwingen over de plaatsen in de oude goederenlijsten van Utrecht en Egmond laten nog veel twijfelachtigs over. Het ware gewenscht dat de schrijver dit twijfelachtige nog beter liet uitkomen.

De schrijver geeft op bldz. 172 sqq. eenige algemeene beschouwingen over de veenvorming, aan STARING onleend, en bovendien eenige hypothesen over de vorming van de verschillende oorspronkelijke veenlagen en plaatselijk tusschenliggende kleilagen, in het Haarlemmermeer en het IJ. Wij zouden hem in bedenking willen geven om dit gedeelte te besnoeien. De voorgestelde hypothesen berusten naar ons inzien op te weinig onderzoek en te geringe gegevens. Ook heeft de schrijver meer gegeven dan zijn titel belooft, bijv. over den loop van den Rhijn door Utrecht en Holland. Naar onze meening zoude zijn arbeid winnen, indien hij dit gedeelte grootendeels terughield, om het wellicht later tot een zelfstandig stuk te verwerken.

De volgorde der hoofdstukken is niet overal gelukkig gekozen. Met name wijzen wij er op dat het betoog in hoofdstuk XXII over de kaarten van BRUIJNS en BEELDSNIJDER eene betere plaatsing erlangt, als het aan hoofdstuk VII voorafgaat.

Wegens het groot aantal biographische bijzonderheden, omtrent landmeters en kaarten-snijders, zouden wij schrijver voorstellen daarop een alphabetischen klapper te maken. Ook eene chronologische lijst der behandelde kaarten ware gewenscht.

Op grond van al het aangevoerde hebben wij de eer aan de Akademie voor te stellen deze verhandeling in hare werken op te nemen.

Mochten de kosten, die aan het graveeren en drukken der bijgevoegde kaarten verbonden zijn, een bezwaar geacht worden, zoo maken wij U opmerkzaam, dat er tegenwoordig methoden bestaan, om zulke kaarten — bij welke het toch meer om de duidelijke omtrekken dan om een hoogen graad van nauwkeurigheid en om fraaie bewerking te doen is — op eene weinig kostbare wijze te vermenigvuldigen.

J. M. VAN BEMMELEN.
D. BIERENS DE HAAN.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING VAN **Dr. F. DE BOER:**

TOEPASSING VAN DE METHODE DARBOUX OP DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING $s = f(r, t)$.

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 November 1890.)

In deze verhandeling, waarvan ons het verslag is opgedragen in Uwe vergadering van 25 October jl., begint schrijver met de beide vergelijkingen op te schrijven, waarvan volgens de methode van S. DARBOUX de gemeenschappelijke integralen moeten worden opgespoord, en waarvan de tweede, overeenkomende met de *karakteristieke* vergelijking, eene tweedemachts-vergelijking in eene grootheid m is, die men ook in de eerste vergelijking van het stelsel terugvindt, met dien verstande echter, dat in ieder dezer beide vergelijkingen een andere wortel m_1 of m_2 der *karakteristieke* voorkomt. Hij maakt nu een dubbel hulpstelsel van differentiaalvergelijkingen op. Geven deze aanleiding tot twee stel van twee integralen, dus tot twee vormen $w_1 = \varphi(w_2)$, en bevatten deze de r, s, t, dan kunnen uit deze beiden en de oorspronkelijke vergelijking, die r, s, t worden opgelost, en leveren alzoo de drie betrekkingen

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + rdy, \quad dr = pdx + qdy,$$

een integreerbaar stelsel van gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen.

Vooreerst beproeft schrijver bij deze integratie, zulke herleidingen toe te passen, dat de voorwaarden der oplos-

baarheid als het ware op het oog te ontdekken zijn. Eerst vindt hij twee functiën, die of geen r of geen t bevatten, en deze opvatting brengt hem tot zijn doel. Vervolgens stelt hij den teller van zoodanige functiën gelijk aan nul, zoo dat aan de voorwaarde voldaan wordt. Ten derde neemt hij aan, dat van een zekere differentiaalvergelijking $dr = m_1^2\, dt$ de m_2 een integraal is, en omgekeerd bij verwisseling der beide m; en eindelijk stelt hij, dat beide m integralen zijn van de pas genoemde differentiaalvergelijking; hierbij vallen dan drie verschillende gevallen te onderscheiden: dat de beide m of onderling gelijk, of beide standvastig zijn, of dat één van beiden nul is.

Bij dit onderzoek zijn er meer of mindere herleidingen noodig, om alles onder geschikten vorm te brengen.

Thans gaat schrijver over om door middel van het kenmerk van Jacobi alle mogelijke oplossingen rechtstreeks op te sporen, en komt alzoo tot een derde vergelijking bij de twee vorigen.

Voor het geval $m_1 = m_2$, waarmede de differentiaalbetrekking $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt} = 0$ zamenhangt, vindt hij zes oplossingen, waarvan er drie reeds vroeger gevonden werden. Voor $m_1 \gtrless m_2$, maar de andere differentiaalbetrekking gelijk aan nul, komt er weder eene nieuwe voorwaarde bij, en dan kunnen of m_1 en m_2 standvastig zijn, hetgeen weder tot twee der reeds behandelde oplossingen aanleiding geeft, of een zekere differentiaalvorm wordt nul, hetgeen weder tot twee reeds bekende oplossingen voert.

Is echter $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt} \gtrless 0$, dan voert schrijver behalve eenige verkortingen de symbolische bewerking Δ in. Is nu $\Delta m_1 = 0$, dan komt hij, zooals hier natuurlijk volgt, tot twee der vorige uitkomsten terug. En nu zijn ook alle die oplossingen van het eerste gedeelte teruggevonden. Er blijft nu slechts over de voorwaarde $\Delta K_1 - \Delta m_1 = 0$ te onderzoeken, en hierbij moet worden onderscheiden, of $K_1 - m_1$ standvastig is of niet.

Bij het eerste geval komt schrijver tot een nieuwe gedeeltelijke differentiaalvergelijking, met een nieuwe karakteristieke vergelijking en door het kenmerk van JACOBI tot eene derde vergelijking. Langs tal van herleidingen verkrijgt men eindelijk een integraal, die door substitutie ook uit het vroeger gevondene zou kunnen worden afgeleid.

Denzelfden weg volgt schrijver bij het tweede geval, en uit de uitkomst, gevonden bij een paar bijzondere gevallen, leidt schrijver een hypothetischen vorm af voor het meer algemeene geval. Deze hypothese blijkt dadelijk aan één der vergelijkingen te voldoen. Bij de verdere herleiding maakt schrijver onderscheid, naarmate een paar verkorte uitdrukkingen M_1 en M_2 gelijk zijn, of niet.

De overeenkomstige behandeling van het tweede geval, waarbij de $K_1 - m_1$ niet meer standvastig wordt ondersteld, is aan schrijver niet gelukt, maar toch brengt hij het daarbij een eind weegs.

Dewijl schrijver de oorspronkelijke vergelijking stelde in den vorm $s = f(r, t)$, was bij de behandeling het geval uitgesloten, dat de differentiaalvergelijking geen s bevat. In dit gebrek komt schrijver in zijn laatste deel tegemoet. En daarna eindigt hij met eene vergelijking van deze methode met die van LEGENDRE.

Eene verdeeling in paragrafen zoude het overzicht veel gemakkelijker maken.

Uit dit verslag moge genoegzaam zijn op te maken, dat de schrijver blijken gegeven heeft met zijn onderwerp vertrouwd te zijn, en genoegzaam analytische hulpmiddelen tot zijn dienst te hebben. Wij stellen dan ook gerustelijk aan Uwe vergadering voor, deze verhandeling in Uwe *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen.

Leiden en *Utrecht*,
November 1890.

D. BIERENS DE HAAN.
C. H. C. GRINWIS.

TOEPASSING

VAN DE

METHODE DARBOUX OP DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING $s = f(r, t)$

DOOR

Dr. F. DE BOER

Onder de opgaven van het Wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" komt onder N⁰. 200, Deel IV, de volgende vraag voor:

„Een weg te vinden ter integratie van de vergelijking

$$s = f(r, t), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waar r, s en t de gewone beteekenis hebben:

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}."$$

Dit vraagstuk gaf mij aanleiding te onderzoeken, wat de in het opschrift genoemde methode voor de integratie van de vergelijking (1) kan opleveren. De volgende bladzijden bevatten het resultaat van dat onderzoek. De publicatie van dat resultaat komt mij gewenscht voor, daar het naar mijne overtuiging geschikt is, om de voortreffelijkheid te doen uitkomen van deze methode, die mij toeschijnt nog te weinig bekend te zijn.

Onder de methode Darboux voor het integreeren eener

partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde verstaan wij de methode, die bestaat in het opsporen der gemeenschappelijke integralen van het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx}\right) + m_2\left(\frac{dw}{dy}\right) &= \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\frac{df}{dr}}\frac{dw}{dr} + m_2\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\frac{df}{dt}}\frac{dw}{dt}, \ldots \\ \frac{dw}{dr}m_1^2 - \frac{dw}{ds}m_1 + \frac{dw}{dt} &= 0, \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (2)$$

waarin

$$f = f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

de te integreeren differentiaalvergelijking voorstelt, en $\left(\frac{df}{dx}\right)$ en $\left(\frac{df}{dy}\right)$ de afgeleiden, genomen in dien zin, dat z, p en q als functien van x en y worden beschouwd maar r, s en t niet, zoodat bijv.

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz} + r\frac{df}{dp} + s\frac{df}{dy},$$

terwijl m_1 en m_2 de wortels zijn van de zoogenaamde karakteristieke vergelijking

$$\frac{df}{dr}m^2 - \frac{df}{ds}m + \frac{df}{dt} = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Iedere integraal van het stelsel (2) is tevens eene integraal van de gegeven differentiaalvergelijking, als men het begrip integraal in zooverre uitbreidt, dat de integralen van (1) ook afgeleiden van de tweede (of zelfs van hoogere) orde mogen bevatten, terwijl, als $w_1 = c_1$, $w_2 = c_2$ integralen van (2) zijn. dit ook het geval zal zijn met $w_1 = \varphi(w_2)$

Door verwisseling van m_1 met m_2 ontstaat een tweede stelsel analoog met (2), dat ook ter opsporing van integralen van de gegeven differentiaalvergelijking kan dienen.

Ter integratie van (2) heeft men het hulpstelsel

$$\frac{dx}{\frac{df}{dr}} = \frac{dr + m_1 dx}{\frac{df}{ds}} = \frac{m_1 dy}{\frac{df}{dt}} = \frac{dz}{\frac{df}{dr}(p + m_2 q)} = \frac{dp}{\frac{df}{dr}(r + m_2 s)} =$$

$$= \frac{dq}{\frac{df}{dr}(s + m_2 t)} = \frac{dr + m_1 ds}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{ds + m_1 dt}{\left(\frac{df}{dy}\right)} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Heeft dit hulpstelsel twee integralen $w_1 = c_1$ en $w_2 = c_2$, dan is eene eerste integraal van de gegeven vergelijking, in den zin waarin dat begrip hier wordt opgevat, $w_1 = \varphi(w_2)$.

Doet zich bij het tweede hulpstelsel hetzelfde geval voor, dan verschaft dit eene tweede integraal, bijv.

$$w_1' = \varphi\,(w_2').$$

Bevatten deze vergelijkingen r, s en t, dan kunnen die grootheden hieruit en uit de gegeven vergelijking worden opgelost, en de gevonden waarden zullen, gesubstitueerd in

$$dp = rdx + sdy, \quad dy = sdx + tdy, \quad dz = pdx + qdy$$

deze drie vergelijkingen tot een integreerbaar stelsel van gelijktijdige differentiaalvergelijkingen maken.

Met deze korte beschrijving der methode meenen wij hier te kunnen volstaan. Den lezer, wien zij niet voldoende mocht bekend zijn, verwijzen wij naar de verhandeling van Darboux Annales de l'Ecole superieur 1870, die van Hamburger, Journal van Kronecker Bd. 93 en in het bijzonder naar Speckman „Integratie van de partieele differentiaalvergelijkingen van hoogere orde" Groningen 1889, waar men pag 75 sqq. de methode uiteengezet vindt.

In het geval van verg. (1) gaat (2) over in

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) + m_2\left(\frac{dw}{dy}\right) = 0, \quad \frac{dw}{dr} m_1^2 - \frac{dw}{ds} m_1 + \frac{dw}{dt} = 0, \; . \; (5)$$

en, als men $\frac{df}{dr} = R$, $\frac{df}{dt} = T$ stelt, (4) in

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy + m_1 dx}{-1} = \frac{m_1 dy}{T} = \frac{dz}{R(p + m_2 q)} = \frac{dp}{R(r + m_2 s)} =$$

$$= \frac{dy}{R(s + m_2 t)} = \frac{dr + m_1 ds}{0} = \frac{ds + m_1 dt}{0}, \ldots (6)$$

welk stelsel ook aldus kan worden geschreven

$$dz = pdx + q\,dy, \qquad dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy,$$
$$dr + m_1 ds = 0, \qquad ds + m_1 dt = 0, \qquad dy - m_2 dx = 0,$$
$$R m_1^2 + m_1 + T = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Stelt men

$$u = p - rx - sy, \quad v = q - sx - ty,$$

dan kan eene der vergelijkingen (7) worden vervangen door

$$du + m_1 dv = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Men heeft dan namelijk

$$du = -xdr - yds, \quad dv = -xds - ydt,$$

en dus

$$du + m_1 dv = -x(dr + m_1 ds) - y(ds + m_1 dt) = 0.$$

Hier, waar m_1 en m_2 uitsluitend van r en t afhangen, heeft men steeds eene integreerbare vergelijking, namelijk

$$dr = m_1^2 dt, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

die men vindt door ds te elimineeren. Bovendien is, zooals altijd, eene integraal van (7)

$$f = c,$$

maar deze kan natuurlijk bij de integratie van (1) geen dienst doen. Afgezien van deze laatste heeft men nu in de eerste plaats nog eene tweede integraal als $m_1 = c$ de integraal van (10) is. Men heeft dan

$$\frac{dm_1}{dt} + m_1^2 \frac{dm_1}{dr} = 0 \ldots\ldots\ldots (11)$$

Zal bij het tweede hulpstelsel zich hetzelfde geval voordoen, dan moet ook

$$\frac{dm_2}{dt} + m_2^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

zijn.

Door optelling van deze vergelijkingen heeft men

$$\frac{d(m_1 + m_2)}{dt} + {}^1/_2 \frac{d(m_1^3 + m_2^3)}{dr} = 0.$$

Voegt men hierin de waarden

$$(m_1 + m_2) = -\frac{1}{R}, \quad m_1 m_2 = \frac{T}{R} \quad . \; . \; . \; . \; , \; (13)$$

in, dan vindt men na herleiding

$$2\,R^2 \frac{dR}{dt} + (1 - 2\,RT) \frac{dR}{dr} = 0.$$

Telt men nog (11) en (12) bij elkaar op, na de eerste door m_1^2 en de tweede door m_2^2 gedeeld te hebben, dan komt er

$$-\frac{dt}{d}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{d}{dr}(m_1 + m_2) = 0,$$

of

$$R^2 \frac{dT}{dt} = T^2 \frac{dR}{dr}.$$

Deze beide vergelijkingen laten zich samenvatten in

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{T^2} = \frac{\frac{dR}{dr}}{R^2} = \frac{2\,\frac{dT}{dr}}{2\,RT - 1} = \frac{2\,\frac{dR}{dt}}{2\,RT - 1}, \; . \; . \; . \; (14)$$

waaruit zich laat afleiden

$$\frac{d\left(\frac{1-4\,RT}{R^2}\right)}{dr} = \frac{d\left(\frac{1-4\,RT}{T^2}\right)}{dt} = 0, \quad . \; . \; (15)$$

zoodat $\frac{1-4\,RT}{R^2}$ eene functie van t alleen, en $\frac{1-4\,RT}{T^2}$ eens functie van r alleen is; de eerste stellen wij door τ^4, de tweede deer ϱ^4 voor. Door oplossing vindt men dan

$$R = \frac{\varrho}{\tau\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}}, \quad T = \frac{\tau}{\varrho\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}}.$$

Verder moet nu $\frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dr}$ zijn, waardoor men vindt

$$\frac{\frac{d\varrho}{dr}}{\varrho^3} = \frac{\frac{d\tau}{dt}}{\tau^3}.$$

Beide leden moeten natuurlijk gelijk zijn aan eene zelfde constante, zoodat $\frac{d}{dr}\,\frac{1}{\varrho^2} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{\tau^2} = c$ of

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{(cr+c_1)}}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{(ct+c_2)}}.$$

Hieruit volgt

$$R = \frac{ct+c_2}{\sqrt{(4\,c_1c_2+1+4\,cc_2r+4\,cc_1t+4\,c^2rt)}},$$

derhalve

$$s = f(r,t) = \int\frac{(ct+c_2)\,dr}{\sqrt{(4\,c_1c_2+1+4\,cc_2r+4\,cc_1t+4\,c^2rt)}}.$$

Voert men nieuwe constanten in door te stellen

$$\frac{c_1c_2+{}^1/_4}{c^2} = a, \quad \frac{c_2}{c} = b, \quad \frac{c_1}{c} = e,$$

en noemt dan $-\frac{1}{2}c$ de aan s toe te voegen constante, dan heeft men

$$s - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(a + br + et + rt)},$$

of

$$a + br + es + ct - (s^2 - rt) = \tfrac{1}{4}c^2.$$

De vergelijking van Ampère met constante coefficienten is dus de eenige, waarbij zich het beschouwde geval voordoet.

Het eene hulpstelsel heeft nu de integralen

$$m_1 = C_1, \quad u + m_1 v = C_1',$$

het andere

$$m_2 = C_3, \quad u + m_2 v = C_2'.$$

Eerste integralen van de gegeven vergelijking zijn dus

$$u + m_1 v = \varphi(m_1), \quad u + m_2 v = \psi(m_2).$$

Hieruit volgt

$$u = \frac{m_1\psi - m_2\varphi}{m_1 - m_2}, \quad v = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}.$$

Daar verder

$$-du = xdr + yds = (x + Ry)\,dr + Tydt,$$
$$-dv = xds + ydt = xRdr + (xT + y)\,dt$$

is, heeft men

$$x = -\frac{\frac{dv}{dr}}{R}, \quad y = -\frac{\frac{du}{dt}}{T}.$$

Daar m_1 en m_2 functien van r en t zijn, heeft men hiermede x en y in r en t uitgedrukt. Doelmatiger is het echter omgekeerd r en t in m_1 en m_2 uit te drukken door middel van de vergelijkingen (13).

Daar blijkens de eerste vergelijking (15) $m_1 - m_2$ eene functie van t is, is t ook omgekeerd eene functie van $m_1 - m_2$, zoodat

$$\frac{dt}{dm_1} + \frac{dt}{dm_2} = 0 .$$

Dit in aanmerking nemende, vindt men uit

$$\frac{dv}{dm_1} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dm_1} + \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dm_1}, \quad \frac{dv}{dm_2} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dm_2} + \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dm_2}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\dfrac{dv}{dm_1} + \dfrac{dv}{dm_2}}{\dfrac{dr}{dm_1} + \dfrac{dr}{dm_2}} .$$

Op dergelijke wijze vindt men

$$\frac{du}{dt} = \frac{m_1^2 \dfrac{du}{dm_1} + m_2^2 \dfrac{du}{dm_2}}{(m_1^2 - m_2^2)\dfrac{dt}{dm_1}} .$$

Verder is uit (13)

$$r + e = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 - m_2}\sqrt{(a - be)}, \quad t + b = \frac{2}{m_1 - m_2}\sqrt{(a - be)},$$

en

$$s - {}^1/_2\, c = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\sqrt{(a - be)}.$$

Dit alles invoerende vindt men

$$x = \frac{\varphi' - \psi'}{2\sqrt{(a - be)}}, \quad y = \frac{m_1\varphi' - m_2\psi' - \varphi + \psi}{2\sqrt{(a - be)}},$$

$$p = u + xr + ys = {}^1/_2(\varphi + \psi - m_1\varphi' - m_2\psi') - ex + {}^1/_2 cy,$$

$$q = v + xs + yt = {}^1/_2(\varphi' + \psi') + {}^1/_2 cx - by,$$

en eindelijk

$$z + {}^1/_2(ex^2 - cxy + by^2) = \frac{(m_1 - m_2)\,\varphi'\psi' - \int \varphi'^2 dm_1 + \int \psi'^2 dm_2.}{4\sqrt{(a - be)}}$$

Eenvoudiger uitdrukkingen, vrij van integraalteekens bekomt men door te stellen

$$\frac{\varphi'(m_1)}{2\sqrt{(a-be)}} = \alpha,\ m_1 = \chi''(\alpha),\ \frac{\psi'(m_2)}{2\sqrt{(a-be)}} = \beta,\ m_2 = \omega''(\beta).$$

Men vindt dan

$$x = \alpha - \beta, \quad y = \chi'(\alpha) - \omega'(\beta),$$
$$z + {}^1/_2(ex^2 - cxy + by^2) = \{2\omega - 2\chi - (\alpha + \beta)(\omega' - \chi')\}\sqrt{(a-be)}.$$

In dezen laatsten vorm vindt men de integraal onmiddellijk door de methode van Ampère.

Aan de vergelijkingen (15) kan nog op eene andere wijze worden voldaan, namelijk door dat

$$RT = {}^1/_4, \text{ dus } m_1 = m_2 = m$$

is. In dat geval is slechts één hulpstelsel aanwezig, maar daarvan laten zich hier dadelijk drie integreerbare combinatiën aanwijzen, namelijk

$$dr - m^2 dt = 0, \quad dy - m dx = 0, \quad du + m dv = 0,$$

waarvan de integralen zijn

$$m = c, \quad y - mx = c', \quad u + mv = c''.$$

Integralen van (1) zijn dan

$$y - mx = \varphi(m), \quad u + mv = \psi(m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De laatste vergelijking differentieerende hebben wij

$$-x\,dr - y\,ds - m\,(x\,ds + y\,dt) = (\psi'(m) - v)\,dm.$$

Maar, daar $R = -\dfrac{1}{2m}$, $T = -{}^1/_2 m$ is, heeft men

$$dr + mds = dr(1 + mR) + mTdt = {}^1/_2(dr - m^2dt),$$

en evenzoo

$$ds + mdt = -\frac{1}{2m}(dr - m^2dt),$$

dus

$$(v - \psi'(m))\left(\frac{dm}{dr}dr + \frac{dm}{dt}dt\right) = -\frac{\varphi}{2m}(dr - m^2dt)$$

hetwelk, daar

$$\frac{dm}{dt} = -m^2\frac{dm}{dr}$$

is, zich vereenvoudigt tot

$$v = \psi'(m) - \frac{\varphi(m)}{2m\frac{dm}{dr}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

of

$$q - xs - yt = \psi'(m) - \frac{\varphi(m)}{\frac{d(m^2)}{dr}}.$$

Nogmaals differentieerende heeft men hieruit

$$-xds - ydt = \psi''(m)dm - \frac{\varphi'(m)dm}{\frac{d(m^2)}{dr}} + \varphi(m)\frac{\frac{d^2(m^2)}{dr^2}dr + \frac{d^2(m^2)}{drdt}dt}{\left(\frac{d(m^2)}{dr}\right)^2}.$$

Dus is

$$xR = -\psi''(m)\frac{dm}{dr} + \frac{\varphi'(m)}{2m} - \varphi(m)\frac{\frac{d^2(m^2)}{dr^2}}{\left(\frac{d(m^2)}{dr}\right)^2}$$

of

$$x = \psi''(m)\frac{d(m^2)}{dr} - \varphi'(m) + 2m\varphi(m)\frac{\frac{d^2(m^2)}{dr^2}}{\left(\frac{d(m^2)}{dr}\right)^2}$$

Hierdoor zijn x en y in r en t uitgedrukt. Uit (17) vindt men dan v en uit (16)

$$u = \psi(m) - m\,\psi'(m) + \frac{m\,\varphi(m)}{\frac{d(m^2)}{dr}} \quad \ldots\ldots (18)$$

Uit (17) en (18) berekent men p en q, en eindelijk z uit

$$dz = pdx + qdy.$$

De gegeven vergelijking moet hier den vorm hebben

$$s = -\,{}^1/_2\,mt - \frac{1}{2\,m}\,r + \chi(m), \ldots\ldots (19)$$

waarin χ eene willekeurige functie is, en m bepaald wordt door

$$m^2t - r = 2\,m^2\,\chi'(m), \ldots\ldots\ldots (20)$$

zooals de integratie van de vergelijking $RT = {}^1/_4$, als differentiaalvergelijking van de eerste orde in f, r en t opgevat, leert.

Men overtuigt zich gemakkelijk, dat m in (19) en (20) dezelfde beteekenis heeft als in het voorgaande. Men kan nu alles in m en bijv. s uitdrukken. Uit (19) en (20) vindt men dan

$$r = m(\chi - m\,\chi' - s), \qquad t = \frac{\chi + m\,\chi' - s}{m},$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2\chi - 2m\chi' - 2m^2\chi'' - 2s}, \quad \frac{d(m^2)}{dr} = \frac{m}{\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s},$$

$$\frac{d^2(m^2)}{dr^2} = \frac{m^3\,(3\chi'' + m\chi''')}{(\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s)^3}.$$

Zoodoende vindt men voor x

$$x = \frac{m\{\psi'' - 2m\varphi(3\chi'' + m\chi''')\}}{(\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s)} - \varphi',$$

of, als men de breuk door k voorstelt,

$$x = k - \varphi', \text{ en } y = mk - m\varphi' + \varphi.$$

Verder is

$$p = u + rx + sy = \psi - m\psi' + \varphi(\chi - m\chi' - m^2\chi'') - \\ - \varphi'(m\chi - m^2\chi') + k(m\chi - m^2\chi') = A + (m\chi - m^2\chi')k,$$

$$q = v + sx + ty = \psi' + \varphi(2\chi' + m\chi'') - \varphi'(\chi + m\chi') + \\ + (\chi + m\chi')k = B + (\chi + m\chi')k,$$

waarin A en B hierdoor bepaalde verkortingen zijn.

Hieruit is

$$\frac{dz}{dk} = p\frac{dx}{dk} + q\frac{dy}{dk} = p + mq = A + mB + 2m\chi k,$$

dus

$$z = (A + mB)k + m\chi k^2 + U,$$

waarin U eene nader te bepalen functie van m is. Differentieerende heeft men

$$\frac{dz}{dm} = \left(\frac{dA}{dm} + m\frac{dB}{dm} + B\right)k + (m\chi' + \chi)k^2 + \frac{dU}{dm}.$$

Maar aan den anderen kant is

$$\frac{dz}{dm} = p\frac{dx}{dm} + q\frac{dy}{dm} = -(A + Bm)\varphi'' + (B - 2m\chi\varphi'')k + (m\chi' + \chi)k^2,$$

zoodat

$$\frac{dU}{dm} = -(A + Bm)\varphi'' = \varphi''\{-\psi - \varphi(\chi + m\chi') + 2m\varphi'\chi\},$$

en dus

$$U = \int \varphi'' \{ - \psi - \varphi (\chi + m\chi') + 2m\varphi'\chi \} \, dm.$$

Zoodoende hebben wij de uitkomst

$$z = m\chi k^2 + \{ \psi + \varphi (\chi + w\chi') + 2m\varphi'\chi \} \, k -$$
$$- \int \{ \psi + \varphi (\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi \} \, \varphi'' \, dm.$$

Voeren wij ten slotte eene nieuwe functie in door de betrekking

$$\omega'(m) = \varphi'' \{ \psi + \varphi (\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi \},$$

en elimineeren k, dan hebben wij de integraal in den vorm

$$\left. \begin{aligned} y &= mx + \varphi(m), \\ z &= m\chi(m)(x + \varphi'(m))^2 + \frac{\omega'(m)}{\varphi''(m)}(x + \varphi'(m)) - \omega(m) \end{aligned} \right\} \ldots (21)$$

De vergelijkingen (21) stellen nu de algemeene integraal voor van alle mogelijke vergelijkingen van den vorm (1), wier karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels heeft. De functie χ komt in de differentiaalvergelijking zelve voor, de beide andere zijn door de integratie ingevoerd.

Een derde geval van integreerbaarheid is, dat $m_2 = c$ de integraal van (10) is, en omgekeerd $dr = m_2^2 \, dt$ tot integraal heeft $m_1 = \text{const.}$. Men moet dan hebben

$$\frac{dm_1}{dt} + m_2^2 \frac{dm_1}{dr} = 0, \quad \frac{dm_2}{dt} + m_1^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \; . \; . \; (22)$$

De optelling van deze vergelijkingen geeft

$$\frac{d\left(-\frac{1}{R}\right)}{dt} + \frac{T^2}{R^2} \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dr} = 0,$$

wat bij herleiding eene identieke vergelijking blijkt te zijn.

De vergelijkingen (22) zijn dus niet onafhankelijk van elkaar. Vermenigvuldigt men de eerste met m_1 en de tweede met m_2, en telt ze op, dan komt er

$$\frac{1}{2}\frac{d(m_1^2+m_2^2)}{dt}+m_1 m_2\frac{d(m_1 m_2)}{dr}=0,$$

of, herleid

$$T^2\frac{dR}{dr}+R^2\frac{dT}{dt}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}=0\ldots(23)$$

Dit is dus de eenige voorwaarde, waaraan de differentiaalvergelijking in dit geval moet voldoen.

De vergelijking (23) is zelve weer eene differentiaalvergelijking van de tweede orde in s of f als afhankelijk en r en t als onafhankelijk veranderlijken. Even als in de beide vorige gevallen laat zich de algemeene vorm der differentiaalvergelijking weer bepalen, ditmaal door integratie van de vergelijking (23).

Waar wij tot die integratie overgaan, vervangen wij r, t en s tijdelijk door x, y en z, en gebruiken de gewone notatien voor de afgeleiden van de eerste en tweede orde van deze z ten opzichte van deze x en y. De vergelijking (23) wordt dan

$$q^2 r+(1-2pq)s+p^2 t=0.\ \ldots\ldots(24)$$

De karakteristieke vergelijking hiervan is

$$q^2\mu^2-(1-2pq)\mu+p^2=0.\ \ldots\ldots(25)$$

en μ_1 en μ_2 mogen hare wortels zijn.

Bij de integratie laat zich ook hier weer de telkens gebruikte methode toepassen. Als eerste hulpstelsel hebben wij

$$\frac{dx}{q^2}=\frac{dy+\mu_1 dx}{1-2pq}=\frac{\mu_1 dy}{p^2}=\frac{dz}{q^2(p+\mu_2 q)}=\frac{dp}{q^2(r+\mu_2 s)}=$$
$$=\frac{dq}{q^2(s+\mu_2 t)}=\frac{dr+\mu_1 ds}{-2p(rt-s^2)}=\frac{ds+\mu_1 dt}{-2q(rt-s^2)}\ldots(27)$$

Daar volgens (24) en (25) $r + (\mu_1 + \mu_2) s + \mu_1 \mu_2 t = 0$ is, vindt men

$$dp + \mu_1 dq = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

eene vergelijking, die zeker integreerbaar is, daar μ_1 alleen van p en q afhangt. Zooals men uit (25) gemakkelijk vindt, is

$$\frac{d\mu_1}{dq} = \mu_1 \frac{d\mu_1}{dp},$$

en dus is

$$\mu_1 = c$$

de integraal van (28). Stelt men dan nog $s + \mu_1 t = \lambda_1$, dan is

$$ds + \mu_1 dt = d\lambda_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{rt - s^2} = -\frac{2\,dq}{q^2 (s + \mu_2 t)},$$

of, daar

$$rt - s^2 = -(s + \mu_2 t)(s + \mu_1 t)$$

is,

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{2\,dq}{q}.$$

Eene andere integraal van het stelsel (27) is dus

$$\lambda_1 = c_1 q^2.$$

Eene eerste integraal van (24) is derhalve

$$\lambda_1 = q^2 \chi(\mu_1) \quad \text{of} \quad s + \mu_1 t = q^2 \chi(\mu_1).$$

Het andere hulpstelsel verschaft ons op dezelfde wijze

$$s + \mu_2 t = q^2 \omega(\mu_2).$$

Neemt men in aanmerking, dat

$$r + \mu_1 s = -\mu_2 (s + \mu_1 t), \quad r + \mu_2 s = -\mu_1 (s + \mu_2 t)$$

is, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\mu_2^2\,\chi(\mu_1)-\mu_1^2\,\omega(\mu_2)),\\ s &= -\frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\mu_2\,\chi(\mu_1)-\mu_1\,\omega(\mu_2)),\\ t &= \frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\chi(\mu_1)-\omega(\mu_2)). \end{aligned}\right\}\ldots(29)$$

Uit

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{en} \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

volgt

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{r\,t - s^2}, \quad dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{r\,t - s^2}, \ldots\ldots(30)$$

terwijl men uit (25) gemakkelijk vindt

$$p = \frac{\sqrt{\mu_1\,\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}. \ldots(31)$$

Voert men dit en (29) in (30) in, dan komt er

$$dx = \frac{d\mu_1}{2\chi\sqrt{\mu_1}} + \frac{d\mu_2}{2\omega\sqrt{\mu_2}}, \quad dy = \frac{d\mu_1\sqrt{\mu_1}}{2\chi} + \frac{d\mu_2\sqrt{\mu_2}}{2\omega},$$

en

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{d\mu_1}{2\chi} + \frac{d\mu_2}{2\omega}.$$

Vervangt men eindelijk $\sqrt{\mu_1}$ door $-\frac{1}{m_1}$, $\sqrt{\mu_2}$ door $-\frac{1}{m_2}$, $\frac{\mu_1^2}{\chi(\mu_1)}$ door $\chi'''(m_1)$ en $\frac{\mu_2^2}{\omega(\mu_2)}$ door $\omega'''(m_2)$, dan komt er

$$\begin{aligned} dx &= m_1^2\chi'''(m_1)\,dm_1 + m_2^2\,\omega'''(m_2)\,dm_2,\\ dy &= \chi'''(m_1)\,dm_1 + \omega'''(m_2)\,dm_2,\\ dz &= -m_1\chi'''(m_1)\,dm_1 - m_2\,\omega'''(m_2)\,dm_2; \end{aligned}$$

dus is, als wij x, y en z weer door r, t en s vervangen,

$$\left.\begin{aligned} r &= m_1^2\chi'' - 2m_1\chi' + 2\chi + m_2^2\,\omega'' - 2m_2\,\omega' + 2\omega,\\ s &= -m_1\chi'' + \chi' - m_2\,\omega'' + \omega',\\ t &= \chi'' + \omega''. \end{aligned}\right\}\ldots(32)$$

Hierbij zijn de argumenten der willekeurige functiën weggelaten, wat wij dikwijls zullen doen en ook reeds herhaaldelijk deden, waar het geene verwarring veroorzaken kan.

Zal zich derhalve het hier behandelde geval van integreerbaarheid voordoen, dan moet (1) het resultaat zijn der eliminatie van m_1 en m_2 uit de drie vergelijkingen (32).

De m_1 en m_2 in (32) zijn de wortels van de vergelijking

$$R m^2 + m + T = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

zooals men uit (25) gemakkelijk vindt, als men in aanmerking neemt dat de p en q niets anders zijn dan R en T. De vergelijking (33) is echter niets anders dan de karakteristieke vergelijking van (1).

Het stelsel (7) levert in dit geval de integralen $m_2 = c$ en $y - m_2 x = c'$ op, zoodat eene eerste integraal van (1) is

$$y - m_2 x = \varphi(m_2),$$

en eene andere natuurlijk

$$y - m_1(x) = \psi(m_1),$$

waaruit volgt

$$x = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1 \varphi - m_2 \psi}{m_1 - m_2} \ldots\ldots \quad (34)$$

Met behulp van (32) kunnen wij nu ook z in m_1 en m_2 uitdrukken. Men heeft namelijk

$$\frac{dp}{dm_1} = r\frac{dx}{dm_1} + s\frac{dy}{dm_1}, \quad \frac{dq}{dm_1} = s\frac{dx}{dm_1} + t\frac{dy}{dm_1}.$$

Maar

$$\frac{dy}{dm_1} = m_2 \frac{dx}{dm_1};$$

dus

$$\frac{dp}{dm_1} = (r + m_2 s)\frac{dx}{dm_1}, \text{ en evenzoo } \frac{dp}{dm_2} = (r + m_1 s)\frac{dx}{dm_2}.$$

Men vindt hieruit

$$p = \int (r + m_2 s) \frac{dx}{dm_1} dm_1 = x(r + m_2 s) - \int x\, m_1 (m_1 - m_2) \chi''' dm_1,$$

waarbij de integratieconstante natuurlijk eene functie van m_2 is.

Voor x, r en s hare waarden invoerende heeft men

$$p = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2} (2\chi - m_1 \chi' + 2\omega - m_2 \omega') - \psi (m_1 \chi'' - \chi') - \varphi (m_2 \omega'' - \omega')$$

$$+ \int \psi\, \chi'''\, m_1\, dm_1 + \int \varphi\, \omega'''\, m_2\, dm_2,$$

waarbij de termen, die van m_2 alleen afhangen, zijn toegevoegd, omdat er symmetrie ten opzichte van m_1 en m_2 moet bestaan.

Op dergelijke wijze vindt men

$$q = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2} (\chi' + \omega') + \psi\, \chi'' + \varphi\, \omega'' - \int \psi\, \chi'''\, dm_1 - \int \varphi \omega''' dm_2$$

Eindelijk is

$$z = \int \frac{dz}{dm_1} dm_1 = \int \left(p \frac{dx}{dm_1} + q \frac{dy}{dm_1} \right) dm_1 = \int (p + m_2 q) \frac{dx}{dm_1} dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int x \left(\frac{dp}{dm_1} + m_2 \frac{dq}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int (r + 2\, m_2 s + m_2^2\, t)\, x \frac{dx}{dm_1} =$$

$$x(p + m_2 q) - {}^1/_2 (r + 2\, m_2 s + m_2^2\, t)\, x^2$$

$$+ {}^1/_2 \int x^2 \left(\frac{dr}{dm_1} + 2\, m_2 \frac{ds}{dm_1} + m_2^2 \frac{dt}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= {}^1/_2 x^2 (r + 2\, m_2 s + m_2^2 t) + x \left\{ \varphi \omega' - m_2 \int \varphi \omega''' dm_2 + \int m_2 \varphi \omega''' dm_2 \right\}$$

$$+ {}^1/_2 \int (\varphi - \psi)^2 \chi'''\, dm_1 - x \int (\varphi - \psi)(m_1 - m_2)\, \chi'''\, dm_1 =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\varphi-\psi)^2}{(m_1-m_2)^2}\{(m_1-m_2)^2\chi''-2(m_1-m_2)\chi'+2\chi+2\omega\}-$$

$$-\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\int(\varphi-\psi)(m_1-m_2)\chi'''\,dm_1$$

$$+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}(\varphi\omega'+\int m_2\varphi\omega'''dm_2-m_2\int\varphi\omega'''dm_2)+\frac{1}{2}\int(\varphi-\psi)^2\chi'''dm_1.$$

Door herleiding en toevoeging van zoodanige alleen van m_2 afhangende termen, als noodig zijn om de vereischte symmetrie tot stand te brengen, heeft men eindelijk

$$z=\left(\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\right)^2(\chi+\omega)+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\{\psi\chi'+\varphi\omega'+\int m_1\psi\chi'''dm_1-m_1\int\psi\chi'''dm_1$$

$$+\int m_2\varphi\omega'''dm_2-m_2\int\varphi\omega'''dm_2\}+\frac{1}{2}\int\psi^2\chi'''dm_1+\frac{1}{2}\int\varphi^2\omega'''dm_2$$

$$+\frac{1}{2}\psi^2\chi''+\frac{1}{2}\varphi^2\omega''-\psi\int\psi\chi'''\,dm_1-\varphi\int\varphi\omega'''\,dm_2. \quad . \quad . \quad (35)$$

De drie vergelijkingen (34) en (35) stellen te zamen de algemeene integraal voor van alle vergelijkingen van den vorm (1), die aan de voorwaarde (23) voldoen, met uitzondering alleen van die, welke onder de beide vroeger behandelde gevallen zijn begrepen, en de beneden te behandelen gevallen, dat m_1 of m_2 constante waarden hebben.

Nog een geval van integreerbaarheid zou men hebben, als m_1 en m_2 gelijk aan eene constante gesteld beide integralen van (10) waren, en dus m_2 eene functie was van m_1. Maar wij zagen, dat de vergelijkingen (22) gevolgen van elkaar zijn. Men zou dus niet alleen hebben, dat aan (11) en eene der vergelijkingen (22), maar tevens, dat aan de andere vergelijking (22) en aan (12) voldaan was, en hieruit zou volgen, dat òf $m_1^2 = m_2^2$, dus $m_1 = m_2$ was, daar $m_1 = -m_2$ hier niet kan voorkomen, òf dat m_1 en m_2 beide constante waarden hadden, òf eindelijk eene van beide gelijk aan nul was.

In het laatste geval zou de differentiaalvergelijking de t niet bevatten. Noemen wij dan m_2 den wortel der karakteristieke vergelijking, die verdwijnt, dan neemt het eerste hulpstelsel den vorm aan

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{p}=\frac{dp}{r}=\frac{dq}{s}=\frac{dr+m_1\,ds}{0}=\frac{ds+m_1\,dt}{0},$$

en levert onder andere op de volgende integralen

$$y=c,\ t=\int\frac{dr}{m_1^2}+c'=\int f'(r)^3\,dr+c'.$$

De differentiaalvergelijking heeft dus de eerste integraal

$$t=\int f'(r)^3\,dr+\psi''(y),$$

terwijl het tweede hulpstelsel nog altijd de integraal

$$y-m_1\,x=\varphi(m_1)$$

oplevert. De laatste kunnen wij schrijven in den vorm

$$x+y\,f'(r)=\chi'(r). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Men heeft dan

$$dp=r\,dx+s\,dy=r\{(\chi''(r)-y\,f''(r))dr-f'(r)\,dy\}+f(r)dy$$

of

$$dp=\{r\,\chi''(r)-y\,r\,f''(r)\}\,dr+\{f(r)-r\,f'(r)\}\,dy,$$

en evenzoo

$$dq=\{f(r)\,\chi''(r)-y\,f(r)\,f''(r)\}\,dr+\{\psi''(y)-\int f(r)\,f''(r)dr\}\,dy.$$

Door integratie heeft men hieruit

$$p=y(f-r\,f')+r\chi-\chi,\ q=-y\int f\,f''\,dr+\psi'(y)+\int f\,\chi''\,dr;$$

lerhalve is

$$dz = p\,dx + q\,dy = \{y(f - rf') + r\chi' - \chi\}(\chi'' - yf'')dr -$$
$$- \{y(ff' - rf^2) + rf'\chi' - \chi f' + y\int ff''dr - \int f\chi''dr - \psi'(y)\}dy,$$

waaruit door integratie

$$z = -\tfrac{1}{2}y^2\{ff' - rf'^2 + \int ff''dr\} + y\{\chi f' - r\chi' f' + \int f\chi''dr\} +$$
$$+ \int (r\chi' - \chi)\chi''\,dr + \psi(y) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

In (36) en (37) hebben wij de integraal voor dit geval.

De vergelijking

$$s = f(t),$$

beantwoordende aan $m_2 = \infty$, laat zich natuurlijk op dezelfde wijze behandelen.

Zijn m_1 en m_2 beide constant, dan heeft de vergelijking (1) den vorm

$$s = ar + bt + e.$$

Het eerste hulpstelsel heeft dan de integralen

$$y - m_2 x = c, \quad u + m_1 v = c';$$

er zijn echter hier andere, minder in het oog vallende integralen, die spoediger tot de eindintegraal voeren. Aan het eerste hulpstelsel wordt ook voldaan door

$$p + m_1 q - (m_1 x + y)\,e = c'',$$

zoodat eene eerste integraal is

$$p + m_1 q = (m_1 x + y)\,e + \varphi(y - m_2 x),$$

en evenzoo natuurlijk

$$p + m_2 q = (m_2 x + y)\,e + \psi(y - m_1 x).$$

De waarden van p en q, hieruit opgelost en in $dz = pdx + qdy$ overgebracht, geven, als wij voor φ en ψ andere functien invoeren,

$$dz = (y\,dx + x\,dy)e + \psi'(y - m_1 x)\,d(y - m_1 x) + \varphi'(y - m_2 x)\,d(y - m_2 x),$$

dus

$$z = exy + \psi(y - m_1 x) + \varphi(y - m_2 x). \quad . \; . \; . \; (38)$$

Deze uitkomst wordt, gelijk bekend is, ook door de methode van Monge opgeleverd, welke methode trouwens, zoodra men met lineaire vergelijkingen te doen heeft, en integralen, die r, s of t bevatten, vermijden kan, met de hier gebruikte samenvalt.

Waren m_1 en m_2 niet alleen constant, maar ook aan elkaar gelijk, dan zouden zoowel (38) als (21) als algemeene integraal onbruikbaar worden. In dit geval heeft het hulpstelsel allerlei integralen, waarvan wij weer die, welke r, s of t bevatten, ongebruikt kunnen laten. Wij houden dan over

$$y - mx = c, \quad p + my = e(mx + y) + c'$$

en

$$z - (p + mq)x + emx^2 = c''.$$

Als integralen van de differentiaalvergelijking heeft men dus hier

$$p + mq = e(mx + y) + \varphi(y - mx),$$

$$z = (p + mq)x - emx^2 + \psi(y - mx).$$

De eliminatie van $p + mq$ geeft de eindintegraal

$$z = exy + x\varphi(y - mx) + \psi(y - mx).$$

Het zou niet gemakkelijk zijn, nog andere gevallen van integreerbaarheid dan de behandelde op het oog te ontdekken. Het kenmerk van Jacobi geeft ons echter het middel aan de hand om rechtstreeks te onderzoeken, of er nog meer zulke gevallen zijn. Wij zullen dit kenmerk op de beide vergelijkingen (5) toepassen, en zoodoende uitmaken,

De groot het aantal gemeenschappelijke integralen in de verschillende gevallen is.

Stellen wij de beide vergelijkingen symbolisch voor door

$$\Delta_1 w = 0 \quad \text{en} \quad \Delta_2 w = 0,$$

dan hebben wij op de coëfficiënten van de eerste vergelijking de bewerking Δ_2, en op die van de tweede de bewerking Δ_1 toe te passen, en het verschil van de beide uitkomsten te nemen.

De vergelijkingen (5) uitvoeriger geschreven zijn

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dw}{dx} + m_2 \frac{dw}{dy} + (p + m_2 q)\frac{dw}{dz} + (r + m_2 s)\frac{dw}{dp} + (s + m_2 t)\frac{dw}{dq} = 0, \\ &m_1^2 \frac{dw}{dr} - m_1 \frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

De uitkomst van de bewerking van Jacobi op deze vergelijkingen is

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{dy}\left(\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}\right) + \frac{dw}{dz} q \left(\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}\right) + \\ &\quad + \left\{(m_1^2 - m_1 m_2) + s\left(\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}\right)\right\} \frac{dw}{dp} \\ &\quad + \left\{(m_2 - m_1) + t\left(\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}\right)\right\} \frac{dw}{dq} = 0. \quad . \quad (40) \end{aligned}$$

Is nu in de eerste plaats $m_1 = m_2$, dan is ook $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt} = 0$, en de vergelijking (40) wordt identiek. De vergelijkingen (39) hebben dan het grootst mogelijke aantal gemeenschappelijke integralen, namelijk zes. Eene daarvan is, als altijd, de oorspronkelijke differentiaalvergelijking, waarin het tweede lid 0 door eene willekeurige constante vervangen is. Van de vijf andere hebben wij er drie reeds vroeger aangegeven, namelijk

$$m = c, \quad y - mx = c', \quad u + mv = c''.$$

De andere zijn

$$r + m s = c''', \quad z - (p + mq) x + {}^1/_2 x^2 (r + 2 m s + m^2 t) = c''''.$$

Mocht van eene van deze vergelijkingen het eerste lid constant worden, dan kwam voor de daardoor vervallende integraal eene andere in de plaats; bijv., als m eene constante was, de integraal

$$p + mq - e(mx + y) = c''''.$$

Is in de tweede plaats

$$\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt} = 0,$$

zonder dat $m_1 = m_2$ is, dan gaat (40) over in

$$\frac{dw}{dp} m_1 - \frac{dw}{dq} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

en dit is eene nieuwe vergelijking, die zich bij de gegevene van het stelsel (39) voegt. In geen geval kan dus nu het aantal integralen, de vergelijking $f = c$ medegerekend, meer dan vijf bedragen. Door toepassing van de bewerking op deze vergelijkingen twee aan twee vindt men

$$\frac{dw}{dp}\left(\frac{dm_1}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt}\right) = 0, \quad \ldots\ldots (42)$$

$$\frac{dw}{dz}(m_1 - m_2) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Mocht nu $\frac{dm_1}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt} = 0$ zijn, dan waren m_1 en m_2 constant, en het stelsel bestond nog uit de vier vergelijkingen (39), (41) en (43), die bij herhaalde toepassing der bewerking geene nieuwe vergelijkingen meer zouden voortbrengen. Er zouden dus buiten (1) nog drie integralen zijn, die alle reeds vroeger (pag. 241) zijn aangegeven, namelijk

$$y - m_2 x = c, \quad u + m_1 v = c', \quad p + m_1 q - e(m_1 x + y) = c''.$$

Vas de tweede factor in (42) niet gelijk aan nul, dan zou stelsel zich reduceeren tot

$$+m_2\frac{dw}{dy}=0,\ \frac{dw}{dr}m_1^2-\frac{dw}{ds}m_1+\frac{dw}{dt}=0,\ \frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dp}=\frac{dw}{dq}=0.$$

t stelsel laat behalve (1) hoogsten twee integralen toe, e geen van beide z, p of q kunnen bevatten. Als nieuwe rgelijking laat er zich alleen nog uit afleiden

$$\frac{dw}{dz}\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)=0,$$

vat volgens de gemaakte onderstellingen eene identiteit is; e beide integralen bestaan dus werkelijk, zooals wij reeds visten; wij vonden namelijk in dit geval $m_2=c$, $y-m_2x=c'$, of, als $m_2=0$ mocht zijn, $y=c$, $t=\int f'^2(r)\,dr+c'$.

Nog blijft te onderzoeken het geval, dat $\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}$ van nul verschilt. Deelen wij dan (40) door deze uitdrukking en stellen ter bekorting

$$\frac{m_1-m_2}{\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}}=L,$$

dan komt er

$$\frac{dw}{dy}+q\frac{dw}{dz}+(s+m_1L)\frac{dw}{dp}+(t-L)\frac{dw}{dq}=0,\ .\ (44)$$

en, door dit met m_1 vermenigvuldigd van de eerste vergelijking (39) af te trekken, vindt men

$$\frac{dw}{dx}+p\frac{dw}{dz}+(r-m_1m_2L)\frac{dw}{dp}+(s+m_2L)\frac{dw}{dq}=0.(45)$$

Het stelsel bestaat dus nu uit de tweede vergelijking (39)

en uit (44) en (45). De laatste twee vergelijkingen geven te zamen aanleiding tot de nieuwe vergelijking

$$(m_1 - m_2)\, L \frac{dw}{dz} = 0; \ldots\ldots\ldots (46)$$

(44) en (45) ieder op zich zelf met de tweede van (39) gecombineerd doen dan de volgende vergelijkingen ontstaan, waarin de bewerking $m_1^2 \frac{d}{dr} + \frac{d}{dt}$ kortheidshalve door Δ is voorgesteld:

$$(-m_1 + L\Delta m_1 + m_1 \Delta L)\frac{dw}{dp} + (1 - \Delta L)\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\{m_1^2 - L(m_1 \Delta m_2 + m_2 \Delta m_1) - m_1 m_2 \Delta L\}\frac{dw}{dp} +$$
$$+ (-m_1 + L\Delta m_2 + m_2 \Delta L)\frac{dw}{dq} = 0.$$

Merkt men op, dat $L\Delta m_2 = m_1 - m_2$ is, dan ziet men, dat deze beide vergelijkingen niet van elkaar onafhankelijk zijn, zoodat zij te zamen slechts ééne nieuwe vergelijking vormen. Het te integreeren stelsel is nu geworden

$$\frac{dw}{dx} + (r - m_1 m_2 L)\frac{dw}{dp} + (s + m_2 L)\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dy} + (s + m_2 L)\frac{dw}{dp} + (t - L)\frac{dw}{dq} \ldots\ldots (47)$$

$$(K_1 - m_1)\frac{dw}{dp} + {}_{dq} = 0,\ m_1^2 \frac{dw}{dr} - m_1 \frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0,\ \frac{dw}{dz} = 0,$$

waarin, alweer ter bekorting, gesteld is

$$K_1 = \frac{L\Delta m_1}{1 - \Delta L}.$$

Nog ééne nieuwe vergelijking laat zich hieruit afleiden, namelijk

$$(AK_1 - Am_1)\frac{dw}{dp} = 0.$$

Mocht $Am_1 = 0$ zijn, dan was deze vergelijking eene identiteit, en de vereischte twee integralen zouden aanwezig zijn. Wij hebben daarvoor vroeger gevonden

$$m_1 = c, \quad u + m_1 v = c'.$$

Hiermede zijn al de vroeger gevonden gevallen van integreerbaarheid teruggevonden, en het blijkt, dat er nog een ander aanwezig is, namelijk als

$$AK_1 - Am_1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

is, zonder dat Am_1 verdwijnt.

Dit laatste geval van integreerbaarheid splitst zich nog in twee verschillende, die eene afzonderlijken behandeling vereischen. Het eerste is dat, waarin $K_1 - m_1$ eene constante waarde heeft, het tweede dat, waarin dit niet het geval is. Het eerste geval, als het minst algemeene, behandelen wij het eerst, en onderstellen, dat hetzelfde geval zich ook bij het andere hulpstelsel voordoet, met andere woorden, dat ook $K_2 - m_2$, waarin K_2 de analoge beteekenis heeft met K_1, eene constante waarde heeft.

Beginnen wij met de voorwaarden op te sporen, waaraan de vergelijking (1) moet voldoen, opdat zich dit geval voordoe. Wij zullen de constante waarden van van $m_1 - K_1$ en $m_2 - K_2$ door M_1 en M_2 voorstellen; dan is

$$\frac{LAm_1}{1 - AL} - m_1 = \frac{A(Lm_1) - m_1}{1 - AL} = -M_1,$$

of

$$A(Lm_1) - m_1 = -M_1(1 - AL),$$

of ook

$$\frac{d(m_1 L)}{dr} m_1^2 + \frac{d(m_1 L)}{dt} - m_1 = M_1\left(\frac{dL}{dr} m_1^2 + \frac{dL}{dt} - 1\right),$$

en evenzoo

$$\frac{d(m_2 L)}{dr} m_2^2 + \frac{d(m_2 L)}{dt} - m_2 = M_2\left(\frac{dL}{dr} m_2^2 + \frac{dL}{dt} - 1\right).$$

L verandert namelijk niet, als daarin m_1 met m_2 verwisseld wordt: door m_1 en m_2 in R en T uit te drukken vindt men, dat

$$L = \frac{R(1-4RT)}{R^2\frac{dT}{dt} + (1-2RT)\frac{dR}{dt} + T^2\frac{dR}{dr}} \quad \ldots (49)$$

is.

Stelt men $M_1 + M_2 = 2\alpha$, $M_1 - M_2 = 2\beta$, dan heeft men hieruit door optelling

$$(m_1^3+m_2^3)\frac{dL}{dr} + {}^1/_3 L\frac{d(m_1^3+m_2^3)}{dr} + \frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)L\} - (m_1+m_2) =$$

$$= \alpha\left\{(m_1^2+m_2^2)\frac{dL}{dr} + 2\frac{dL}{dt} - 2\right\} + \beta\frac{dL}{dr}(m_1^2-m_2^2),$$

en door optelling na deeling van de eerste door m_1^2 en van de tweede door m_2^2

$$\frac{d\{(m_1+m_2)L\}}{dr} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{dL}{dt} - L\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) =$$

$$= \alpha\left\{2\frac{dL}{dr} + \left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right)\right\} + \beta\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right).$$

Voert men hierin voor m_1 en m_2, de waarden in uitgedrukt in R en T, en stelt

$$U = \frac{L}{R} = \frac{1-4RT}{R^2\frac{dT}{dt} + (1-2RT)\frac{dR}{dt} + T^2\frac{dR}{dr}} \quad . (50)$$

dan gaan deze vergelijkingen over in

$$\frac{dU}{dr}\{3RT - 1 - \alpha R(1-2RT) + \beta R\sqrt{(1-4RT)}\} -$$

$$-\frac{dU}{dt}(1+2\alpha R)R^2 + U\left\{T\frac{dR}{dr} + R\frac{dR}{dt} - \alpha\left((1-2RT)\frac{dR}{dr} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2R^2\frac{dR}{dt}\right) + \beta\frac{dR}{dr}\sqrt{(1-4RT)}\right\} + R + 2\alpha R^2 = 0$$

a

$$\frac{U}{r}(1+2\alpha R)T^2+\frac{dU}{dt}\{RT+\alpha R(1-2RT)+\beta R\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{T\frac{dR}{dt}+R\frac{dT}{dt}+\alpha\left(2T^2\frac{dR}{dr}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}\right)\right\}+$$

$$+\beta\frac{dR}{dt}\sqrt{(1-4RT)}-\alpha(1-2RT)+\beta\sqrt{(1-4RT)}-T=0$$

Hierbij zijn de indices 1 en 2 over de wortels der karakteristieke vergelijking zoo verdeeld, dat

$$m_1=\frac{-1+\sqrt{(1-4RT)}}{2R},\quad m_2=\frac{-1-\sqrt{(1-4RT)}}{2R}$$

is.

Door uit deze beide vergelijkingen $\frac{dU}{dr}$ te elimineeren, en met behulp van (50) $\frac{dR}{dr}$ te doen verdwijnen, bekomt men eene vergelijking, die na deeling door $R(1-4RT)$ overgaat in

$$\frac{dU}{dt}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{\frac{dT}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dt}-2\beta\frac{R\frac{dT}{dt}+T\frac{dR}{dt}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha T+(\alpha^2-\beta^2).$$

Evenzoo geeft de eliminatie van $\frac{dU}{dt}$ en de verdrijving van $\frac{dT}{dt}$

$$\frac{dU}{dr}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{\frac{dR}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dr}-2\beta\frac{R\frac{dR}{dt}+T\frac{dR}{dr}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha R+1.$$

Deze beide vergelijkingen kunnen door differentieeren worden afgeleid uit

$$U\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}=r+2\alpha f+(\alpha^2-\beta^2)t+C.$$

Deze vergelijking vertegenwoordigt dus de eenige voorwaarde, waaraan de differentiaalvergelijking (1) moet voldoen, opdat zich het hier behandelde geval voordoe. Drukt men α en β weer in M_1 en M_2 uit, dan laat zij zich aldus schrijven

$$T^2\frac{dR}{dr}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}+R^2\frac{dT}{dt}=$$
$$=\frac{(1-4RT)R(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{r+(M_1+M_2)f+M_1M_2t+C}\ldots\ldots\ldots(51)$$

Deze vergelijking, als differentiaalvergelijking in f als afhankelijk en r en t als onafhankelijk veranderlijken opgevat, zullen wij nu trachten te integreeren. De willekeurige constante C laten wij hierbij weg; uit het bijzonder geval, waartoe wij ons zoodoende bepalen, kan door eene geringe wijziging het algemeene worden afgeleid. Wij vervangen hierbij weer r, f of s, en t tijdelijk door x, z en y, en gebruiken de gewone notatie voor de differentiaalquotienten van *dezez* ten opzichte van *deze* x en y. De vergelijking (51) wordt dan

$$q^2r+(1-2pq)s+p^2t=\frac{(1-4pq)p(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{x+(M_1+M_2)z+M_1M_2y},\ldots(52)$$

De noemer van het tweede lid zullen wij voortdurend door G voorstellen. m_1 en m_2 zijn nu de wortels van

$$pm^2+m+q=0.\ldots\ldots\ldots(53)$$

Het grensgeval $M_1=M_2=\infty$, dat alleen als grensgeval in het algemeene geval begrepen is, behandelen wij vooraf afzonderlijk.

De vergelijking

$$q^2r+(1-2pq)s+p^2t=\frac{(1-4pq)p}{y}\ldots(54)$$

integreeren wij dus in de eerste plaats, en beginnen met haar te vereenvoudigen door z en y als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen.

Stelt men

$$\frac{dx}{dz} = P, \quad \frac{dx}{dy} = Q, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = R, \quad \frac{d^2x}{dz\,dy} = S, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = T,$$

dan is

$$p = \frac{1}{P}, \quad q = -\frac{Q}{P}, \quad r = -\frac{R}{P^3}, \quad s = \frac{QR - PS}{P^3},$$

$$t = -\frac{Q^2R - 2PQS + P^2T}{P^3},$$

en dit invoerende, doen wij de vergelijking (54) overgaan in

$$QR - PS - T = \frac{P^2 + 4Q}{y}$$

en (53) in

$$m^2 + Pm - Q = 0.$$

Hierin willen wij de afhankelijk veranderlijke weer z en de onafhankelijk veranderlijken x en y noemen, en de groote letters weer door kleine vervangen. De vergelijkingen worden dan

$$qr - ps - t = \frac{p^2 + 4q}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

en

$$m^2 + pm - q = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Op de vergelijking (55) passen wij nu weer de hier steeds gevolgde methode toe, en hebben dan te integreeren het stelsel (2), waarbij wij hier overal de t geëlimineerd denken door middel van (55), zoodat $\frac{dw}{dt} = 0$ gesteld kan worden. Het stelsel wordt dan

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dw}{dx} + \mu_2 \frac{dw}{dy} + (p + \mu_2 q)\frac{dw}{dz} + (r + \mu_2 s)\frac{dw}{dp} + \\ &\quad + \left(-\frac{r + \mu_2 s}{\mu_1} + \frac{p^2 + 4q}{q\mu_1 y}\right)\frac{dw}{dq} + \left(\frac{2pr + 4s}{qy}\right)\frac{dw}{dr} = 0, \\ &\frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (57)$$

wanneer μ_1 en μ_2 de wortels zijn der karakteristieke vergelijking

$$q\,\mu^2 + p\,\mu - 1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

De vergelijking van (58) met (56) leert, dat $\mu_1 = -\frac{1}{m_1}$, $\mu_2 = -\frac{1}{m_2}$ is.

In de eerste vergelijking (57) drukken wij p en q in μ_1 en μ_2 uit door middel van de betrekkingen

$$q = -\frac{1}{\mu_1\,\mu_2}, \quad p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\,\mu_2}. \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

Hierbij komen de volgende uit (59) gemakkelijk af te leiden vergelijkingen te pas:

$$\left.\begin{array}{l} p^2 + 4q = \dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2\,\mu_2^2}, \quad \dfrac{d\mu_1}{dp}\dfrac{p^2+4q}{q} = -\mu_1(\mu_1-\mu_2), \\ \dfrac{d\mu_1}{dp} = \dfrac{\mu_1^2\,\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \quad \dfrac{d\mu_2}{dp} = -\dfrac{\mu_2^2\,\mu_1}{\mu_1-\mu_2}, \\ r + 2\,\mu_2 s + \mu_2^2 t = \dfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\left((r+\mu_2 s) - \dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2 y}\right), \\ r + (\mu_1+\mu_2)s + \mu_1\,\mu_2 t = -\dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1\,\mu_2 y}. \end{array}\right\} \ldots (60)$$

Met behulp hiervan gaat het stelsel (57) over in

$$\frac{dw}{dx} + \mu_2\frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1} - \left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s) - \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2^2}{\mu_1 y}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}$$
$$- \frac{2\,\mu_1(r+\mu_2 s) + 2\,\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}\frac{dw}{dr} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

$$\frac{dw}{dr}\,\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Door den regel van Jacobi laat zich hieruit afleiden de nieuwe vergelijking

$$\frac{dw}{d\mu_2}\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}=0,$$

of, na deeling door $\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)$,

$$\frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Door (63) kan (61) vereenvoudigd worden tot

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\frac{\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{\mu_1-\mu_2}{y^2}\right\}\frac{dw}{dr}=0. \quad (64)$$

Wij hebben nu het stelsel (62), (63) en (64). De eerste geeft met geen van de beide andere eene nieuwe vergelijking, maar (63) en (64) te zamen geven

$$\frac{dw}{dy}-\frac{1}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0. \quad (65)$$

Met behulp hiervan vervangen wij (64) door

$$\frac{dw}{dx}+\frac{2}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0. \quad (66)$$

Deze laatste vergelijking geeft eindelijk nog met (63) $\frac{dw}{dz}=0$.

Wij hebben zoo gekregen het stelsel

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dw}{dx}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\
\frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\
\frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0,\quad \frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0,\quad \frac{dw}{dz}=0.
\end{array}\right\} (67)$$

De laatste leert, dat geen der integralen z bevatten kan. De vier andere kunnen wij, na ze alle op eene na met

eenen onbepaalden factor vermenigvuldigd te hebben, optellen. Daardoor ontstaat eene lineaire vergelijking, wier hulpstelsel den vorm heeft

$$dx = \frac{dy}{\gamma} = \frac{d\mu_1}{-\frac{\mu_1^2}{y} + \gamma\frac{\mu_1}{y}} = \frac{d\mu_2}{\delta} =$$

$$= \frac{dr}{\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y} - \gamma\left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2r + \mu_1 s}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right) + \delta\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} + \varepsilon\mu_1} = \frac{ds}{-\varepsilon}$$

De eliminatie van de onbepaalde grootheden γ, δ en ε geeft de beide vergelijkingen

$$\mu_1^2\, dx = \mu_1\, dy - y\, d\mu_1\,,$$

$$y^2(r + \mu_1 s)\, d\mu_1 - 3y(r + \mu_1 s)\mu_1\, dy - \mu_1 y^2 d(r + \mu_1 s) +$$
$$+ 2y\,\mu_1\, dy - y^2\, d\mu_1 - \frac{2\mu_1^2 d\, y}{\mu_2} + \frac{\mu_1^2\, d\,\mu_2}{\mu_2^2} = 0.$$

De eerste heeft tot integraal

$$\frac{\mu_1 x - y}{\mu_1} = c,$$

de laatste

$$\frac{y^3(r + \mu_1 s)}{\mu_1} - y^2\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = c'.$$

Vervangen wij μ_1 door $-\frac{1}{m_1}$ en μ_2 door $-\frac{1}{m_2}$, dan hebben wij voor (55) de eerste integraal

$$y^3(s - m_1 r) + y^2(m_1 - m_2) = \varphi(x + m_1 y).$$

Eene andere is natuurlijk

$$y^3(s - m_2 r) - y^2(m_1 - m_2) = \psi(x + m_2 y).$$

Uit deze beide vergelijkingen en (55) volgt

$$r = \frac{2}{y} - \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$s = \frac{m_1 + m_2}{y} - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$t = \frac{2 m_1 m_2}{y} - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}.$$

Hieruit heeft men

$$dp = -d(m_1 + m_2) = \frac{2\,dx + (m_1 + m_2)\,dy}{y} -$$

$$- \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dx - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dy,$$

$$dq = -d(m_1 m_2) = \frac{(m_1 + m_2)\,dx + 2 m_1 m_2\,dy}{y} -$$

$$- \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dx - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dy.$$

Eindelijk stellen wij

$$x + m_1 y = \alpha, \qquad x + m_2 y = \beta,$$

zoodat

$$m_1 = \frac{\alpha - x}{y}, \qquad m_2 = \frac{\beta - x}{y}, \qquad m_1 - m_2 = \frac{\alpha - \beta}{y}.$$

Hierdoor gaan onze vergelijkingen over in

$$d\alpha + d\beta = \frac{(\varphi - \psi)(y dx - x dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} + \frac{\beta \varphi - \alpha \psi}{y^2 (\alpha - \beta)}\,dy, \quad \ldots (68)$$

$$d(\alpha\beta) - x d(\alpha + \beta) = -\frac{(\varphi - \psi)(xy\,dx - x^2\,dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} +$$

$$+ \frac{(\beta \varphi - \alpha \psi)(y dx - 2 x dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} + \frac{(\beta^2 \varphi - \alpha^2 \psi)}{y^2 (\alpha - \beta)}\,dy.$$

De tweede vereenvoudigt zich met behulp van de eerste tot

$$d(\alpha\beta) = \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^3(\alpha-\beta)}(ydx - xdy) + \frac{\beta^2\varphi - \alpha^2\psi}{y^2(\alpha-\beta)}dy. \quad . \quad (69)$$

Lost men uit (68) en (69) dy en $ydx - xdy$ op, dan bekomt men

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{d\alpha}{\varphi} - \frac{d\beta}{\psi}, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{\alpha d\alpha}{\varphi} + \frac{\beta d\beta}{\psi}.$$

Eindelijk is

$$dz = pdx + qdy = -(m_1 + m_2)dx - m_1 m_2 dy =$$
$$= \frac{2x - \alpha - \beta}{y}dx - \frac{x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta}{y^2}dy =$$
$$= \frac{2xydx - x^2dy}{y^2} + \frac{xdy - ydx}{y^2}(\alpha+\beta) - \frac{dy}{y^2}\alpha\beta,$$

dus

$$d\left(z - \frac{x^2}{y}\right) = -\frac{\alpha^2 d\alpha}{\varphi} - \frac{\beta^2 d\beta}{\psi}.$$

Vervangt men nog φ door $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ en ψ door $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$, dan heeft men, na uitvoering der kwadraturen,

$$\frac{1}{y} = \chi'' + \omega'', \qquad \frac{x}{y} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \omega',$$

$$\frac{x^2 - yz}{y} = \alpha^2\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega.$$

Het blijkt dus achteraf, dat de vergelijking (54) door eene betrekkelijk eenvoudige substitutie tot (24) zou kunnen worden herleid.

Neemt men nu in aanmerking, dat x, y en z tijdelijk voor $s = f$, t, en r in de plaats gesteld zijn, dan ziet men, dat in dit geval de vergelijking (1) het resultaat der eliminatie van α en β uit het volgende drietal vergelijkingen moet zijn:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \chi''(\alpha) + \omega''(\beta), \quad \frac{s}{t} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \omega', \\ \frac{2-rt}{t} &= \alpha^2\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega \end{aligned}\right\} .(70)$$

Het algemeene geval, waarin M_1 en M_2 willekeurige constante waarden hebben, laat zich op dezelfde wijze behandelen. Door z en y als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen, en dan weer de onafhankelijk veranderlijken door x en y en de afhankelijk veranderlijke door z voor te stellen, doet men de vergelijking (52) overgaan in

$$qr - ps - t = \frac{(p^2 + 4q)(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}{z + (M_1 + M_2)x + M_1 M_2 y} =$$
$$= \frac{(p^2 + 4q)(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}{G} \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Het eerste hulpstelsel van deze vergelijking wordt, als men weer p en q in μ_1 en μ_2 uitdrukt, en t overal door middel van (71) geëlimineerd denkt,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dw}{dx} + \mu_2\frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 G}(1 + M_1\mu_1)(1 + M_2\mu_2)\frac{dw}{d\mu_1} - \\ &- \left\{\mu_2^2(r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2(1 + M_1\mu_1)(1 + M_2\mu_2)}{\mu_1^2 \quad G}\right\}\frac{dw}{d\mu_2} - \\ &- \left\{\frac{2\mu_1(r + \mu_2 s) + 2\mu_2(r + \mu_1 s)}{\mu_1\mu_2 G}(1 + M_1\mu_1)(1 + M_2\mu_2) - \right. \\ &- \frac{\mu_1 - \mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1 + M_2\mu_2)(r + \mu_1 s) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1 + M_1\mu_1)(r + \mu_2 s) - \\ &- \frac{(M_1 + M_2)\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2}{G^2\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1 - \mu_2)^2(1 + M_1\mu_1) \times \\ &\times (1 + M_2\mu_2)\left\{\frac{dw}{dr} = 0,\right. \\ &\qquad\qquad \frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (72)$$

De toepassing van het theorema van JACOBI leidt hier tot nog al omslachtige berekeningen, die wij op de volgende wijze zullen vermijden.

Wij beschouwen eerst het bijzondere geval $M_1 = M_2 = 0$. Wij weten dan vooruit, dat wij tot eene uitkomst moeten geraken, daar dit geval uit het vorige wordt afgeleid door verwisseling van y met z. Wij weten tevens, dat de integralen, die wij zeker zullen moeten vinden, geen y zullen bevatten, zoodat wij van den beginne af aan $\frac{dw}{dy} = 0$ kunnen stellen. De vergelijkingen (72) gaan dan over in

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \\
&- \left\{ \mu_2^3 (r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2^2}{\mu_1^2 z} \right\} \frac{dw}{d\mu_2} - \\
&- \left\{ \frac{(3\mu_1 - \mu_2)(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{z\mu_1} - \right. \\
&\left. - \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^3 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr}, \\
&\qquad \frac{dw}{dr} \mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0.
\end{aligned}\right\} \ldots (73)$$

Hieruit vindt men na behoorlijke vereenvoudiging als nieuwe vergelijking

$$\frac{dw}{d\mu_2} + \frac{2\mu_1 - \mu_2}{\mu_2^3 \mu_1 z} \frac{dw}{dr} = 0 \ldots\ldots (74)$$

Met behulp hiervan wordt de eerste vergelijking (73) vereenvoudigd tot

$$\mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \left\{ \frac{\mu_1(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{\mu_1 z} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\mu_1 - 2\mu_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr} = 0 \ldots\ldots\ldots (75)$$

Uit (74) en (75) brengt de bewerking van JACOBI de volgende vergelijking te voorschijn

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{z}\frac{dw}{d\mu_1} - \left\{\frac{3r + 4\mu_1 s}{\mu_1 z} + \frac{3\mu_1 - 2\mu_2}{\mu_1^2 \mu_2^2 z^2}\right\}\frac{dw}{dr} = 0, \ldots (76)$$

met behulp waarvan (75) nog tot

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1}{z}\frac{dw}{d\mu_1} + \left(\frac{\mu_1 s}{z} + \frac{1}{\mu_2^2 z^2}\right)\frac{dw}{dr} = 0. \ldots (77)$$

vereenvoudigd wordt. Nieuwe vergelijkingen behoeven wij niet te zoeken. Wij weten vooruit met zekerheid, dat dit zoeken een negatief resultaat zou hebben.

Behandelen wij het stelsel bestaande uit de tweede vergelijking (73) uit (74), (76) en (77) op dezelfde wijze als het stelsel (67), dan vinden wij de beide gemeenschappelijke integralen

$$x - \mu_1 z = c \quad \text{en} \quad \mu_1^3 z^3 (r + \mu_1 s) + \mu_1^2 z^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2^2} = c'.$$

In het algemeene geval vindt men met weinig moeite, dat (72) de integraal

$$\frac{x(1 - \mu_1 M_2) + y M_2 - z\mu_1}{1 + M_1 \mu_1} = c$$

heeft.

Vergelijkt men verder de integralen in de twee afzonderlijk behandelde bijzondere gevallen gevonden, dan dringt zich het vermoeden op, dat er in het algemeen eene integraal zal zijn van den vorm

$$G^3 (r + \mu_1 s) u + G^2 v = \text{constant},$$

waarin u en v functiën van μ_1 en μ_2 alleen zijn. Aan de tweede vergelijking (72) is hierdoor natuurlijk voldaan. Voert men de hier gelijk aan eene constante gesteldeuitdrukking voor w in de eerste vergelijking (72) in, en rangschikt het eerste lid naar de machten van G, dan ziet men, dat de coëfficiënt van G^3 de waarde $\mu_2^2 (r + \mu_2 s)(r + \mu_1 s) \frac{du}{d\mu_2}$

heeft. Zal deze gelijk aan nul zijn, dan kan u de μ_2 niet bevatten. De coëfficiënt van G^2 wordt dan

$$(r+\mu_1 s)(1+M_2\mu_2)\frac{(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1\mu_2}\left\{(3-M_1\mu_1)u-(1+M_1\mu_1)\mu_1\frac{du}{d\mu_1}\right\}-$$

$$-(r+\mu_2 s)\left\{\mu_2^2\frac{dv}{d\mu_2}+\frac{2\mu_1-\mu_2+M_2\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2}u(1+M_1\mu_1)\right\}.$$

Zal dit gelijk aan nul zijn onafhankelijk van r en s, dan moet vooreerst

$$(1+M_1\mu_1)\mu_1\frac{du}{d\mu_1}=u(3-M_1\mu_1)$$

zijn, waaruit, afgezien van eenen constanten factor, volgt

$$u=\frac{\mu_1^3}{(1+M_1\mu_1)^4}.$$

Verder is

$$\frac{dv}{d\mu_2}=-\frac{(2\mu_1-\mu_2+M_2\mu_1\mu_2)\mu_1^2}{\mu_2^3(1+M_1\mu_1)^3},$$

dus

$$v=\frac{\mu_1^2(\mu_1-\mu_2+M_2u_1\mu_2)}{(1+M_1\mu_1)^3\mu_2^2}+F(\mu_1).$$

Eindelijk is de coëfficiënt van G

$$2v\frac{(1+M_1\mu_2)(1+M_2\mu_2)}{\mu_2}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dv}{d\mu_1}+$$

$$+\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2}{\mu_1^2}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dv}{d\mu_2}+$$

$$+u\frac{(M_1+M_2\mu_1\mu_2+\mu_1+\mu_2}{\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1-\mu_2)^2(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2).$$

Men ziet dadelijk, dat v door $\mu_1-\mu_2$ deelbaar zal moeten zijn, zoodat $F(\mu_1)=-\frac{M_2\mu_1^2}{(1+M_1\mu_1)^3}$ zal moeten wezen, waardoor v de waarde

$$v = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}(\mu_1 - \mu_2)\frac{(1 + M_2\mu_2)}{(1 + M_1\mu_1)^3}$$

verkrijgt, en deze waarde blijkt werkelijk te voldoen, zoodat

$$\frac{G^3(r+\mu_1 s)\mu_1^3}{(1 + M_1\mu_1)^4} + \frac{G^2\mu_1^2(\mu_1-\mu_2)(1 + M_2\mu_2)}{\mu_2^2(1 + M_1\mu_1)^3} = c'$$

eene integraal van (72) is.

Vervangt men μ_1 door $-\frac{1}{m_1}$ en μ_2 door $-\frac{1}{m_2}$ en stelt

$$\frac{x(m_1 + M_2) + y\,m_1 M_2 + z}{m_1 - M_1} = \alpha,$$

dan heeft men dus als eerste integraal van (71)

$$s - m_1 r = -\frac{(m_1-m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} + \frac{(m_1-M_1)^4\varphi(\alpha)}{G^3}.$$

waar wij onmiddelijk deze kunnen bijvoegen:

$$s - m_2 r = \frac{(m_1-m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} + \frac{(m_2-M_2)^4\psi(\beta)}{G^3},$$

als

$$\frac{x(m_2 + M_1) + y\,m_2 M_1 + z}{m_2 - M_2} = \beta$$

gesteld wordt.

Uit deze beide vergelijkingen en (71) volgt nu

$$\left.\begin{aligned}
r &= \frac{2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{(m_1-M_1)^4\varphi - (m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)},\\
s &= \frac{(m_1+m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{m_2(m_1-M_1)^4\varphi - m_1(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)},\\
t &= \frac{2m_1m_2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{m_2^2(m_1-M_1)^4\varphi - m_1^2(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)}
\end{aligned}\right\}(78)$$

Uit de bepaling van α en β volgt

$$m_1 = -\frac{z + M_2 x + M_1 \alpha}{x + M_2 y - \alpha}, \quad m_2 = -\frac{z + M_1 x + M_2 \beta}{x + M_2 y - \beta}, \quad . \; (79)$$

$$m_1 - M_1 = -\frac{G}{x + M_2 y - \alpha}, \quad m_2 - M_2 = -\frac{G}{x + M_2 y - \beta} \; . \; (80)$$

Stellen wij

$$\left.\begin{array}{ll} z + M_2 x + M_1 \alpha = V_1, & z + M_1 x + M_2 \beta = V_2, \\ x + M_2 y - \alpha = U_1, & x + M_1 y - \beta = U_2, \end{array}\right\} (81)$$

dan is

$$V_1 + M_1 U_1 = V_2 + M_2 U_2 = G, \; . \; . \; . \; . \; . \; (82)$$

terwijl wij nog stellen

$$H_1 = V_1 + M_2 U_1, \quad H_2 = V_2 + M_1 U_2 \; . \; . \; . \; (83)$$

Door differentieeren volgt uit (79)

$$dm_1 = -\frac{dz + M_2 dx + M_1 d\alpha}{U_1} - \frac{dx + M_2 dy - d\alpha}{U_1} m_1,$$

of, als men voor dz hare waarde

$$pdx + qdy = -(m_1 + m_2) dx - m_1 m_2 dy$$

in de plaats zet,

$$dm_1 = \frac{(m_2 - M_2) dx + m_1 (m_2 - M_2) dy + (m_1 - M_1) d\alpha}{U_1} =$$

$$= -\frac{G}{U_1 U_2} (dx + m_1 dy) - G \frac{d\alpha}{U_1^2},$$

en evenzoo

$$dm_2 = -\frac{G}{U_1 U_2} (dx + m_2 dy) - G \frac{d\beta}{U_2^2}.$$

Met behulp hiervan vindt men uit de eerste twee vergelijkingen (78)

$$\frac{d\alpha}{U_1^2} + \frac{d\beta}{U_2^2} =$$

$$\frac{\{(m_1-M_1)^4\varphi-(m_2-M_2)^4\psi\}dx+\{m_2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1(m_2-M_2)^4\psi\}dy}{G^4(m_1-m_2)}$$

en uit de laatste twee

$$m_2\frac{d\alpha}{U_1^2} + m_1\frac{d\beta}{U_2^2} =$$

$$\frac{m_2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1(m_2-M_2)^4\psi\}dx+\{m_2^2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1^2(m_2-M_2)^4\psi\}dy}{G^4(m_1-m_2)}.$$

De oplossing van dy en dx hieruit geeft, als men (80) in aanmerking neemt,

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{d\alpha}{\varphi}U_1^2 + \frac{d\beta}{\psi}U_2^2, \\ dx &= -m_1\frac{d\alpha}{\varphi}U_1^2 - m_2\frac{d\beta}{\psi}U_2^2 = \frac{d\alpha}{\varphi}U_1V_1 + \frac{d\beta}{\psi}U_2V_2, \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

terwijl eindelijk hieruit met behulp van
$dz = -(m_1+m_2)dx - m_1m_2dy$ gevonden wordt

$$dz = m_1^2\frac{d\alpha}{\varphi}U_1^2 + m_2^2\frac{d\beta}{\psi}U_2^2 = \frac{d\alpha}{\varphi}V_1^2 + \frac{d\beta}{\psi}V_2^2 \quad . \quad (85)$$

De verdere integratie van dit stelsel is verschillend naarmate M_1 en M_2 al of niet gelijk zijn.

Is $M_1 = M_2 = M$, dan stellen wij ter bekorting $x + My = \delta$, $z + Mx = \gamma$, vervangen φ door $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ en ψ door $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$, en schrijven het stelsel in den vorm

$$\varphi = \delta^2(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) - 2\delta(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) + (\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta),$$

$$\psi = \gamma\delta(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) - (\gamma - M\delta)(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) - M(\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta),$$

$$z = \gamma^2(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) + 2M\gamma(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) + M^2(\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta).$$

Hieruit lossen wij de drie van α en β afhangende uitdrukkingen op, en vinden dan

$$\chi'''(\alpha)d\alpha+\omega'''(\beta)d\beta=\frac{dz+2Mdx+M^2dy}{G^2}=\frac{dG}{G^2}=-d\left(\frac{1}{G}\right),$$

$$\alpha\chi'''d\alpha+\beta\omega'''d\beta=\frac{\delta\,dz-(\gamma-M\delta)dx-M\gamma\,dy}{G^2}=-d\,\frac{x+My}{G},$$

$$\alpha^2\chi'''\,d\alpha+\beta^2\omega'''\,d\beta=\frac{\delta^2dz-2\gamma\delta\,dx+\gamma^2dy}{G^2}=$$

$$=d\left(y-\frac{(x+My)^2}{G}\right)=d\left(\frac{yz-x^2}{G}\right),$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{G}&=\chi''+\omega'',\quad -\frac{x+My}{G}=\alpha\chi''-\chi'+\beta\omega''-\beta',\\ \frac{yz-x^2}{G}&=\alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega.\end{aligned}\right\}(86)$$

Is $M_1 \gtrless M_2$ dan hebben wij uit (84) en (85), als wij φ door $\frac{1}{\varphi'}$, en ψ door $\frac{1}{\psi'}$, vervangen,

$$\frac{dy}{d\alpha}=U_1^2\varphi',\qquad \frac{dy}{d\beta}=U_2^2\psi',\qquad \frac{dx}{d\alpha}=U_1V_1\varphi',$$

$$\frac{dx}{d\beta}=U_2V_2\psi',\quad \frac{dz}{d\alpha}=V_1^2\varphi',\qquad \frac{dz}{d\beta}=V_2^2\psi'.$$

Daar nu

$$\frac{dU_1}{d\alpha}=\frac{dx}{d\alpha}+M_2\frac{dy}{d\alpha}-1$$

is, vindt men hieruit volgens (82) en (83)

$$\frac{dU_1}{d\alpha}=U_1(V_1+M_2U_1)\varphi'-1=U_1H_1\varphi'-1,$$

en evenzoo

$$\frac{dV_1}{d\alpha} = V_1 (V_1 + M_2 U_1) \varphi' + M_1 = V_1 H_1 \varphi' + M_1.$$

Hieruit volgt verder

$$M_2 \frac{dU_1}{d\alpha} + \frac{dV_1}{d\alpha} = \frac{dH_1}{d\alpha} = H_1^2 \varphi' + M_1 - M_2 \ldots (87)$$

Op dezelfde wijze is

$$\frac{dU_1}{d\beta} = U_2 G \psi', \qquad \frac{dV_1}{d\beta} = V_2 G \psi',$$

dus

$$M_2 \frac{dU_1}{d\beta} + \frac{dV_1}{d\beta} = \frac{dH_1}{d\beta} = G^2 \psi' \ldots\ldots (88)$$

Aan de vergelijking (87) trachten wij nu te voldoen door voor H_1 een functie h_1 van α alleen in de plaats te stellen, en stellen daartoe

$$h_1 = -\frac{1}{\varphi + (M_1 - M_2)\tau(\alpha)};$$

dan is

$$\frac{dh_1}{d\alpha} = \frac{\varphi' + (M_1 - M_2)\tau'}{\{\varphi + (M_1 - M_2)\tau\}^2} = \varphi' h_1^2 + \frac{(M_1 - M_2)\tau'}{\{\varphi + (M_1 - M_2)\tau\}^2}.$$

Zal dit voldoen, dan moet $\tau' = \{\varphi + (M_1 - M_2)\tau\}^2$, dus

$$\varphi = -(M_1 - M_2)\tau + \sqrt{\tau'}$$

zijn, derhalve

$$\varphi' = -(M_1 - M_2)\tau' + \frac{\tau''}{2\sqrt{\tau'}} \quad \text{en} \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{\tau'}}.$$

Hiermede is φ' in de nieuwe functie τ uitgedrukt. Voor deze laatste voeren wij echter nog eene andere in door de betrekking

$$\sqrt{\tau'} = \frac{\chi''}{2(M_1 - M_2)\,\chi'}.$$

Hierdoor wordt

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= \frac{\chi''^2}{4\,(M_1 - M_2)^2\,\chi'^2}, \\ \varphi' &= -\frac{\chi''^2}{4(M_1 - M_2)\chi'^2} + \frac{\chi'\chi''' - \chi''^2}{2(M_1 - M_2)\chi'^2} = \frac{2\,\chi'\chi''' - 3\,\chi''^2}{4(M_1 - M_2)\chi'^2}, \\ &\text{en} \\ h_1\,\varphi' &= \frac{3\,\chi''^2 - 2\,\chi'\chi'''}{2\,\chi'\chi''}, \end{aligned}\right\} \ldots (89)$$

Ten einde nu (87) verder te integreeren, stellen wij

$$H_1 = h_1 + \frac{1}{\lambda};$$

dan wordt

$$\frac{d\,h_1}{d\,\alpha} - \frac{\frac{d\,\lambda}{d\alpha}}{\lambda^2} = h_1^2\,\varphi' + \frac{2\,h_1\,\varphi'}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\lambda^2} + M_1 - M_2,$$

of, na invoering van de waarde van h_1 en φ',

$$\frac{d\,\lambda}{d\,\alpha} + \lambda\,\frac{3\,\chi''^2 - 2\,\chi'\chi'''}{\chi'\chi''} + \frac{2\,\chi'\chi''' - 3\,\chi''^2}{4\,(M_1 - M_2)\,\chi'^2} = 0.$$

welke lineaire vergelijking tot integraal heeft

$$\lambda = \frac{\chi''^2}{\chi'^3}\left(F_1(\beta) - \frac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,(M_1 - M_2)\,\chi''}\right),$$

zoodat

$$H_1 = +\,\frac{2\,\chi'\,(M_2 - M_1)}{\chi''} + \frac{(M_2 - M_1)\,\chi'^3}{\chi''^2\left\{-f_1(\beta) + \frac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right\}} \ldots (90)$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$H_2 = \frac{2\,\omega'}{\omega''}\,(M_1 - M_2) + \frac{(M_1 - M_2)\,\omega'^3}{\omega''^2\left\{-f_2(\alpha) + \frac{\omega\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''}\right\}}, \ldots (91)$$

wanneer men analoog met (89) stelt

$$\psi' = -\frac{2\,\omega'\,\omega''' - 3\,\omega''^2}{4\,(M_1 - M_2)\,\omega'^2}.$$

Uit (88) en (90) heeft men nu

$$G^2 = \frac{4\,(M_1 - M_2)^2\,\chi'^3\,\omega'^2\,f_1'(\beta)}{\chi''^2\,(2\,\omega'\,\omega''' - 3\omega''^2)\left(-f_1(\beta) + \dfrac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)^2},$$

terwijl uit (91) op analoge wijze wordt afgeleid

$$G^2 = \frac{4\,(M_1 - M_2)^2\,\omega'^3\,\chi'^2\,f_2'(\alpha)}{\omega''^2\,(2\,\chi'\,\chi''' - 3\chi''^2)\left(-f_2(\alpha) + \dfrac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''}\right)^2}.$$

De vergelijking dezer beide waarden van G^2 leert, dat

$$f_1(\beta) = \frac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''}, \quad f_2(\alpha) = \frac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}$$

is, terwijl de invoering hiervan geeft

$$\left.\begin{aligned}
G &= \frac{(M_1 - M_2)\,\chi'^{3/2}\,\omega'^{3/2}}{\omega''\,\chi''\left(\dfrac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}, \\
H_1 &= (M_2 - M_1)\left\{\frac{2\chi'}{\chi''} - \frac{\chi'^3}{\chi''^2\left(\dfrac{\omega\omega'' - 2\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\chi'' - 2\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}\right\}, \\
H_2 &= (M_1 - M_2)\left\{\frac{2\omega'}{\omega''} + \frac{\omega'^2}{\omega''^2\left(\dfrac{\omega\omega'' - 2\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\chi'' - 2\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}\right\}
\end{aligned}\right\}, \ldots (92)$$

Deze drie vergelijkingen vertegenwoordigen de gezochte integraal. Opdat wij met het hier beschouwde geval van integreerbaarheid te doen hebben, moet de differentiaalvergelijking (1) dus het resultaat der eliminatie van α en β zijn, hetzij uit

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r+2Ms+M^2t}=-\chi''-\omega'',\\
&\frac{s+Mt}{r+2Ms+M^2t}=-\alpha\chi''+\chi'-\beta\omega''+\omega',\\
&\frac{rt-s^2}{r+2Ms+M^2t}=\alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega,
\end{aligned}\right\}.(93)$$

hetzij uit

$$\left.\begin{aligned}
&r+(M_1+M_2)s+M_1M_2t=\\
&\qquad=\frac{(M_1-M_2)\,\chi''^{3/2}\,\omega''^{3/2}}{\omega'\,\chi''\left\{\dfrac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\dfrac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}},\\
&r+2M_1s+M_1^2t=\\
&\quad=(M_1-M_2)\left\{\beta+\frac{2\omega'}{\omega''}+\frac{\omega'^3}{\omega''^2\left\{\dfrac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\dfrac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}}\right\},\\
&r+2M_2s+M_2^2t=\\
&\quad=(M_2-M_1)\left\{\alpha+\frac{2\chi'}{\chi''}-\frac{\chi'^3}{\chi''^2\left\{\dfrac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\dfrac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}}\right\}
\end{aligned}\right\}.(94)$$

De C is hierbij nog altijd gelijk aan nul ondersteld; de wijziging, die in het tegenovergestelde geval noodig is, is gemakkelijk aan te brengen.

De integratie hangt nu af van het stelsel (47). Telt men de eerste vier vergelijkingen van dat stelsel bij elkaar op, na drie er van met onbepaalde factoren vermenigvuldigd te hebben, dan komt er eene vergelijking, wier LAGRANGE's hulpstelsel is

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\gamma}=\frac{dp}{r-m_1m_2L+\gamma(s+m_1L)+\delta(K_1-m_1)}=$$
$$\frac{dq}{(s+m_2L)+\gamma(t-L)+\delta}=\frac{dr}{\varepsilon m_1^2}=\frac{ds}{-\varepsilon m_1}=\frac{dt}{\varepsilon}.\quad(95)$$

Wij elimineeren de onbepaalde coëfficiënten γ, δ en ε, en

vervangen $K_1 - m_1$ door hare waarde $-M_1$, zoodoende vinden wij

$$\left.\begin{aligned} dp + M_1 dq = dx\,\{r + M_1 s + (M_1 - m_1)\,m_2 L\} + \\ + dy\,\{s + M_1 t - (M_1 - m_1)\,L\} = 0, \\ ds + m_1\,dt = 0, \qquad dr - m_1^2\,dt = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (96)$$

Daar

$$\Delta(L\,m_1) - M_1\,\Delta L = m_1 - M_1$$

is, geeft de laatste der vergelijkingen (96)

$$m_1 = \frac{d\,\{L\,(m_1 - M_1)\}}{dt} + M_1,$$

en dit vermenigvuldigd met dt geeft in verband met de tweede van (96)

$$s + L\,(m_1 - M_1) + M_1\,t = c.$$

als eerste integraal van het stelsel (96).

De eerste vergelijking (96) heeft nu in verband hiermede tot integraal

$$p + M_1 q - x\,\{r + M_1 s - (m_1 - M_1)\,m_2 L\} - y\,\{s + M_1 t + (m_1 - M_1)\,L\} = c'.$$

Volgens (50) en (51) is echter

$$L = \frac{r + (M_1 + M_2)\,s + M_1\,M_2\,t}{(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}.$$

Dit invoerende geven wij aan de gevonden integralen den vorm

$$\frac{r + (M_1 + m_2)\,s + M_1\,m_2\,t}{m_2 - M_2} = c,$$

$$p + M_1 q + (M_2 x - y)\,\frac{r + (M_1 + m_2)\,s + M_1\,m_2\,t}{m_2 - M_2} = c'.$$

Letten wij op de beteekenis β in (93) en (94), dan zien wij, dat eene eerste integraal van de te integreeren vergelijking is

$$p + M_1 q + \beta (M_2 x - y) = \varphi(\beta) \ldots . (97)$$

Eene andere is dan natuurlijk

$$p + M_2 q + \alpha (M_1 x - y) = \psi(\alpha) \ldots . (98)$$

Bij het zoeken van de eindintegraal moeten wij weer onderscheid maken tusschen de gevallen waarin M_1 en M_2 gelijke en ongelijke waarden hebben. Wij onderstellen in de eerste plaats, dat $M_1 = M_2 = M$ is; dan volgt uit (97) en (98)

$$p + Mq = \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}, \quad y - Mx = \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta} . (99)$$

Verder is

$$dp + Mdq = (r + Ms)dx + (s + Mt)dy = (s + Mt)(dy - Mdx) + Gdx,$$

dus

$$dx = \frac{dp + Mdq - (s + Mt)(dy - Mdx)}{G} . . (100)$$

Vervolgens heeft men

$$dq = sdx + tdy = (s + Mt)dx + t(dy - Mdx) = \frac{s + Mt}{G}(dp + Mdq) -$$

$$- \left\{ \frac{(s + Mt)^2}{G} - t \right\} (dy - Mdx) = \frac{s + Mt}{G}(dp + Mdq) - \frac{s^2 - rt}{G}(dy - Mdx). (101)$$

Uit (100) volgt

$$x = \frac{p + Mq}{G} - \frac{s + Mt}{G}(y - Mx) - \int (p + Mq)\, d\frac{1}{G} +$$

$$+ \int (y - Mx)\, d\frac{s + Mt}{G} = - \frac{\alpha\psi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi'' + \omega'') +$$

$$+ \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\chi'' - \chi + \beta\omega'' - \omega) + \int \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi''' d\alpha + \omega''' d\beta) -$$

$$- \int \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\chi''' d\alpha + \beta\omega''' d\beta) =$$

$$- \psi\chi'' - \varphi\omega'' - \frac{(\varphi - \psi)(\chi' + \omega')}{\alpha - \beta} + \int \psi\chi''' d\alpha + \int \varphi\omega''' d\beta$$

Op dezelfde wijze volgt uit (101)

$$q = -\psi(\alpha\chi'' - \chi') - \varphi(\beta\omega'' - \omega') -$$

$$-\frac{(\varphi-\psi)(\alpha\chi'-2\chi+\beta\omega'-2\omega)}{\alpha-\beta} + \int \alpha\psi\chi'''d\alpha + \int \beta\varphi\omega'''d\beta.$$

Eindelijk is

$$dz = pdx + qdy = (p + Mq)dx + qd(y - Mx),$$

dus

$$z = q(y-Mx) + \int (p+Mq)dx - \int (y-Mx)dq = q(y-Mx) +$$

$$+\int \left[\frac{(p+Mq)d(p+Mq) - (s+Mt)\{(p+Mq)d(y-Mx) +}{G}\right.$$

$$\left.\frac{+(y-Mx)d(p+Mq)\} + (s^2-rt)(y-Mx)d(y-Mx)}{G}\right] = q(y-Mx) +$$

$$+\frac{(p+Mq)^2 - 2(s+Mt)(p+Mq)(y-Mx) + (s^2-rt)(y-Mx)^2}{2G} -$$

$$-\int \frac{(p+Mq)^2}{2} d\frac{1}{G} + \int (p+Mq)(y-Mx)d\frac{s+Mt}{G} -$$

$$-\int \frac{(y-Mx)^2}{2} d\frac{(s^2-rt)}{G} = -\frac{\chi''\psi^2}{2} - \frac{\omega''\varphi^2}{2} - \frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}(\alpha\chi''\psi + \beta\omega''\varphi) -$$

$$-\left(\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\right)^2(\alpha\chi' + \beta\omega' - \chi - \omega) + \tfrac{1}{2}\int \alpha^2\chi'''\psi^2 d\alpha + \tfrac{1}{2}\int \beta^2\omega'''\varphi^2 d\beta +$$

$$+\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\left\{\int \alpha\chi'''\psi^2 d\alpha + \int \beta\omega'''\varphi^2 d\beta\right\}$$

Hiermede zijn weer x, y en z in α en β uitgedrukt.

Dit geval kan door eene betrekkelijk eenvoudige substitutie tot een vroeger behandeld geval worden teruggebracht.

Ook in het algemeenere geval $M_1 \gtrless M_2$ zou de integratie zoo kunnen worden uitgevoerd, dat de drie veranderlijken x, y en z in α en β werden uitgedrukt. Er is daartegen geen ander bezwaar dan de omvang der berekeningen en de samengesteldheid der uitkomsten. Dit bezwaar van practischen

aard dwingt ons, ons te bepalen tot het aangeven van den te volgen weg, zonder de berekeningen uit te voeren.

In de eerste plaats geeft dan de differentiatie van de vergelijkingen (97) en (98).

$$(r + M_1 s + M_2 \beta)\, dx + (s + M_1 t - \beta)\, dy = (y - M_2 x + \varphi')\, d\beta.$$
$$(r + M_2 s + M_1 \alpha)\, dx + (s + M_2 t - \alpha)\, dy = (y - M_1 x + \psi')\, d\alpha.$$

Let men op (81), en neemt de gewijzigde notatie in aanmerking, dan ziet men, dat deze vergelijkingen korter aldus kunnen worden geschreven.

$$\left.\begin{aligned} V_2\, dx + U_2\, dy &= (y - M_2 x + \varphi')\, d\beta \\ V_1\, dx + U_1\, dy &= (y - M_1 x + \psi')\, d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (102)$$

Met behulp van (82) en (83) kunnen V_1, V_2, U_1 en U_2 in H_1, H_2 en G worden uitgedrukt, die op hare beurt bekende functien van α en β zijn. Ook U_1 V_1, U_2 en V_2 kunnen dus in α en β worden uitgedrukt, en er blijft niets te doen over dan de bovenstaande simultane lineaire vergelijkingen te integreeren, een proces, dat tot enkel kwadraturen kan worden teruggebracht. Hierdoor zijn x en y in α en β uitgedrukt. Uit (97) en (98) vindt men dan p en q en eindelijk z door integratie van $dz = p\, dx + q\, dy$.

Is eene differentiaalvergelijking van den vorm (1) ter integratie gegeven, en heeft men zich door haar aan (51) te toetsen overtuigd, dat zij tot dit geval van integreerbaarheid behoort, dan kan men òf de waarde van r, s en t uit (94) in de vergelijking overbrengen, en zoodoende de functien χ en ω bepalen, waardoor dan tevens weer U_1, U_2, V_1 en V_2 in α en β zijn uitgedrukt, òf men kan uit de gegeven vergelijking en de twee vergelijkingen die α en β bepalen r. s en t oplossen of ook r, s, t, α en β alle vijf in twee naar omstandigheden te kiezen nieuwe onafhankelijk veranderlijken uitdrukken. Het verdere hangt dan weer af van de integratie van het lineaire stelsel (102), die altijd mogelijk is.

Nog blijft ter behandeling over het geval, dat aan de

vergelijking (48) is voldaan, zonder dat $K_1 - m_1$ eene constante waarde heeft. Het is ons niet gelukt tot eene behandeling van dit geval te geraken, even volledig, als die van de voorgaande gevallen. Voert men in (48) en de vergelijking, die daaruit door verwisseling van m_1 met m_2 kan worden afgeleid de R en T in, op dezelfde wijze, als wij dat in al de voorgaande gevallen hebben gedaan, dan ontstaan twee zeer ingewikkelde vergelijkingen, die, als differentiaalvergelijkingen in r en t als onafhankelijk en s als afhankelijk veranderlijken beschouwd, van de vierde orde zijn. Of deze ook hier weer, even als in het voorgaande geval, in ééne vergelijking van lagere orde kunnen worden samengevat, en zoo ja, of deze verder geïntegreerd kan worden, is ons niet gelukt uit te maken.

Gemakkelijk kunnen echter ook in dit geval de eerste integralen worden bepaald. Op dezelfde wijze als in het voorgaande geval wordt uit (47) het stelsel (95) afgeleid, en de eliminatie van γ, δ en ε verschaft ons het stelsel

$$\left.\begin{aligned} dp + (m_1 - K_1)\, dq = dx\,\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} + \\ + dy\,\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = 0, \\ dr + m_1\, ds = 0, \qquad dr - m_1^2\, dt = 0. \end{aligned}\right\} . (103)$$

De laatste vergelijking geeft in verband met (48) de integraal

$$m_1 - K_1 = c,$$

en in verband hiermede geeft de eerste

$$p - (m_1 - K_1) q - x\,\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} - y\,\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = c',$$

zoodat de eerste integralen zijn

$$\left.\begin{aligned} p + (m_1 - K_1)\, q - x\,\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} - \\ - y\,\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = \varphi(m_1 - K_1), \\ p + (m_2 - K_2)\, q - x\,\{r + m_2 s - K_2(s + m_1 L)\} - \\ - y\,\{s + m_2 t - K_2(t - L)\} = \psi(m_2 - K_2). \end{aligned}\right\} \ldots (104)$$

De verdere integratie wordt natuurlijk eerst mogelijk, als

de te integreeren differentiaalvergelijking gegeven is. Zij hangt ook hier weer af van een stelsel van simultane lineaire differentiaalvergelijkingen.

Mogt ééne van de waarde van $m_1 - K_1$ en $m_2 - K_2$ constant zijn, dan zou eene der eerste integralen den vorm (97 of (98) de andere den vorm (104) hebben.

Wij hebben overal de vergelijking (1) naar s opgelost ondersteld. Men zal gemakkelijk inzien, dat, als de vergelijking in den vorm

$$f(r, s, t) = 0$$

gegeven was, men overal slechts R door $-\dfrac{\frac{df}{dr}}{\frac{df}{ds}}$ en T door $-\dfrac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{ds}}$ behoeft te vervangen, en evenzoo voor de hoogere afgeleiden. Eén geval is echter hierdoor van ons onderzoek uitgesloten geworden, namelijk het geval, dat de differentiaalvergelijking de s niet bevat. Ook dat geval willen wij nu nog onderzoeken, en onderstellen daarbij de vergelijking opgelost naar r, zoodat te integreeren is de vergelijking

$$r = F(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

m_1 is dan gelijk aan $-m_2$, en eene functie van t; wij zullen haar m noemen. De vergelijkingen (39) worden dan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + (p - mq)\frac{dw}{dz} + (r - ms)\frac{dw}{dp} + (s - mt)\frac{dw}{dq} = 0, \\ m^2\frac{dw}{dr} - m\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} (106)$$

Door de bewerking van Jacobi hierop toe te passen, heeft men

$$-\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dy} - q\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dz} + \left(2m^2 - s\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dp} - \left(2m + t\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dq} = 0. (107)$$

Deze vergelijking wordt identiek als $m = 0$ is, en dus de gegeven vergelijking van den vorm

$$r = a.$$

Er zijn in dat geval zes integralen van (106), vijf behalve $r =$ constant, namelijk

$$y = c, \quad s = c', \quad p - rx = c'', \quad z - px + {}^1/_2 rx^2 = c''', \quad q - sx = c''''.$$

Uit de eerste, derde en vierde vindt men

$$p - rx = \varphi(y), \qquad z - px + {}^1/_2 rx^2 = \psi(y),$$

en de eliminatie van p en r geeft

$$z = {}^1/_2 a x^2 + x\varphi(y) + \psi(y),$$

zooals men gemakkelijk ook op allerlei andere wijzen vindt.

Is m niet gelijk aan nul, maar aan eene andere constante waarde, dan heeft de differentiaalvergelijking den vorm

$$r = at + b.$$

De vergelijking (107) gaat dan over in

$$m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

en tengevolge hiervan wordt de eerste vergelijking (106) vereenvoudigd tot

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + (p - mq)\frac{dw}{dz} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0,$$

Deze geeft met (108)

$$\frac{dw}{dz} = 0.$$

Nieuwe vergelijkingen kan men uit deze niet meer afleiden, zoodat het stelsel geworden is

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0, \qquad m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0,$$

$$m^2\frac{dw}{dr} - m\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dz} = 0.$$

Er moeten hier dus buiten de gegeven vergelijking drie integralen zijn. Zij zijn

$$y + mx = c, \qquad s + mt = c', \qquad p + mq - (r - m^2t)\,x = c''.$$

Daar $r - m^2t = b$ is, volgt hieruit de eerste integraal

$$p + mq - bx = \varphi\,(y + mx),$$

terwijl het andere hulpstelsel op dezelfde wijze geeft

$$p - mq - bx = \psi\,(y - mx)$$

Hieruit is

$$p - bx = {}^1/_2\,\varphi + {}^1/_2\,\psi\,,$$

$$q = \frac{\varphi - \psi}{2m},$$

dus

$$dz = bx\,dx + {}^1/_2\,(\varphi + \psi)\,dx + \frac{\varphi - \psi}{2m}\,dy.$$

Nieuwe willekeurige functiën invoerende heeft men hieruit

$$z = {}^1/_2\,bx^2 + \chi\,(y + mx) + \omega\,(y - mx).$$

Is m eene werkelijke functie van t, dan kan men (107) door $\frac{dm}{dt}$ deelen, waardoor zij overgaat in

$$\frac{dw}{dy} + q\frac{dw}{dz} + \left(s - \frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp} + \left(t + \frac{2\,m}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq} = 0,$$

terwijl met behulp hiervan de eerste vergelijking (106) veranderd wordt in

$$\frac{dw}{dx}+p\frac{dw}{dz}+\left(r-\frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp}+\left(s+\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq}=0.$$

De laatste twee vergelijkingen geven te zamen nog

$$\frac{dw}{dz}=0,$$

terwijl zij, met de tweede vergelijking (106) gecombineerd, opleveren

$$-\left(m+\frac{d}{dt}\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp}+\left(1+\frac{d}{dt}\frac{2\,m}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq}=0,$$

$$\left(m^2-\frac{d}{dt}\frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp}+\left(-m+\frac{d}{dt}\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq}=0.$$

Men overtuigt zich gemakkelijk, dat de laatste vergelijking een gevolg is van de voorlaatste, zoodat wij nu het volgende stelsel van vijf vergelijkingen hebben:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dw}{dx}+(r-m^2K)\frac{dw}{dp}+(s+mK)\frac{dw}{dq}=0,\\[2ex]
\frac{dw}{dy}+(s-mK)\frac{dw}{dp}+(t+K)\frac{dw}{dq}=0,\\[2ex]
\frac{dw}{dz}=0,\quad \left(3\,m+m\frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{dp}-\left(1+\frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{dq}=0,\\[2ex]
m^2\frac{dw}{dr}-m\frac{dw}{ds}+\frac{dw}{dt}=0,
\end{array}\right\}\ldots(109)$$

waarin gesteld is

$$K=\frac{2\,m}{\frac{dm}{dt}}.$$

Alleen, wanneer zich hieruit geen nieuwe vergelijkingen laten afleiden, is het mogelijk, dat de vereischte twee integralen bij het eerste hulpstelsel voorkomen. Daartoe nu is noodig een voldoende, dat

$$\frac{d}{dt} m \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{dK}{dt}} \right) = 0,$$

of

$$m \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{dK}{dt}} \right) = \text{constant} \quad . \; . \; . \; (110)$$

is.

De constante in (110) stellen wij door $\frac{b^2}{a^2}$ voor; dan wordt

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{2m}{\frac{dm}{dt}} = 2 - \frac{2\, m \frac{d^2 m}{dt^2}}{\left(\frac{dm}{dt}\right)^2} = \frac{3\, a^2 m - b^2}{b^2 - a^2\, m},$$

derhalve

$$\frac{d \frac{dm}{dt}}{\frac{dm}{dt}} = \frac{5\, a^2 m - 3 b^2}{3 m (a^2 m - b^2)} dm \quad \text{of} \quad \frac{dm}{dt} = (a^2\, m - b^2)\, m^{3/2},$$

en dus

$$t + c = \frac{2}{b^2 \sqrt{m}} + \frac{a}{b^3} \log. \frac{a \sqrt{m} - b}{a \sqrt{m} + b}, \quad . \; . \; . \; . \; (111)$$

waarin c eene nieuwe integratieconstante is. Daar verder

$$m^2 = \frac{dF}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

is, heeft men

$$r + g = \int m^2\, dt,$$

of uitgewerkt

$$r + g = \frac{2}{a^2} \sqrt{m} + \frac{b}{a^3} \log. \frac{a \sqrt{m} - b}{a \sqrt{m} + b} \quad . \; . \; . \; . \; (112)$$

Opdat zich dus dit geval van integreerbaarheid voordoe, moet de te integreeren vergelijking het resultaat der eliminatie van m uit (111) en (112) zijn. Deze eliminatie is gemakkelijk uit te voeren, maar geeft eene tamelijk samengestelde vergelijking.

Voor K vindt men gemakkelijk de waarde

$$K = \frac{2}{(a^2 m - b^2)\sqrt{m}}.$$

In het stelsel vergelijkingen (109) vereenvoudigt zich nu de vierde tot

$$b^2 \frac{dw}{dp} - a^2 \frac{dw}{dq} = 0.$$

Op dezelfde wijze handelende als met de vergelijkingen (47) waar wij deze tot (96) herleidden, vinden wij hier de integralen

$$s + \int m\, dt = c_1,$$

$$a^2 p + b^2 q - x\{a^2(r - m^2 K) + b^2(s + mK)\} - y\{a^2(s - mK) + b^2(t + K)\} = c_1'.$$

Stelt men nog

$$\int m\, dt = L,$$

dan is eene eerste integraal der differentiaalvergelijking

$$a^2 p + b^2 q - x\{a^2(r - m^2 K) + b^2(s + m K)\} - \\ - y\{a^2(s - m K) + b^2(t + K)\} = \varphi(s + L),$$

en eene andere

$$a^2 p - b^2 q - x\{a^2(r - m^2 K) - b^2(s - m K)\} - \\ - y\{a^2(s + m K) - b^2(t + K)\} = \psi(s - L),\text{*)}$$

*) Vervangt men in (110) m door $-m$ en herhaalt de geheele verdere bewerking, dan blijkt, dat daarbij in plaats van b en a moet komen $b\varepsilon$ en $a\varepsilon^3$, als ε een der vierdemachtswortels uit -1 voorstelt, daar anders t en r niet dezelfde waarden kunnen verkrijgen, zooals toch natuurlijk noodig is. Het blijkt dan tevens, dat ook K niet verandert, en L alleen het tegengestelde teeken krijgt. De imaginaire factor $\pm i = \varepsilon^2$ kan in de functie ψ worden opgenomen.

terwijl L de waarde heeft

$$L = \frac{1}{ab} \log. \frac{a\sqrt{m} - b}{a\sqrt{m} + b}.$$

Voeren wij voor r, t en K de waarden in uitgedrukt in m en L, en nemen de halve som en het halve verschil van bovenstaande vergelijkingen, dan vinden wij

$$\left.\begin{aligned} a^2 p - x(b^2 L - a^2 g) - y a^2 s &= \frac{\varphi + \psi}{2}, \\ b^2 q - x b^2 s - y(a^2 L - b^2 c) &= \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{aligned}\right\} \ldots (113)$$

Beschouwen wij nu m en s als onafhankelijk veranderlijken, differentieeren ten opzichte daarvan, en drukken t, r en dL in m uit, dan komt er

$$2\sqrt{m}\frac{dx}{ds} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{m}}\frac{dy}{ds} - b^2 x = \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \ldots (114)$$

$$2m(a^2 m - b^2)\frac{dx}{dm} - b^2 x = \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \quad 2(a^2 m - b^2)\frac{dy}{dm} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2} \ldots (115)$$

De integratie van (115) geeft

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 m - b^2)}}{\sqrt{m}} \left\{ S_1 + \int \frac{(\varphi' - \psi')\, dm}{4(a^2 m - b^2)^{3/2} m^{1/2}} \right\},$$

$$y = \sqrt{(a^2 m - b^2)} \left\{ S_2 + \int \frac{(\varphi' + \psi')\, dm}{4\,(a^2 m - b^2)^{3/2}} \right\},$$

waarin S_1 en S_2 functien van s alleen zijn.

De substitutie van deze waarden in (114) geeft ter bepaling van S_1 en S_2 de volgende betrekkingen

$$2\frac{dS_1}{ds} - a^2 S_2 = 0, \quad 2\frac{dS_2}{ds} - b^2 S_1 = 0,$$

waaruit volgt

$$S_1 = a\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} + \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right), \quad S_2 = b\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} - \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right).$$

Hierin stellen α en β nieuwe integratieconstanten voor.

Voert men dit in, en drukt m in L uit, dan vindt men

$$x = 2\,a^2 \frac{\alpha e^{\frac{1}{2}abs} + \beta e^{-\frac{1}{2}abs}}{e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL}} +$$

$$+ \frac{a}{4\,b\,(e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL})} \int (\varphi' - \psi')\,(e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL})\,dL,$$

$$y = 2\,b^2 \frac{\alpha\, e^{\frac{1}{2}abs} - \beta\, e^{-\frac{1}{2}abs}}{e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL}} +$$

$$+ \frac{b}{4\,a\,(e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL})} \int (\varphi + \psi)\,(e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL})\,a\,L.$$

Integraalvrije uitdrukkingen bekomt men door te stellen

$$e^{\frac{1}{2}ab(s+L)} = \mu_1, \qquad \varphi'(s+L) = -4\,a^2\,b^2\,\mu_1^2\,\chi'''(\mu_1),$$
$$e^{\frac{1}{2}ab(s-L)} = \mu_2, \qquad \psi'(s-L) = 4\,a^2\,b^2\,\mu_2^2\,\omega'''(\mu_2),$$

namelijk

$$= 2a^2 \left\{ \frac{\alpha\mu_1\mu_2 + \beta + (\mu_1 - \mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_2 - \mu_1)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 + \mu_2} \right\},$$

$$= 2b^2 \left\{ \frac{\alpha\mu_1\mu_2 - \beta - (\mu_1 + \mu_2)\mu_1\chi'' + 2\mu_1\chi' - 2\chi - (\mu_1 + \mu_2)\mu_2\omega'' + 2\mu_2\omega' - 2\omega}{\mu_1 - \mu_2} \right\}.$$

Zooals men licht inziet, kunnen de α en β in de willekeurige functien worden opgenomen, zoodat men eenvoudiger kan schrijven

$$x = 2\,a^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)\,\mu_1\chi'' - 2\,\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_2 - \mu_1)\,\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$y = 2\,b^2 \frac{(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_1 + \mu_2)\,\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Uit (113) heeft men nu

$$p + g\,x = \frac{b\,x}{a^3}\,\log.\,\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{y}{a\,b}\log.\,\mu_1\,\mu_2 - 4\,a\,b(\mu_1\,\chi'' - \chi' - \mu_2\omega'' + \omega'),$$

$$q + c\,y = \frac{a\,y}{b^3}\,G\,\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{x}{a\,b}\log.\,\mu_1\,\mu_2 - 4\,a\,b\,(\mu_1\chi'' - \chi' + \mu_2\omega'' - \omega'),$$

waaruit z verder gemakkelijk gevonden wordt.

Men heeft

$$z + {}^1/_2 g x^2 + {}^1/_2 c\,y^2 = \left(\frac{b\,x^2}{2\,a^3} + \frac{a\,y^2}{2\,b^3}\right)\log.\,\frac{\mu_1}{\mu^2} + \frac{x\,y}{a\,b}\log.\,\mu_1\mu_2 -$$

$$-\int\left(\frac{b\,x^2}{2\,a^3} + \frac{a\,y^2}{2\,b^3}\right)\left(\frac{d\mu_1}{\mu_1} - \frac{d\mu_2}{\mu_2}\right) - \int\frac{xy}{ab}\left(\frac{d\mu_1}{\mu_1} + \frac{d\mu_2}{\mu_2}\right) -$$

$$-\frac{4\,(b^2x + a^2y)}{a\,b}(\mu_1\chi'' - \chi') + \frac{4\,(b^2x - a^2y)}{a\,b}\{\mu_2\omega'' - \omega) +$$

$$+\frac{4b}{a}\int x\,\{\chi'''\mu_1\,d\mu_1 - \mu_2\omega'''d\mu_2\} + \frac{4a}{b}\int y\,\{\chi'''\mu_1 d\mu_1 + \omega'''\mu_2 d\mu_2\}$$

Hierin moeten onder de integraalteekens nog de waarden van x en y gesubstitueerd worden. Wij laten deze omslachtige bewerking achterwege.

Er zijn twee grensgevallen, waarin de algemeene integraal eenen onbruikbaren vorm aanneemt, namelijk $a = 0$ en $b = 0$. Zij gaan door verwisseling van x met y in elkaar over.

Voor $a = 0$ wordt (110)

$$\frac{dK}{dt} = -1 \quad \text{of} \quad \frac{d}{d\,t}\left(\frac{2\,m}{\frac{dm}{d\,t}}\right) = -1,$$

waaruit door integratie volgt

$$m = \frac{3\,c}{(t + b)^2},$$

als c en b de integratieconstanten zijn.

Daar verder

$$r = \int\frac{dr}{dt}\,dt = \int m^2\,dt$$

is, vindt men voor den vorm der te integreeren vergelijking

$$(r+a)(t+b)^3 + 3c^2 = 0.$$

Het stelsel (109) gaat nu over in

$$\frac{dw}{dx} + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)\frac{dw}{dq} = 0, \qquad \frac{dw}{dy} - b\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp} = 0, \qquad \frac{dw}{dr}m^2 - \frac{dw}{ds}m + \frac{dw}{dt} = 0.$$

Hiermede handelende, als wij met andere dergelijke stelsels handelden, vindt men de vergelijkingen

$$dq = -bdy + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)dx, \; dr + mds = 0, \; ds + mdt = 0,$$

waarvan integralen zijn

$$s - \frac{3c}{t+b} = c_1, \qquad q + by - \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)x = c_1'$$

Stelt men $\frac{3c}{t+b}$ door τ voor, dan zijn dus de eerste integralen van (116)

$$q + by = (s - \tau)x + 2\varphi''(s - \tau),$$
$$q + by = (s + \tau)x + 2\psi''(s + \tau).$$

Hieruit volgt vooreerst

$$x = \frac{\varphi'' - \psi''}{\tau} \; \ldots\ldots\ldots\ldots (117)$$

Verder is

$$q + by = sx + (\varphi'' + \psi''), \; \ldots\ldots (118)$$

waaruit door differentieeren volgt

$$(t+b)\frac{dy}{ds} = x + \varphi''' + \psi''' \quad \text{of} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\varphi'' - \psi''}{3c} + \frac{\tau}{3c}(\varphi''' + \psi'''),$$

en op dezelfde wijze

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\tau}{3c}(\varphi''' - \psi''').$$

Hieruit volgt door integratie

$$y = \frac{\tau(\psi'' + \psi'') + \varphi' - \psi'}{3c}.$$

Verder is

$$\frac{d(p+ax)}{ds} = (\tau + a)\frac{dx}{ds} + s\frac{dy}{ds} = -\frac{\tau^2}{9s}(\varphi''' + \psi''') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' + \psi''') + \frac{s}{3c}(\varphi'' - \psi''),$$

$$\frac{d(p+ax)}{d\tau} = \frac{\tau^2}{9c}(\varphi''' + \psi''') + \frac{\tau}{9c}(\varphi'' - \psi'') - \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' - \psi'''),$$

waaruit

$$p + ax = -\frac{\tau^2}{9c}(\varphi'' - \psi'') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' + \psi'') + \frac{s}{3c}(\varphi' - \psi') - \frac{\tau}{3c}(\varphi' + \psi') - \frac{\varphi - \psi}{3c}$$

terwijl uit (117) en (118) volgt

$$q + by = \frac{s}{\tau}(\varphi'' - \psi'') + (\varphi'' + \psi'').$$

Eindelijk heeft men door invoering van deze waarden in

$$d(z + {}^1/_2\, ax^2 + {}^1/_2\, by^2) = (p + ax)\,dx + (q + by)\,dy,$$

en uitvoering zooveel mogelijk van de integratien

$$z + {}^1/_2\, ax^2 + {}^1/_2\, by^2 = -\frac{2\tau}{9c}(\varphi''^2 + \psi''^2 + \varphi''\psi'') +$$

$$+ \frac{s}{3c}(\varphi''^2 - \psi''^2) - \frac{1}{3c}(\varphi' + \psi')(\varphi'' - \psi'')$$

$$+ \frac{s}{3c\tau}(\varphi' - \psi')(\varphi'' - \psi'') - \frac{1}{3c\tau}(\varphi' - \psi')(\varphi'' - \psi'') + \frac{1}{2c}\int \varphi''^2 d(s - \tau)$$

$$- \frac{1}{2c}\int \psi''^2\, d(s + \tau).$$

In het andere grensgeval, $b = 0$ heeft men uit (110)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}\right) = -3.$$

De integratie hiervan leert, dat de te integreeren vergelijking nu is

$$(r + a)^3 (t + b) + 3c^2 = 0,$$

zoodat alles hetzelfde is als zooeven, behalve dat x en y met elkaar verwisseld zijn.

Vergelijken wij ten slotte de hier gebruikte Methode met die, welke LEGENDRE toepast ter integratie van de vergelijking

$$f(r, s, t) = 0.$$

Deze bestaat daarin, dat s en t als onafhankelijk veranderlijken en $v = q - sx - ty$ als afhankelijk veranderlijke worden aangenomen. De vergelijking wordt zoodoende teruggebracht tot de lineaire vergelijking

$$R\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2v}{ds\,dt} + T\frac{d^2v}{ds^2} = 0.$$

Deze vergelijking wordt dan zoo mogelijk door de Methode van MONGE geïntegreerd. Het eerste hulpstelsel van MONGE, waartoe deze vergelijking aanleiding geeft, is dan

$$ds + m_1\,dt = 0, \quad dx - m_2\,dy = 0, \quad dv = -x\,ds - y\,dt,$$

waarin m_1 en m_2 dezelfde beteekenis hebben als in het voorgaande.

Door dit hulpstelsel worden nu de eerste integralen gevonden in denzelfden vorm, als waarin wij ze vonden, in al die gevallen, waarin zij noch z, noch p, noch r bevatten. Door verwisseling van r met t zou men ze ook vinden in die gevallen, waarin er geen z, q of t in voorkomt. Voegt

men echter aan het MONGE'sche hulpstelsel nog de twee vergelijkingen

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad dp = r\,dx + s\,dy$$

toe, dan wordt het geheel identiek met het hulpstelsel, waartoe de hier gebruikte methode aanleiding geeft, en levert dus volkomen dezelfde uitkomsten op.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 December 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KOSTER, MULDER, WEBER, MARTIN, BEHRENS, MICHAËLIS, MOLL, J. A. C. OUDEMANS, KAPTEIJN, VAN DIESEN, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, BEIJERINCK, SCHOLS, ZAAIJER, STOKVIS, FORSTER, HOEK, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, VAN 'T HOFF, GUNNING, VAN RIEMSDIJK, VAN BEMMELEN, KORTEWEG, GRINWIS, SCHOUTE, PEKELHARING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— De Processen-Verbaal der October- en November-zittingen worden gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Oorlog te 's Gravenhage, 12 December 1890; 2°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 19 December 1890; 3°. den Commissaris des Konings in Noord-Holland te Haarlem, 13 December 1889; 4°. de Gedeputeerde Staten van Friesland, te Leeuwarden, 16 October 1890; 5°. Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 18 December 1890; 6°. Burgemeester en Wethouders van Zutphen, 16 December 1890; 7°. C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura

Artis Magistra" te Amsterdam, 17 December 1890; 8⁰. C. P. Burger Jr., Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 18 December 1890; 9⁰. A, J. van Pesch, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 18 December 1890; 10⁰. de Directeuren van de Nederlandsche Handel-Maatschappij te Amsterdam, 20 December 1890; 11⁰. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 1890; 12⁰. A. J. Enschede, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 17 December 1890; 13⁰. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's-Stichting te Haarlem, 18 December 1890; 14⁰. W. N. du Rieu, Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Leiden, 13 December 1890; 15⁰. J. Tideman, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 16 December 1890; 16⁰. A. R. Arntzenius, Griffiier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 16 December 1890; 17⁰. H. de Bussy, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 19 December 1890; 18⁰. de Vinck, Secretaris van de Académie d'Archéologie de Belgique te Antwerpen, 17 November 1890; 19⁰. den Secretaris van de Société zoologique de France te Parijs, 1890; 20⁰. den Secretaris van de Société mathématique de France te Parijs, 17 November 1890; 21⁰. J. Lejeune, Secretaris van de Académie de Stanislas te Nancy, 27 October 1890; 22⁰. A. Vivien, Secretaris van de Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts te Bordeaux, 6 October 1890; 23⁰. Th, Mommsen te Berlijn, 19 December 1890; 24⁰. den Secretaris van het Naturwissenschaftlicher Verein in Schleswig-Holstein te Kiel, 1890; 25⁰. H. Schäffer, Secretaris van het Naturwissenschaftlicher Verein te Regensburg, September 1890; 26⁰. E. Selenka te Erlangen, 31 October 1890; 27⁰. D. Carutti te Turyn, 8 November 1890; 28⁰. J. M. Latino-Coelho, Secretaris van de Académie royale des Sciences te Lissabon, November 1890; 29⁰. J. H. Miland, Directeur van het meterological Office te Calcutta, 6 October 1890; 30⁰. H. Kato, Voorzitter van de imperial University te Tokio, 28 October 1890; 31⁰. G.

HAMBACH, Bibliothecaris van de Academy of Science te St. Louis, 3 November 1890; 32°. J. S. BILLINGS, Bibliothecaris van het Surgeon General's Office te Washington, 5 November 1890; 33°. E. A. BRAGE, Voorzitter van de Wisconsin Academy of Sciences and Arts te Madison, 15 September 1890; 34°. J. BOTTO, Secretaris van de Sociedad cientifica Argentina te Buenos Aires, 27 November 1890; 35°. F. B. KYNGDON, Secretaris van de royal Society of N. S. W. te Sydney, 31 October 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 4 November, 1 December 1890; 2°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, November 1890; 3°. W. P. WOLTERS, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, September 1890; 4°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 9 December 1890; 5°. M. SNELLEN, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 18 December 1890; 6°. R. SCHRAM, Directeur van het k.k. oesterreichisches Gradmessungsbureau te Weenen, 1890; 7°. GILBERT, Directeur van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 12 September 1890; 8°. den Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 18 Juli 1890: 9°. S. SINCLAIR, Secretaris van het Australian Museum te Sydney, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. mededeelingen van de Heeren A. C. OUDEMANS JR. en HOOGEWERFF, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. het antwoord van het Bestuur der Letterkundige Afdeeling op den brief der Natuurkundige Afdeeling, gedagteekend van 26 November j.l., waarin de vraag werd gedaan, of voornoemd Bestuur het noodig oordeelde, het verzoek om

subsidie, tot den Minister van Binnenlandsche Zaken gericht door het Bestuur der Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië te Batavia, met de daartoe behoorende bescheiden en het rapport der Natuurkundige Afdeeling, tot een onderwerp van discussie te maken in de eerstvolgende vergadering der Letterkundige Afdeeling. — Het antwoord houdt in, dat het Bestuur der Letterkundige Afdeeling het niet noodig acht, de onderwerpelijke zaak in eene Afdeelingsvergadering ter sprake te brengen, ook omdat bovengenoemde Vereeniging niet bevoegd zou wezen, een eventueel te verleenen subsidie te besteden voor een in haar midden niet vertegenwoordigd vak;

3°. het door den Heer Dr. F. A. F. C. Went opgemaakte Verslag omtrent de onderzoekingen, door hem verricht aan het botanisch Station te Buitenzorg, van 15 Maart tot 1 Augustus 1890. — Met deze inzending werd voldaan aan de verplichting, opgelegd aan hen, die op het voorstel der Afdeeling, in het genot worden gesteld eener subsidie, voortspruitend uit de baten van het zoogenaamd Buitenzorgfonds, om uiterlijk binnen 3 maanden na hun terugkeer, een Verslag over hunne zending aan de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie aan te bieden. — De Voorzitter wenscht het Verslag in handen gesteld te zien van de Heeren Suringar en C. A. J. A. Oudemans, en van hen inlichting te ontvangen omtrent de vraag, welke bestemming daaraan zal worden gegeven;

4°. eene verhandeling van den heer J. C. Kluyver te Breda, »Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort", waarvoor eene plaats verzocht wordt in de werken der Akademie. — De Heeren Schoute en Bierens de Haan verklaren zich bereid, daarover rapport uit te brengen in de Januari-vergadering.

— De Heeren J. A. C. Oudemans en van Diesen brengen een gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer Engelenburg (Hyetographie van Nederland). Hun voorstel om haar eene plaats te verleenen in de 4° werken, wordt zonder discussie aangenomen. Nogtans zal den schrijver de

gelegenheid worden gegeven, de redactie van zijn manuscript hier en daar te wijzigen.

— De Heer BEIJERINCK draagt de door voorwerpen en platen opgehelderde levensgeschiedenis voor van *Bacillus cyaneo-fuscus*, eene tot hiertoe onbekende bacterie: de oorzaak van het blauw worden van Edammer kaas en het zwart worden van lijm in de fabrieken. De spreker zonderde haar af uit grondwater en leerde ze kennen als eene peptonbacterie ($^1/_2$ pCt. pepton in gewoon water is voldoende voor hare voeding). De blauwe kleur, aan spheriten gebonden, gaat later over in eene donkerbruine, voor diffusie vatbare. In den natuurstaat is het groeiend vermogen bij eene temperatuur van 15°—20° C. aanvankelijk zeer krachtig. Weldra echter begint dat vermogen bij dezen warmtegraad te verminderen, om eindelijk geheel te worden uitgedoofd. Daartegenover ontdekt men weder eene sterke toeneming van den groei, indien verzwakte culturen eenigen tijd in zeer zwakke pepton-oplossingen (van $^1/_4$ pCt.) bij niet meer dan 2°—5° C. bewaard worden. Deze waarnemingen sluiten zich aan bij die over pathogene bacteriën, wier virulentie eveneens bij hoogere temperaturen vermindert.

Eenige vragen, tot den spreker gericht door de Heeren MAC GILLAVRY, STOKVIS, J. A. C. en C. A. J. A. OUDEMANS, worden door hem beantwoord.

— De Heer FORSTER deelt mede, dat het ook hem gelukte, eene blauwe-kleurstof-voortbrengende bacterie af te zonderen uit Vechtwater. Uit de dienaangaande medegedeelde bijzonderheden blijkt, dat, bij enkele punten van overeenkomst, er toch weder zoo vele punten van verschil tusschen zijne bacterie en den Bacillus cyaneo-fuscus zijn aan te wijzen, dat beide zonder twijfel soortelijk van elkander onderscheiden zijn.

— De Heer BEHRENS deelt mede, dat het rapport der geologische Commissie over het jaar 1890 bijna gereed is, en dat er derhalve aanleiding bestaat om aan de Regeering

eene nieuwe subsidie van *f* 500.— voor het jaar 1891 aan te vragen. De Voorzitter antwoordt hierop, dat het hem wenschelijk voorkomt, de indiening van dat rapport af te wachten, en dan te beslissen of opnieuw *f* 500.—, dan wel eene grootere som voor de werkzaamheden der Commissie zal worden aangevraagd. De Heer BEHRENS legt zich bij deze opvatting neder en hoopt te kunnen zorgen, dat het rapport in de Januari-vergadering ter tafel kome. Eene hoogere toelage dan *f* 500 zou zeer zeker gewenscht zijn om de Commissie in de gelegenheid te stellen, hare werkzaamheden uit te breiden en daarbij tijd te sparen.

— De Heer BIERENS DE HAAN herinnert aan zijne vroegere mededeeling omtrent de bewerking van een bibliographisch Repertorium der wiskundige wetenschappen, waarvoor door het »Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques", in Mei 1889 gedurende de tentoonstelling bijeengekomen, een schema van classificatie vastgesteld en eene Commissie is benoemd, bestaande uit Franschen en niet-Franschen. De spreker zelf werd gekozen voor Nederland. Het doel van den arbeid is: de gedrukte boeken en de verhandelingen in Acta, Verhandelingen, Tijdschriften enz. voorkomend, door eene juiste classificatie voor het gebruik geschikt te maken. De Nederlandsche literatuur is die bewerking ten volle waard, en nu ligt het, volgens des sprekers gevoelen, op den weg der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, daartoe de behulpzame hand te bieden. Hijzelf is bereid de classificatie op zich te nemen, des noods met behulp van eenige medeleden der Akademie. Maar, voor het overschrijven van titels behooren andere krachten, tegen retributie, in het werk te worden gesteld. Na ingewonnen advies nl. was gebleken, dat elk land den arbeid van het lid in de Commissie zelf bekostigt. De spreker stelt dus voor: dat hem verleend worde een crediet van *f* 100, en verder, dat hem de bewerking worde opgedragen, met de bevoegdheid om, zoo deze van te grooten omvang mocht blijken, de hulp van één of meer leden te mogen inroepen.

Over het voorstel wordt het woord gevoerd door de Heeren STOKVIS, KORTEWEG en den Secretaris. De Voorzitter meent, met den Secretaris, dat de Afdeeling in deze geene beslissing kan nemen, maar dat die taak bij het Bestuur der Akademie berust. Het voorstel om het verzoek des Heeren BIERENS DE HAAN bij voornoemd Bestuur over te brengen, wordt aangenomen.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

Door den Heer WEBER het 2de Deel der »Zoologische Ergebnisse", door hem naar aanleiding van zijne reis naar Java in het licht gegeven;

door den Heer MAC GILLAVRY, uit naam van den Heer Dr. H. VAN SENUS, diens dissertatie: »Bijdrage tot de kennis der cellulose-gisting". De uitkomsten, door den Heer VAN SENUS verkregen, worden kortelijk toegelicht;

door den Heer SCHOUTE, uit naam van den Heer GOMEZ TEIXEIRA, diens Handboek over Differentiaalrekening;

door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN: 1°. Verslag over den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden (17 Sept. 1889—16 Sept. 1890) en 2°. Annalen der Sternwarte in Leiden, deel V.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE

BESTEMMING VAN HET VERSLAG,

DOOR DEN HEER **Dr. F. A. F. C. WENT**

AAN DE

AFDEELING OVERGELEGD, NA ZIJN TERUGKEER VAN HET BOTANISCH STATION TE BUITENZORG.

De ondergeteekenden, aan wie, in de vergadering der Afdeeling in dato 27 December 1890, in handen werd gesteld het Verslag van den Heer Dr. F. A. F. C. WENT, omtrent de onderzoekingen, door hem aan het botanisch Station te Buitenzorg van 15 Maart tot 1 Augustus 1890 verricht, en wel om advies uit te brengen omtrent de bestemming, aan voornoemd Verslag te geven, hebben de eer hierbij voor te stellen: voornoemd Verslag op te nemen in de Verslagen en Mededeelingen, en het op het Proces-Verbaal der Vergadering van 31 December te doen volgen.

Amsterdam, Leiden
16 Januari 1891.

C. A. J. A. OUDEMANS.
W. F. R. SURINGAR.

VERSLAG

OMTRENT DE

ONDERZOEKINGEN, VERRICHT AAN HET BOTANISCH STATION TE BUITENZORG, VAN 15 MAART— 1 AUGUSTUS 1890,

DOOR

Dr. F. A. F. C. WENT.

Evenals alle andere botanici, die voor het eerst de tropen zagen, ondervond ook ik, van hoeveel nut het zien van den plantengroei tusschen de keerkringen voor mijn wetenschappelijke ontwikkeling was. Alleen daar leert men de planten in haar volle kracht kennen, en begrijpt men eerst goed, welk een machtige factor de strijd om het bestaan is voor de ontwikkeling van de flora van een gebied. Vandaar, dat zich vanzelf tal van nieuwe vragen aan den botanicus in de tropen voordoen, terwijl hij er begint te twijfelen omtrent de juistheid der inzichten, die men in Europa heeft over verschillende zoogenaamd goed onderzochte botanische vraagstukken.

Terwijl het bezoek van de tropen in het algemeen voor den botanicus zeer nuttig is, heeft Buitenzorg het voordeel, dat er het geheele jaar onderzoekingen kunnen verricht worden, omdat een eigenlijke droge moesson er zoo goed als geheel ontbreekt; bovendien liggen de mooiste oerbosschen van Java, in de Preanger Regentschappen, betrekkelijk dicht in de nabijheid. Dat natuurlijk de prachtige plantentuin, met zijn uitstekend ingerichte laboratoria, bibliotheek,

museum en herbarium, den onderzoeker een groot voordeel oplevert, behoeft hier wel niet gezegd te worden.

Mijn onderzoekingen hadden hoofdzakelijk betrekking op de hechtwortels en andere luchtwortels bij tropische klimplanten en epiphyten. Naar aanleiding van een korte opmerking van DARWIN, dat het hem voorkwam, dat sommige luchtwortels bij Ficus repens zich door middel van een slijmerige stof aan het substraat vasthechten, besloot ik deze zaak nader te onderzoeken. Het bleek mij nu, dat deze vasthechting in alle gevallen geschiedt door middel van wortelharen. Wel worden sommige wortels voorloopig vastgekleefd door middel van een soort van plantenslijm, dat bij enkele Melastomaceae, vooral Medinella's, zelfs in groote hoeveelheid gevormd wordt, maar dit werkt toch meer als beschermingsmiddel tegen het uitdrogen. De wortelharen bevestigen de wortels, omdat zij in alle oneffenheden van het substraat kruipen, zoodat dan ook een hechtwortel niet blijvend tegen een gladde oppervlakte blijft vastgekleefd. De redenen voor het ontstaan der wortelharen moeten, zooals mij door proefnemingen gebleken is, gezocht worden in afwezigheid van licht en in een verhoogden vochtigheidstoestand van de lucht. Bij bilateraal-symmetrische wortels, zooals die bij vele Orchideeën voorkomen, werd ook de vraag onderzocht, of hier het vermogen om wortelharen te vormen alzijdig ontwikkeld is of niet. Het laatste werd in enkele gevallen geconstateerd, maar verder werden tal van overgangen gevonden naar een alzijdig vermogen van wortelhaarvorming. Naar aanleiding van de onderzoekingen, door SCHIMPER in Zuid-Amerika verricht, werd verder de verhouding tusschen voedingswortels en luchtwortels nagegaan. Verder onderzocht ik bij verschillende plantenfamilies den graad van adaptie der luchtwortels aan uitwendige omstandigheden en trachtte op deze wijze de vraag naar hun eerste ontstaan en hun phylogenie te beantwoorden. Den hoogsten ontwikkelingstrap vond ik daarbij in de wortelranken. In sommige gevallen veranderen zij ook van functie, zooals daar, waar zij tot de kroonvorming bijdragen, omdat door hunne hulp de eene tak van een boom den anderen steunt.

Aan geconserveerd materiaal hoop ik verder de ontwikkelingsgeschiedenis en de eventueele aanwezigheid van rudimenten te bestudeeren. In de door mij onderzochte gevallen kon ik van een verkorting van eenmaal vastgehechte wortels niets waarnemen. Zij groeien bovendien vrij langzaam, terwijl hun groeiend gedeelte aan den top zeer kort is, in tegenstelling met de voedingswortels, die uiterst snel groeien en in het bezit zijn van een zeer lang groeiend gedeelte. Sterke spanning vond ik daarbij in de voedingswortels van epiphytische Ficussoorten: de zoogenaamde Waringins. De groeiwijze en ontwikkeling van deze Ficussoorten werd verder onderzocht en daarbij bij de kieming eigenaardige verschijnselen opgemerkt, in het optreden van knolvormige wortels, die, naar het schijnt, gedeeltelijk tot bevestiging, gedeeltelijk als waterreservoir dienst doen. Ik had verder helaas te weinig tijd om geheel en al de oorzaken op te sporen, die de hechtwortels er toe brengen, naar hun substraat toe te groeien; hun hydrotropisme werd geheel buiten beschouwing gelaten; hun negatieve heliotropie, in verband met de onderzoekingen van Wiesner, in sommige gevallen geconstateerd, terwijl hun geotropie iets nader werd onderzocht, waarbij mij bleek, dat zij zich ten opzichte daarvan nog al verschillend gedragen. De voedingswortels komen, wanneer zij goed ontwikkeld zijn, in het algemeen steeds onder eenzelfden hoek uit den stengel te voorschijn, zooals Sachs dit voor zijwortels beschreven heeft. Ten slotte komt het mij voor, dat enkele feiten er op wijzen, dat de epiphyten niet altijd ontstaan zijn op de door Schimper beschreven wijze, maar dat zij zich ook wel eens ontwikkeld hebben uit wortelklimmers, met name in de familie der Aroïdeeën (en wellicht ook der Araliaceeën en Artocarpeeën).

Verder deed ik onderzoekingen omtrent een eigenaardigen boom, die in den kultuurtuin van Tjikeumah in een groot aantal exemplaren gekweekt wordt: Castilloa elastica. Deze boom heeft twee soorten van takken: afvallende met een bladstand $^1/_2$ en blijvende met een bladstand $^2/_5$. In den bladoksel ontstaat eerst de knop van den afvallenden tak en later die van den blijvenden. Het gelukte mij, nadat

ik bij jonge klimplantjes den eindknop weggesneden had, de okselknoppen te doen uitloopen. In het normale geval zouden hieruit afvallende takken zijn ontstaan, nu echter vormden zij den blijvenden hoofdstengel.

Bij de verschillende soorten van het geslacht Fagraea, ontdekte ik extraflorale nectariën op de bladeren en buiten op den kelk, die geheel den bouw van dierlijke klieren vertoonen: iets, wat tot nu toe bij planten niet gezien was. De ontwikkelingsgeschiedenis hoop ik aan meêgebracht materiaal verder te bestudeeren.

Verder werden nog enkele onderzoekingen gedaan of materiaal geconserveerd om hier nader te bestudeeren over de volgende onderwerpen: de opgezwollen leden van de stengels van Adhatoda vasica en andere oerboschplanten; de ontwikkeling der groote Aecidiumgallen, die op de toppen der Javaansche bergen steeds op Albizzia montana gevonden worden en de vruchtontwikkeling van enkele tropische planten.

Behalve het werk in den plantentuin en in het laboratorium, werden verschillende excursies door mij ondernomen. Tot de meest interessante behoorden die naar de mangrovebosschen, gedeeltelijk die bij Tandjong Priok, gedeeltelijk die van het eiland Leiden, een van de kleine koraaleilandjes in de baai van Batavia. De laatste excursie werd ondernomen door de vriendelijke medewerking van Dr. Sluiter. Verder waren het vooral de bergen der Preanger Regentschappen, die mij aantrokken. Hier zijn gelukkig de oorspronkelijke wouden nog niet in die mate verdwenen als in Midden- en Oost Java. Vooral de dépendance van den plantentuin te Tjibodas, op de helling van den Gedeh, is voor den botanicus een El-Dorado en zal dit nog meer worden, wanneer het laboratorium aldaar gereed zal zijn. Behalve het onderzoek van de hierboven genoemde planten, was het hoefddoel van de excursies: een denkbeeld te krijgen van den tropischen plantengroei in zijn geheel. Daarbij trokken vooral de eigenaardigheden der tropische oerbosschen mijn opmerkzaamheid, zooals de interessante epiphyten, rotangs en lianen, de Hymenophyllaceeën en Levermossen, de Boomvarens, de merk-

waardige verspreiding der bergtopflora van Java, de opeenvolging der vertikale plantenzonen, enz. Ook werd nog een tocht ondernomen naar het Tengergebergte, om het meer australisch karakter der flora van Oost-Java te leeren kennen. Het is natuurlijk, dat ook de dierenwereld en de eigenaardige vulkanische gesteldheid van den bodem de opmerkzaamheid van den natuuronderzoeker tot zich trekken. Met het doel om eenige kennis te verkrijgen van den tropischen landbouw, bezocht ik verder verschillende kultuurondernemingen.

Wanneer het mij gelukt is, gedurende mijn kort verblijf op Java, betrekkelijk veel te kunnen doen, is dit vooral te wijten aan de uitstekende inrichting van 's Lands plantentuin te Buitenzorg, die, dank zij de goede zorgen van den tegenwoordigen directeur, langzamerhand het centrum is geworden van de botanische studie der Tropen.

Het zij mij vergund, aan het slot van mijn voorloopig verslag gekomen, mijn dank te betuigen aan Z. Exc. Baron Mackay, den vorigen Minister van Binnenlandsche Zaken, en aan de Leden der Kon. Akademie ven Wetenschappen afd. Natuurkunde, die mij door het gegeven subsidie de reis naar Buitenzorg mogelijk maakten, eveneens aan de Curatoren van het Gymnasium te 's Gravenhage voor het verlof, dat zij mij voor deze reis hebben toegestaan. Het is mij een behoefte hier tevens openlijk mijn dank uit te spreken aan Dr. Treub, voor de buitengewoon hartelijke ontvangst, die ik bij hem mocht genieten en voor de vele hulp, die ik in alle opzichten van hem ondervonden heb. Ook den anderen heeren, aan 's Lands plantentuin verbonden, zeg ik hier dank voor hun hulpvaardigheid; meer in het bizonder den heeren Wigman en Massink. Overal waar ik verder op Java kwam, mocht ik evenveel gastvrijheid en vriendelijke hulp ondervinden. Wanneer ik hier de namen van enkele heeren noem, die mij meer in het bizonder geholpen hebben, zooals de resident van Probolingo, de administrateurs van Goenoeng Melatti en Daoelat, dan geldt mijn dank toch allen, met wie ik in Indië in nadere aanraking kwam.

November 1890. F. A. F. C. WENT.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER E. ENGELENBURG,

GETITELD:

„HYETOGRAPHIE VAN NEDERLAND".

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 December 1890).

In onze handen is door den Voorzitter gesteld eene aan de Afdeeling aangebodene Verhandeling van den Heer E. ENGELENBURG, Civil-Ingenieur, getiteld: »Hyetographie van Nederland".

Voor diegenen onzer medeleden, die niet op het eerste hooren van dezen naam zijne beteekenis doorgronden, veroorloven wij ons hier bij te voegen, dat de beteekenis is: »Beschrijving van den regen in Nederland", d. i. beschrijving van hetgeen de waarnemingen geleerd hebben aangaande de hoeveelheid regen, die in verschillende deelen van Nederland valt."

Voor verschillende andere landen zijn dergelijke onderzoekingen reeds lang volbracht, en zijn daarover verhandelingen verschenen, vergezeld van kaarten, waarop de lijnen van gelijken regenval, de zoogenoemde *isohyeten*, voor de verschillende jaargetijden, soms voor de verschillende maanden, getrokken zijn.

Zoo worden, van wege het Ministerie van Openbaar Onderwijs te Parijs, jaarlijks drie quarto-deelen *Annales du Bureau Central Météorologique* uitgegeven; waarvan het eerste

deel verhandelingen, het tweede meteorologische waarnemingen en het derde deel enkel regenwaarnemingen bevat; achter dit derde deel vindt men dan voor elke maand, voor elk kwartaal, en voor het geheele jaar eene kaart van Frankrijk bijgevoegd, waarop door harceeringen van verschillende tint of donkerheid de plekken worden aangegeven, waar de hoeveelheid regen beneden eene zekere grens blijft, tusschen twee grenzen in komt, of eene hoogere grens overschrijdt.

Duidelijk kan men b.v. uit die kaartjes zien, hoe zoowel de nabijheid der zee, als die van hooge bergen, zooals de Alpen, een grooten regenval veroorzaakt.

Van Duitschland kennen wij die *Regenverhältnisse Deutschlands*, van Georg von Möllendorff, 1862, en de *Untersuchungen über die Regenverhältnisse Deutschlands* door Dr. H. Toepfer, Professor am Gymnasium in Sondershausen, 1884, beide vergezeld van eene regenkaart.

Speciale onderzoekingen, die op meer beperkte terreinen betrekking hadden, werden o. a. voor Baden uitgegeven door het Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie te Carlsruhe, en voor Beijeren door F. Horn, en wel beide in 1885.

Dergelijke onderzoekingen leverden Raulin voor Frankrijk *), Symons en de door de British Association telken jare benoemde Rainfall Committee voor Engeland †), Rubenson voor Zweden §).

Lancasster, de bekende meteoroloog en bibliothecaris der

---

*) Observations pluviométriques faites dans la France méridionale de 1704 à 1870 et à Paris de 1688 à 1870, par V. Raulin, Prof. de Géologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux, 1876.

†) British Rainfall, 1860—1864. A complete set of the annual pamphlets on the distribution of rain over the British Isles, during the years 1860 to 1864, as observed at from 500 to 900 Stations in Great Britain and Ireland, with Illustrations compiled by G. J. Symons. London 1866.

Report of the Rainfall Committee voor verschillende jaren.

§) Nederbördsmängden i Sverige, härledd ur de vid Statens Meteorologiska Stationer under Åren 1860—1872 anställda Jakttagelser af Robert Rubenson. Med fem. taflor. Stockholm 1876.

Sterrewacht te Brussel, gaf in het jaar 1884 eene studie uit, getiteld *La Pluie en Belgique*, waarin hij alle bijzonderheden naging, die uit de toen bestaande in België gehoudene aanteekeningen van regenhoeveelheden waren af te leiden. Dit onderzoek werd zeer bemoeielijkt, doordien op zeer vele Belgische plaatsen slechts van enkele jaren, soms van slechts één enkel jaar, regenwaarnemingen bestonden.

In Noord-Amerika worden ook aan het »Signal Office" te Washington maandelijksche kaarten vervaardigd, die den regenval in de Vereenigde Staten aangeven. In 1888 werd van wege het genoemde Office een atlas van 48 kaarten uitgegeven, geldende voor al de maanden van de jaren 1870 tot en met 1873.

Dat Rusland niet zou achterblijven was te vermoeden. In den »5en Supplementband zum Repertorium für Meteorologie", uitgegeven door de Keizerlijke Akademie van Wetenschappen te St. Petersburg, beschreef WILD »*die Regenverhältnisse des Russischen Reiches*" en liet die beschrijving vergezeld gaan van eenen atlas, waarin voor het geheele jaar en voor de vier jaargetijden de lijnen van gelijke *regenhoogte*, alsmede voor het geheele jaar de lijnen van gelijk *aantal regendagen*, in 6 verschillende groote kaarten zijn aangegeven.

Voor Nederland was een dergelijk onderzoek nog alleen in 1863 door KRECKE verricht, (zie zijn belangrijk werkje: het klimaat in Nederland); maar hij kon de maandelijksche gemiddelde hoeveelheid regen slechts voor 15 plaatsen afleiden, en dan nog waren, behalve voor Zwanenburg, de tijdvakken, waarvoor de regenwaarnemingen beschikbaar waren, over het algemeen te kort.

De Jaarboeken van het Meteorologisch Instituut van 1858, 1868, 1878 en 1888 bevatten wel telkens de opgave van den regen-nederslag op een aantal plaatsen in Nederland, telkens gedurende de 10 laatste jaren, maar eene verdere behandeling dezer opgave ontbreekt nog. De enkele jaargangen geven wel de verdeeling van den regen over 6 kwartieren van Nederland, (zie b.v. 1878, p. 271) maar in de 10 jaarlijksche overzichten zijn deze niet opgeteld of ge-

middeld en eene grafische voorstelling van den regen over ons land mist men er tot nog toe.

De heer ENGELENBURG heeft zich nu aangegord om de ten opzichte van Nederland bestaande leemte aan te vullen en althans eene eerste poging aan te wenden om te onderzoeken of er in ons kleine Vaderland, ten opzichte van den regen, verschillende klimaten zijn aan te wijzen of niet. De veertig reeds verschenen jaarboeken van het Meteorologische Instituut leverden hem daartoe de bouwstoffen, die nog aangevuld werden door eene mededeeling van den heer ELINK STERK, voor vier stations in den Haarlemmermeer-polder, en van den heer VAN HASSELT, (Directeur der Amsterdamsche Duinwater-Maatschappij,) voor het pompstation te Leiduin.

In de aangeboden verhandeling geeft hij eene beschrijving van den gang van zijn onderzoek, en verklaart hij de beteekenis der bijgevoegde tabellen en kaarten.

Tabel Ia vermeldt voor elke maand jaars, de maandelijksche gemiddelde hoeveelheden neerslag van 47 plaatsen in Nederland, waar de waarnemingen 10 jaar of meer omvatten.

Tabel IIa geeft, voor diezelfde plaatsen, het aantal percenten aan van het geheele regenbedrag, dat in elke maand des jaars valt. Men verkrijgt hierdoor een overzicht van de verdeeling van den regen op de plaats gevallen over het jaar, *onafhankelijk van de totale hoeveelheid regen*?

Tabel Ib en IIb geven hetzelfde aan als Tabel Ia en IIa, maar voor 28 plaatsen, waar slechts gedurende een tijdvak, korter dan 10 jaar, waarnemingen verricht zijn. Een merkwaardig resultaat, waartoe de heer ENGELENBURG geraakt is, is dat het maximum van regenval niet overal in dezelfde maand valt, zoodat hij er toe gebracht wordt zesderlei groepen van plaatsen aan te neemen:

1° die het maximum in Juli hebben,

2° » » » » Augustus hebben,

3° » een hoofdmaximum in Augustus en een secundair maximum in October hebben,

4° die een hoofdmaximum in October of November en een secundair maximum in Augustus hebben,

5⁰ die in Augustus en October nagenoeg even groote maxima hebben;

6⁰ die een maximum in October hebben.

Tabel III geeft de maandpercenten voor deze verschillende groepen aan.

Om de veranderlijkheid van den regenval der afzonderlijke maanden aan te geven, bevat Tabel IV voor alle plaatsen, waarvan de waarnemingen van 10 of meer jaren beschikbaar waren, de gemiddelde afwijkingen der maandelijksche hoeveelheden van het maandelijksch gemiddelde.

Ook deze tabel geeft tot merkwaardige gevolgtrekkingen aanleiding. In de eerste plaats berekent de schrijver, naar eene bekende formule, die wij gedeeltelijk aan Gauss, gedeeltelijk aan C. A. F. Peters verschuldigd zijn, die echter bij hem eenigszins anders gegeven wordt, nl. in eenen vorm die Fechner er aan gegeven heeft, de waarschijnlijke fout van de door hem gevondene gemiddelde maandelijksche regenhoeveelheid te Utrecht, en vindt daarvoor nog getallen, die van 2,5 tot 4,7 mm. loopen; de gemiddelden van al de afwijkingen beschouwende, komt hij o. a. tot het resultaat, dat om de gemiddelde maandelijksche regenhoeveelheid tot op 1 mM. (w. fout) te kennen er 405 jaren noodig zijn.

Tabel V geeft voor elk station de beide jaren aan, waarin de grootste en de kleinste hoeveelheid regen gevallen is, alsmede hoeveel deze bedragen en hoeveel zij van elkander verschillen; dit verschil noemt de S. Amplitudo.

In Tabel VI vindt men voor elk station eene kolom, aangevende voor elk waarnemingsjaar hoeveel regen er gevallen is, het gemiddelde cijfer voor datzelfde station = 100 aannemende. Daardoor wordt de lezer in de gelegenheid gesteld te beoordeelen, of er sprake van zijn kan om voor het geheele land droge en natte jaren aan te nemen, welke vraag ook door de laatste kolommen derzelfde tabel, die voor elk jaar het gemiddelde cijfer voor alle plaatsen, enz. aangeven, bevestigend beantwoord wordt.

De S. onderzoekt nog of er verband te vinden is tusschen de periode der zonnevlekken en den regen, meent wel eene

zwakke aanwijzing te ontdekken, dat omtrent het zonnevlekken-minimum iets meer regen valt, dan anders, maar komt toch ten slotte tot het resultaat, dat het gezochte verband weinig scherp te voorschijn treedt.

Naar het oordeel van Referenten is er voldoende grond om den invloed of het verband geheel te ontkennen.

Tabel VII geeft voor het geheele tijdvak van 41 jaren, waarover zich de waarnemingen te Utrecht uitstrekken, de hoeveelheden regen in millimeters voor elke »pentade", d. i. voor de vijfdaagsche tijdvakken, 1—5 Januari, 6—10 Januari, enz.; evenzoo in eene 2e kolom het totaal aantal regendagen, en ter vergelijking er naast het aantal waargenomene onweders. Deze laatste zijn slechts ingevuld van 1 Mei tot 7 October; waarom, wordt niet vermeld. Dat er van 8 October tot 30 April in de laatste 41 jaren te Utrecht geene onweders zouden zijn aangeteekend, is niet aan te nemen; de eerst door Dr. M. Snellen, later door den Schrijver zelven bewerkte, door het Kon. Meteorologisch Instituut uitgegevene Jaarberichten over de »Onweders in Nederland" vermelden in dat tijdvak wel onweders, al is het dan in kleineren getale.

Ten slotte vermeldt de S. de grootste hoeveelheden regen, die in de verschillende maanden des jaars in eene regenbui te Utrecht zijn waargenomen.

De verhandeling wordt nog begeleid door acht kaartjes van Nederland, die de verspreiding van den regen in de maanden Mei tot December aangeven. Men vindt daarop zoo goed de beschikbare gegevens het toelaten, voor elk maand de »*isohyeten*", (lijnen van gelijke regenhoogte), voor volle tientallen van millimeters, nl. 40, 50, 60, 70, 80 en 90 mm; ja in ééne maand kon ook die van 100 mm. getrokken worden. Voor de vier eerste maanden des jaars lieten de gegevens niet toe, die lijnen te trekken.

Naar onze meening heeft de schrijver met oordeel de beschikbare bouwstoffen verwerkt en wij adviseeren dus volgaarne de verhandeling eene plaats in de werken der Aka-

demie in te ruimen. Alleen zou, onzes inziens, de S. verzocht moeten worden, over taal en stijl nog eens de fijne schaaf te laten gaan, de germanismen door hollandsche uitdrukkingen te vervangen, en ook de plaatsing der leesteekens te herzien, opdat het opstel, ook wat den vorm aangaat, aan de werken der Akademie geene oneer aandoe.

Utrecht en *den Haag*,
December 1890.

J. A. C. OUDEMANS.
VAN DIESEN.

DE LEVENSGESCHIEDENIS EENER PIGMENTBACTERIE

DOOR

M. W. BEIJERINCK.

§ 1.

VERDEELING DER CHROMOGENE BACTERIËN IN CHROMOPHORE, CHROMOPARE EN PARACHROMOPHORE.

De beteekenis van de kleurstof van chromogene bacteriën is van tweeërlei verschillenden aard. Vooreerst, en dit is het geval bij de roode, purpere, gele, groene en bruine bacteriën, kan zij een integreerend bestanddeel van het levende bacteriënlichaam uitmaken, gelijk de groene kleurstof der bladgroenkorrels, en dan moet daaraan ongetwijfeld een bepaalde, zij het ook onbekende, biologische functie worden toegekend. Zulke bacteriën kunnen *orthochromophore*, of, kortweg, *chromophore* bacteriën genoemd worden. In de tweede plaats kan de kleurstof een afscheidingsproduct zijn, dat toevalligerwijze niet, gelijk in de meeste andere gevallen, kleurloos is, en dat alleen onder bepaalde cultuuromstandigheden ontstaat. Op deze groep is de naam *chromopare* of eigenlijke pigmentbacteriën toepasselijk. Levende pigmentbacteriën zijn meestal kleurloos, ook dan, wanneeer zij kleurstof afzonderen. Daarop maken evenwel de violette bacteriën (*Bacillus janthinus*, *B. violaceus* etc.), die zoo algemeen in water en grond voorkomen, een uitzondering in zoover daarbij de afgescheiden kleurstof niet in de omgeving diffundeert, maar aan het lichaam der bacteriën,

levend of dood, gebonden blijft. Zij vormen blijkbaar den overgang van de tweede tot de eerste groep, waarvan zij zich onderscheiden, doordat zij, gelijk gezegd, slechts onder bepaalde condities gekleurd zijn. Wellicht zal men daarvoor den naam *parachromophore* bacteriën aannemelijk vinden.

De hier te bespreken soort behoort tot de echte pigmentbacteriën. Zij schijnt tot nu toe nog door niemand afgezonderd of beschreven te zijn, zoodat het noodig is daarvoor een naam te kiezen. Wegens het voorkomen van twee pigmenten in de koloniën en andere culturen, een blauw en een bruin, stel ik als zoodanig voor, *Bacillus cyaneo-fuscus*. Als naverwante soorten noem ik de bacteriën van blauwe melk (*Bacillus cyanogenus*), van groen sputum (*B. virescens*), van blauwe etter (*B. pyocyaneus*) en van »bloedend brood" (*B. prodigiosus*). De kleurstof van *B. cyaneo-fuscus* is het naastverwant met die van *B. cyanogenus*; beide kunnen niet door chloroform of andere oplossingsmiddelen worden uitgeschud, terwijl dit wel het geval is met de kleurstof van *B. virescens* en *B. pyocyaneus*.

---

§ 2.

Voorkomen en isoleeren van bacillus cyaneo-fuscus.

Bacillus cyaneo-fuscus is een niet algemeen verspreide bewoner van water, waarin een weinig organische stof voorkomt. Het isoleeren gelukte: Vooreerst, uit duinwater langdurig in een houten bak aan zichzelve overgelaten. Vervolgens uit een bekerglas, staande in het laboratorium, waarin duinwater met een weinig tuinaarde, koolzure magnesia en een ammoniakzout, dat langzamerhand in salpeterigzuur werd omgezet, voorkwamen. Ten derde, uit het water eener goot, waarin veel organische stoffen in zeer verdunden toestand geledigd werden. En eindelijk, uit een aan zichzelf overgelaten infusie van Papilionaceenwortels in duinwater.

Verder werd onze bacterie als de oorzaak van het »zwart worden" van lijm en het zoogenoemde »blauwziek" van Edammer kaas herkend.

Het isoleeren uit water geschiedt het beste, door over een gestolten oplossing van 10 pCt. zuivere gelatine in duinwater zonder eenige verdere bijvoeging, het te onderzoeken water te gieten en dan te verwijderen, zoodat daarmede alleen oppervlakkige bevochtiging plaats vindt.

Uit de blauwe vlekken in kaas is het isoleeren alleen mogelijk zoolang deze vlekken in de eerste stadiën hunner wording verkeeren, en moet dan geschieden door het centrum der vlek met een platina draad uit te steken en in een verdunde peptonoplossing over te brengen. Ook daarbij gelukt het evenwel slechts zelden culturen te verkrijgen, daar onze pigmentbacterie, na de afscheiding der kleurstof, spoedig door de andere omzettingen, die in de kaas plaats hebben, afsterft.

Vaste en vloeibare mediën, die zeer rijk zijn aan voedingsstoffen, zooals phosphaten, oplosbare eiwitten enz., verhinderen òf den groei geheel, òf veroorloveu, wel is waar ontwikkeling, maar geen pigmentafscheiding. In dit laatste geval is *B. cyaneo-fuscus* niet gemakkelijk van andere bacteriën te onderscheiden.

---

§ 3.

Pigment.

Het pigment van *B. cyaneo-fuscus* is tweevoudig. Het bestaat uit een in de gelatine diffundeerende bruine kleurstof en uit meer of minder donker blauw, bruin of zwart gekleurde spheriten. De bacterien scheiden echter slechts één enkel groenachtig pigment af, dat wellicht identiek is met het oorspronkelijke zuivere blauw der spheriten, maar overigens zeer veranderlijk van natuur moet zijn, en gemakkelijk in de bruine diffundeerende stof verandert. De grondslag der spheriten bestaat uit het lichaam van een afgestorven, sterk opgezwollen en geheel van vorm veranderde bacterie, en is derhalve van eiwitachtige natuur. De kleurstof is aan

dit eiwit op overeenkomstige wijze gebonden, als de koolzure kalk in de door HARTING zoo nauwkeurig onderzochte calcospheriten, waarvan de grondslag eveneens een eiwitachtige stof is, welke door HARTING calcoglobuline of calcofibrine genoemd wordt. De tint der spheriten is afhankelijk van het aangeboden voedsel; een zuivere peptonoplossing geeft ultramarijnblauwe spheriten, cascin en eiwit, daarentegen bruin of zwart gekleurde. In de blauwe vlekken van kaas zijn de spheriten leizwart, van bijna dezelfde kleur zijn de daarin aanwezige tyrosin-spheriten, welke in kaas zoo uiterst algemeen verbreid zijn, en die, voorzoover zij binnen het bereik van de uit de kolonien van *B. cyaneo-fuscus* diffundeerende kleurstof gelegen zijn, die kleurstof gretig absorbeeren en ophoopen.

Het blauwe pigment wordt door oxydeerende en reduceerende middelen gemakkelijk ontkleurd; met het bruine pigment geschiedt dit moeielijker en niet volkomen. Bij oxydatie is de eindkleur een lichtbruine of geelachtige tint. Zelfs zwakke oxydatiemiddelen geven tot deze ontkleuring aanleiding. Zoo toonde DE VRIES aan, dat de blauwe vlekken in kaas, door zachte verwarming aan de lucht bij 24° à 30° wegtrekken; ik kon die waarneming bij mijne culturen bevestigen. Verder kan ik daaraan toevoegen, dat bij nog lagere temperaturen de ontkleuring bij voldoende zuurstoftoetreding wel langzamer maar op den duur (bijv. na enkele weken) toch even volledig tot stand komt. Sterker oxydeerende middelen, zooals waterstofsuperoxyd, salpeterzuur en chroomzuur geven tot zeer snelle ontkleuring aanleiding.

Aangaande de chemische natuur der kleurstoffen, waag ik het niet een bepaald oordeel uit te spreken. Bij analogie besluitende moet aan anilinekleurstoffen gedacht worden, en de gemakkelijke omzetting van het blauwe lichaam door natrium-hydrosulfiet in een kleurloos chromogeen, dat bij luchttoetreding weder onmiddelijk blauw wordt, herinnert aan indigo. Het blauwe en het bruine pigment zijn ongetwijfeld chemisch naverwant, waarschijnlijk is het laatste een oxydatieproduct van het eerste.

---

§ 4.

Voeding.

Alle levende organismen kunnen ten aanzien hunner plastische stikstofvoeding in twee groepen verdeeld worden, groepen, waarop de namen *pepton-organismen* en *koolstofstikstof-organismen* toepasselijk zijn. Tot de laatste groep die zich in een vijftal kleinere afdeelingen laat verdeelen, behooren bijv. de hoogere dieren, die behalve pepton een koolhydraat voor hun plastische voeding vereischen, en daarom *pepton-koolstoforganismen* kunnen genoemd worden. Verder de hoogere planten, die naast een koolhydraat als koolstofbron, òf pepton, òf een amid, òf een ammoniakzout, òf een nitraat als stikstofbron vereischen. Daarop is de naam *nitraatkoolstof-organismen* toepasselijk.

Bacillus cyaneo-fuscus behoort tot de niet zeer omvangrijke groep der *pepton-organismen*, dat is voor de plastische voeding, waarbij groei- en pigmentvorming mogelijk zijn, wordt niets anders vereischt dan pepton (met de noodzakelijke zouten). Zoodoende is *B. c.*, die een krachtig proteolytisch enzym afscheidt, in staat te leven ten koste van eiwit, gelatine, caseine of fibrine zoowel als van pepton siccum alleen. De peptonen, die uit de genoemde eiwitachtige lichamen ontstaan, zijn wellicht verschillend, waarmede het bovengenoemde verschil in kleur der spheriten zou kunnen samenhangen. De toevoeging van andere stoffen zooals suiker, asparagine, glycerine, appelzure ammoniak, wijnsteenzure natronkali, had geen gunstigen invloed op kleurstof afscheiding of groei. Eenigszins belangrijke hoeveelheden dezer stoffen werken zelfs nadeelig. Ook zuren en alkaliën kunnen slechts in sporen verdragen worden. Zelfs de concentratie der peptonoplossing moet, om het gunstigste effect te bereiken, 1 pCt. à 2 pCt. niet overschrijden. Of bij hoogere concentratiën de pepton zelve, of wel de daarmede steeds in vereeniging voorkomende bijmengselen van invloed zijn, werd niet vastgesteld, waarschijnlijk is het laatste het geval. De aanwezigheid van hoeveelheden suiker, zelfs geringer dan

2% glucose en dan 4% melksuiker werken ook in zoover schadelijk, dat daardoor de enzymafscheiding wordt tegengegaan, waardoor caseine, eiwit of gelatine ophouden voedsel te zijn.

Dat de bovengenoemde op de stikstofvoeding berustende groepen niet scherp van elkander zijn gescheiden was wel te verwachten. Zoo kan de meest actieve toestand van *Bacillus cyaneo-fuscus* groeien en pigment afscheiden in een oplossing van $^1/_2$% glucose met $^1/_4$% asparagine in duinwater en treedt daardoor in de groep der amidmikroben. Alle functiën zijn bij deze wijze van voeding echter veel trager dan bij de peptonvoeding.

---

§ 5.

Verzwakking.

B. cyaneo-fuscus is een goed voorbeeld tot het leeren kennen van de verschijnselen van verzwakking van groeikracht en van het verlies van kenmerken in het algemeen, waaraan zooveel bacteriën en daaronder vooral de pepton bacteriën, in hooge mate onderhevig zijn.

Onder de verschillende middelen, waardoor deze erfelijke verandering in de eigenschappen kan worden teweeggebracht staat de invloed der temperatuur bovenaan. Bij *B. cyaneo-fuscus* is deze invloed de volgende.

Wordt onze bacterie voor het eerst uit de vrije natuur, bijv. uit duinwater geïsoleerd, dan laat zich voor de pigmentvorming en groei een optimumtemperatuur van omstreeks 18° C. (15° à 20 C.) vaststellen, namelijk bij het cultiveeren op 10 pCt. gelatine opgelost in duinwater. Bij het herhaaldelijke overenten dezer culturen op gelijken bodem, vroegtijdig genoeg om de schadelijke werking der afscheidingsproducten uit te sluiten, en tusschen de genoemde temperatuurgrenzen, bemerkt men dat weldra bij iedere nieuwe overenting, het opkomen in de getrokken strepen onregelmatiger en de groei in de verkregen kolonien langzamer worden. In een bepaald geval was na zes overentingen binnen

een tijdsverloop van vijf weken, de vermenigvuldiging op gelatine geheel onmogelijk geworden. Deze verzwakte cultuur bleek echter in $^1/_2$ pCt. peptonoplossing in duinwater, nog voor sterken groei en pigmentvorming geschikt te wezen. Toen ook deze vorm van overplanting een maand lang, na tusschenruimten van ongeveer 3 dagen bij temperaturen gelegen tusschen 15 en 20° C. was voortgezet, hield plotseling de pigmentvorming geheel op, en na uitvoering van twee nieuwe overentingen in een peptonoplossing stond ook alle verdere groei stil.

Gelijktijdig daarmede waren culturen uitgevoerd in een kelder, waar de temperatuur niet hooger steeg dan tot ongeveer 10°, en meestal op omstreeks 6° C. gehouden kon worden. Ook deze waren wel eenigszins verzwakt maar daarbij was zelfs na maanden groei en pigmentvorming op gelatine mogelijk gebleven.

Deze waarnemingen komen mij vooral daarom belangrijk voor, omdat wij hier een verzwakkenden invloed leeren kennen, die niet gelijk bij de verzwakking der virulentie van pathogene bacteriën alleen onder omstandigheden, welke slechts in de laboratorien kunnen verwezenlijkt worden, tot stand komt, maar die in de natuur zelve werkzaam kan wezen, ja, volgens mijne overtuiging, noodzakelijk wezen *moet*.

---

§ 6.

KAN AAN VERZWAKTE CULTUREN DE ACTIVITEIT WORDEN TERUGGEGEVEN ?

Aan *Bacillus cyanogenus*, die door groei bij temperaturen boven 20° C., bij aanwezigheid van suiker verzwakt was, zoodat daardoor in gekookte melk geen pigmentvorming meer plaats had en op vleeschwaterpeptongelatine, een verlangzaming van groei was waar te nemen, is de activiteit langzamerhand volledig teruggekeerd door de culturen op vleesch-

waterpeptongelatine, zonder keukenzout, bij omstreeks 2° C. maanden lang aan zich zelf over te laten. De groei gedurende dien tijd was door de lage temperatuur zeer tegengehouden, maar daarbij was, na een tijdsverloop van drie maanden, waarin slechts één overenting had plaats gehad, de groeikracht bij hoogere temperaturen gestegen en het vermogen om in gekookte melk pigment te vormen teruggekeerd. Mijn bekendheid met *B. cyaneo-fuscus* is korter van duur dan met *B. cyanogenus*, maar ook daarvoor kan ik reeds met zekerheid besluiten tot de mogelijkheid van de regeneratie der activiteit van weinig verzwakte vormen, door deze langdurig bij zeer lage temperaturen te doen groeien.

Vroeger ben ik ook reeds tot een overeenkomstig besluit ten aanzien van de lichtfunctie der lichtbacteriën van de Noordzee gekomen, en ik zou instaat zijn deze voorbeelden nog met eenige andere te vermeerderen.

---

§ 7.

VERZWAKKING VAN DE VEGETATIEKRACHT BIJ HOOGERE PLANTEN EN DIEREN.

Verzwakking van vegetatiekracht schijnt bij al wat leeft te kunnen voorkomen. Trekt men de slotsom uit DARWIN's omvangrijke onderzoekingen op dit gebied, zoo komt men tot het besluit, dat de *biologische* oorzaak dezer verzwakking, bij hoogere planten en dieren, in langdurige verwantschapsteelt en in langdurige ongeslachtelijke vermenigvuldiging is gelegen, en verder, dat de natuur de sexualiteit, — dat is de versmelting van twee protoplasten van ongelijke afstamming, — heeft ingesteld, om deze verzwakking tegen te gaan en op te heffen.

Door zoodanige biologische verklaring wordt evenwel geen licht verspreid over de *physiologische* factoren, waarop de verzwakking berust. De vraag rijst in hoever het gewettigd is hierbij tot het bestaan van algemeene invloeden te besluiten, die bij alle levende wezens in de bedoelde

richting werkzaam kunnen zijn. De verschijnselen bij de bacteriën, bij sommige schimmels, bij *Cystococcus humicola* en bij *Scenedesmus acutus* waargenomen, geven aanleiding om in dit opzicht in de eerste plaats aan de temperatuur te denken, en de hypothese, dat hoogere planten en dieren, evenals bacteriën, al is het ook in mindere mate, door langdurigen groei nabij of boven het voor de bepaalde soorten bestaande temperatuuroptimum, aan een blijvende en erfelijke vermindering van vegetatiekracht onderworpen zijn, dringt zich als het ware van zelve op den voorgrond.

Vooral bij planten zou het niet moeilijk wezen door proefnemingen de waarde dezer hypothese te toetsen.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 31 Januari 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS Onder-Voorzitter, VAN DORP, MARTIN, LORENTZ, ZAAIJER, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, BIERENS DE HAAN, PLACE, VAN 'T HOFF, A. C. OUDEMANS JR., BAKHUIS ROOZEBOOM, VAN RIEMSDIJK, FRANCHIMONT, MOLL, RAUWENHOFF, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, GRINWIS, SCHOUTE, KORTEWEG, PEKELHARING, KOSTER, MULDER, HOOGEWERFF, HOEK, ZEEMAN, WEBER, J. A. C. OUDEMANS, ENGELMANN, BEYERINCK, VAN BEMMELEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Directeur van de Sterrewacht te Leiden, 15 Januari 1891; 2°. W. P. WOLTERS, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 30 December 1890; 3°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 5 Januari 1891; 4°. De gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 15 Januari 1891; 5°. W. B. BOELES, Bibliothecaris van het Friesche Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde te Leeuwarden, 30 December

1890; 6°. P. WILLEMS te Leuven, 23 Januari 1891; 7°. den Directeur van het Institut royal géologique te Budapest, 19 Januari 1891; 8°. C. GEGENBAUR te Heidelberg, 29 December 1890; 9°. H. KNOBLAUCH, Voorzitter van de kais. Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher te Halle a/S, 28 November 1890; 10°. D. STRICKER, Bibliothecaris van de Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft te Frankfort a. M., 30 December 1890; 11°. P. SCHIEMENZ, Bibliothecaris van het Station zoologique te Napels, 26 December 1890; 12°. M. BELLATI, Secretaris van de reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti te Padua, 19 Januari 1891; 13°. P. BORTOLOTTI, Secretaris van de Accademia reale delle Scienze te Modena, 15 December 1890; 14°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris van de kongelige danske Videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 15 December 1890; 15°. S. P. LANGLEY, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 24 December 1890; 16°. H. M. PAUL, Bibliothecaris van het U. S. naval Observatory te Washington, 26 December 1890; 17°. W. T. HARRIS, Bibliothecaris van het Bureau of Education te Washington, 26 December 1890; 18°. J. C. PILLING, Secretaris van de U. S. geological Survey te Washington, 29 December 1890; 19°. E. H. STEVENS, Bibliothecaris van het Department of Agriculture te Washington, 3 Januari 1891; 20°. E. C. PICKERING, Directeur van het Harvard College Observatory te Cambridge, 7 Januari 1891; 21°. M. DEWEY, Secretaris van de State Library te Albany, 27 December 1890; 22°. G. HAMBAD, Bibliothecaris van de Academy of Science te St. Louis, 5 Januari 1891; 23°. E. S. HOLDEN, Bibliothecaris van het Lick Observatory te Mt. Hamilton, 2 Januari 1891; 24°. J. THORBURN, Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sussex, 14 Jannari 1891; 25°. den Secretaris van het Canadian Institute te Toronto, 1891; 26°. den Bibliothecaris van het nova Scotian Institute of natural Science te Halifax, 1891; 27°. F. KURTZ, Bibliothecaris van de Academia nacional de Ciencias te Cordoba, 19 November 1890.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 14 Januari 1891; 2°. Het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 10 Januari 1891; 3°. J. E. ALBERTS te Aarlanderveen, 26 December 1890; 4°. J. W. BECK te Groningen, Januari 1891; 5°. A. G. VORDERMAN te Batavia, 12 December 1890; 6°. J. PORTER te Cambridge, 17 November 1890; 7°. D. CHILOVI, Directeur van de R. Bibliotheca nazionale centrale te Florence, 1891; 8°. H. D. TODD, Superintendant van het nautical Almanac Office te Washington, 7 October 1890; 9°. A. R. C. SELWIJN, Directeur van de geological and natural History Survey te Washington, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, BEHRENS, SCHOLS, STOKVIS, MICHAËLIS, en VAN DIESEN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (24 Januari 1891), waarin kennis wordt gegeven, dat in de maand Mei e. k. het 2e ornithologisch Congres gehouden zal worden te Buda-Pesth, en dat de Hongaarsche Regeering den wensch te kennen heeft gegeven, dat die bijeenkomst door een afgevaardigde der Nederlandsche Regeering mocht worden bijgewoond. De Minister is bereid, aan dit verlangen gevolg te geven, indien de opdracht daartoe aan een erkend bekwaam Nederlandsch Ornitholoog, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, kan worden verleend, en noodigt de Afdeeling uit, met eenigen spoed te willen mededeelen, of er, en zoo ja welke, Nederlandsche Ornithologen bereid zijn, eene opdracht als de boven bedoelde, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, te aanvaarden.

Op eene desbetreffende vraag van den Voorzitter, deelt de Secretaris mede, dat eene dergelijke missive van den Minister bij de Afdeeling ontvangen was, toen het eerste ornithologische Congres zou samenkomen, en dat toen, daar geen

van de zoölogische leden der Afdeeling zich beschikbaar wenschte te stellen, besloten werd, den Heer A. VAN BEMMELEN, Directeur van den Dierentuin te Rotterdam, uit te noodigen, zich het mandaat als afgevaardigde der Regeering te laten welgevallen. Genoemde Heer had echter voor die opdracht bedankt.

Na deze mededeeling, en nadat opnieuw gebleken was, dat niemand van de zoölogische leden der Afdeeling het door den Minister bedoelde mandaat wenschte te aanvaarden, wordt besloten, de Heeren A. VAN BEMMELEN voornoemd, en J. BÜTTIKOFER, Conservator aan 's Rijks Museum van natuurlijke Historie te Leiden, met het verlangen des Ministers bekend te maken en, zoodra hunne antwoorden ontvangen zijn, de noodige inlichting aan Z. Exc. te verschaffen.

3°. Het bericht van overlijden van wijlen den Heer JEAN BAPTISTE JOSEPH LIAGRE, Secrétaire perpétuel de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, op den 13den Januari j.l. Wordt besloten, deze kennisgeving met een adres van rouwbeklag te beantwoorden.

4°. Een schrijven van den heer Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van eene verhandeling over »Involuties in het complexe vlak", welke wordt aangeboden voor de werken der Akademie. De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN verklaren zich bereid, over de verhandeling te rapporteeren in de Februari-vergadering.

— De Heeren SURINGAR en C. A. J. A. OUDEMANS, aangewezen om te adviseeren omtrent de bestemming, te geven aan het door den Heer Dr. F. A. F. C. WENT aan de Afdeeling overgelegde Verslag van zijn verblijf aan het Buitenzorgsche Station, stellen voor, dit verslag te doen opnemen in de Verslagen en Mededeelingen, en op het Proces-Verbaal der December-zitting te doen volgen. Aldus wordt besloten.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen een gunstig rapport uit over de in de December-vergadering in hunne handen gestelde verhandeling van den Heer J. C.

KLUYVER, leeraar aan de H. B. S. te Breda. De conclusie strekt om haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen. Aldus wordt besloten.

— De Heer VAN BEMMELEN brengt, bij ontstentenis van den Heer BEHRENS, een beknopt verslag uit over hetgeen in het jaar 1890 door de geologische Commissie werd verricht, en legt daarbij over de uitvoeriger opstellen van de Heeren Dr. J. LORIÉ, Dr. H. VAN CAPPELLE en den Heer SCHROEDER VAN DER KOLK, die zich bereid hadden verklaard, de Commissie in hare werkzaamheden behulpzaam te zijn. Tevens wordt door den penningmeester der Commissie, den heer VAN RIEMSDIJK, de rekening en verantwoording overgelegd van de som van *f* 500, waarover de Commissie in het afgeloopen jaar mocht beschikken. Die rekening en verantwoording sluit met een voordeelig saldo van *f* 37.40. Na eenige discussie wordt besloten, den Minister van Binnenlandsche Zaken een afschrift aan te bieden van het voorgelezen beknopter rapport, en daaraan de mededeeling toe te voegen, dat binnen kort de gedrukte uitvoerige verslagen aan Z. Exc. zullen worden toegezonden. Ook wordt aangenomen het voorstel der Commissie, om eene nieuwe subsidie van *f* 500 voor het jaar 1891 aan te vragen, nadat door den Heer MARTIN, ook uit naam der Heeren VAN BEMMELEN en VAN RIEMSDIJK, te kennen was gegeven, dat voor het oogenblik geen hoogere som werd genoemd, omdat de schijn van concurrentie vermeden moest worden met plannen van anderen, welke zich de vervaardiging van eene geologische kaart van Nederland ten doel hadden gesteld.

— De Heer HOOGEWERFF spreekt, ook uit naam van het lid VAN DORP — in verband met hun vroegeren arbeid over de omzetting van succinphenylamide met onderbromigzuurkalium — over de inwerking van onderbromigzure en onderchlorigzure alkaliën op phtaalimide.

Wordt 1 mol. phtaalimide, onder omschudden en afkoelen, opgelost in een loog, die 3 mol. K O H in 10 pCt. opl. en 1 mol. K O Br bevat; aan die oplossing nog 3 mol. K O H

toegevoegd, en — na verwarming tot op 80° C. — de vloeistof met azijnzuur zuur gemaakt, zoo wordt door toevoeging van azijnzuurkoper een onoplosbaar koperzout neergeslagen, waaruit door ontleding met H_2S anthranilzuur wordt gewonnen in eene hoeveelheid, 85 pCt. bedragende van die, welke de theorie aanwijst.

Het is nog niet met zekerheid te zeggen of aan het gewone phtaalimide de symetrische of de onsymetrische formule toekomt. Uitgaande van deze laatste kan de vorming van het anthranilzuur door de volgende vergelijkingen wedergegeven worden:

$$\text{I} \quad C_6H_4 \begin{matrix} -C{=}NH \\ > O \\ -C{=}O \end{matrix} + KOH + KOBr = C_6H_4 \begin{matrix} -N\begin{matrix}K\\Br\end{matrix} \\ -C{=}O \\ -COOK \end{matrix}$$

$$\text{II} \quad C_6H_4 \begin{matrix} -N\begin{matrix}K\\Br\end{matrix} \\ -C{=}O \\ -COOK \end{matrix} + 2KOH = K^2CO^3 + KBr + C_6H_4 \begin{matrix} -NH_2 \\ -COOK \end{matrix}$$

Neemt men voor het imid de symetrische formule aan, zoo kan men soortgelijke vergelijkingen opstellen.

Dezelfde omzetting werd ook met andere onderbromigzure zouten der alkaliën of der alkalische aarden, ook met de onderchlorigzure zouten dier metalen verkregen.

Spreker treedt nog in eenige bijzonderheden aangaande de afscheiding en zuivering van het anthranilzuur en voert de bewijzen aan voor de identiteit van het door bovengenoemde reactie verkregen zuur met het orthoamidobenzoëzuur, het ook uit indigo gewonnen anthranilzuur — onder meerdere: het smeltpunt van het zuur en van verscheidene zijner verbindingen en de omzetting in salicylzuur. De zwavelzure verbinding, bereid met anthranilzuur, afkomstig van indigo, kristalliseert in water niet met 2 mol. kristalwater, zooals gewoonlijk opgegeven wordt, doch met eene hoeveelheid, die met 1 mol. (of iets meer) overeenkomt. Voor de zwavelzure verbinding van het anthranilzuur uit phtaalimide werd hetzelfde kristalwatergehalte en door Prof. Behrens denzelfden kristalvorm waargenomen als voor de eerstgenoemde verbinding.

Op de beteekenis, die in eene vereenvoudigde bereidings-

wijze van het anthranilzuur kan gelegen zijn, wordt gewezen. Proeven, door Dr. BEIJERINCK genomen, toonen aan, dat in het vermogen de alkoholgisting en azijnzuurvorming tegen te gaan, het anthranilzuur ver bij het salicylzuur achterstaat. Tegenover de melkzuurgisting werden gunstiger resultaten verkregen en kwam de werking van 3—5 deelen anthranilzuur met 1 deel salicylzuur overeen.

Zeer zuiver salicylzuur — vrij van de gewone bijmengingen van het uit phenol bereide salicylzuur — kan gemakkelijk uit anthranilzuur worden gewonnen.

Ook de omzetting van het volgens ASCHAN uit phtaalimide bereide phtaaldiamide met onderbromigzuur- en onderchlorigzuurkalium in alkalische oplossing, werd nagegaan.

Werd 1 mol. KOBr of KOCl op 1 mol. $C_6H_4 \begin{matrix} NH_2 \\ -CNH_2 \\ -C=O \end{matrix} >O$

genomen, zoo ontstond het benzoyleenureum, identisch met de verbinding, die door GRIESS uit orthoamidobenzoëzuur en ureum is bereid. Met 2 mol. KOBr wordt een gebroomd derivaat van dat ureum verkregen.

Aan de Heeren VAN BREUKELEVEEN en DOCTERS VAN LEEUWEN brengt de spreker dank voor de toewijding, waarmede door hen aan dezen arbeid werd deelgenomen.

Verschillende praeparaten, waarop het medegedeelde betrekking had, werden getoond.

De Heer LORENTZ bespreekt MAXWELL's theorie der electriciteitsbeweging en behandelt in het bizonder de verschijnselen in ponderabele stoffen, die in beweging verkeeren, terwijl de daarin aanwezige aether in rust blijft. Daarbij wordt elke electrische stroom in zulk eene stof en elke diëlectrische polarisatie van hare molekulen opgevat als eene verplaatsing van electrisch geladen deeltjes, die door tusschenkomst van den aether op elkander werken. Van deze deeltjes wordt aangenomen, dat zij eene zekere uitgebreidheid bezitten en dat de ruimtedichtheid ε hunner electrische lading doorloopend van punt tot punt verandert en aan de buitenzijde

0 wordt, bovendien dat de aether de deeltjes doordringt, zoodat ook in hun binnenste eene diëlectrische verplaatsing in den aether bestaat.

De componenten dezer verplaatsing worden door f, g, h voorgesteld; zij worden, evenals andere grootheden, die ter sprake komen, in electromagnetische maat uitgedrukt en als functiën van den tijd t en de coördinaten x, y, z van een vaststaand punt opgevat.

Buiten de electrisch geladen deeltjes voldoen f, g, h aan de voorwaarde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

maar binnen een deeltje moet men deze vergelijking vervangen door:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \varepsilon.$$

De verplaatsing van een geladen deeltje door den stilstaanden aether wordt in rekening gebracht door in aanmerking te nemen, dat nu op deze, dan op gene plaats de som der drie differentiaalquotienten eene voorgeschreven waarde ε moet hebben.

Voor de componenten van den electrischen stroom worden de volgende uitdrukkingen aangenomen:

$$u = \varepsilon \xi + \frac{\partial f}{\partial t}, v = \varepsilon \eta + \frac{\partial g}{\partial t}, w = \varepsilon \zeta + \frac{\partial h}{\partial t},$$

waarin ξ, η, ζ de componenten der snelheid van het geladen deeltje voorstellen.

Overal is:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Verder wordt ondersteld:

1. dat aan deze stroomcomponenten op de gewone wijze

eene magnetische kracht beantwoordt, waarvan de componenten α, β, γ bepaald worden door de vergelijkingen:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4\pi u, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 4\pi v, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4\pi w,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0;$$

2. dat het arbeidsvermogen van plaats per volumeëenheid is:

$$2\pi V^2 (f^2 + g^2 + h^2)$$

(V voortplantingssnelheid van het licht in den aether);

3. dat de kinetische energie per ruimteëenheid de waarde

$$\frac{1}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

heeft;

4. dat de ligging der deeltjes, die wegens hunne beweging dit laatste arbeidsvermogen bezitten, bepaald is door den stand der electrisch geladen deeltjes en door de waarden van f, g en h in elk punt der ruimte.

De bewegingsvergelijkingen worden door toepassing van het beginsel van d' Alembert verkregen. Vooreerst moet overal

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

zijn; deze vergelijkingen, vereenigd met de vorige, bepalen den toestand in den aether, wanneer de beweging der geladen deeltjes gegeven is.

In de tweede plaats worden de componenten der kracht, welke een geladen deeltje van den aether ondervindt,

$$X = 4\pi V^2 \int \varepsilon f \, d\tau + \int \varepsilon (\eta \gamma - \zeta \beta) \, d\tau,$$

$$Y = 4\pi V^2 \int \varepsilon g \, d\tau + \int \varepsilon (\zeta \alpha - \xi \gamma) \, d\tau,$$

$$Z = 4\pi V^2 \int \varepsilon h \, d\tau + \int \varepsilon (\xi \beta - \eta \alpha) \, d\tau.$$

Deze formules, waarin $d\tau$ een volumeëlement voorstelt, moeten dienen bij het onderzoek naar de beweging der geladen deeltjes.

Op eenvoudige wijze kunnen uit deze uitkomsten de wetten worden afgeleid voor de electrostatische verschijnselen, de inductiestroomen en de electrodynamische werkingen. Ook kunnen de vergelijkingen worden gebezigd om de snelheid van het licht in een ponderabelen isolator te berekenen. Men kan nl. aannemen, dat de molekulen van zulk een lichaam geladen deeltjes bevatten, die zich ten opzichte van elkander kunnen verplaatsen, maar door krachten, die in den bouw van het molekuul haren oorsprong hebben, naar hunne evenwichtsstanden worden teruggedreven. In een lichtbundel voeren deze deeltjes trillingen uit, die gepaard gaan met periodieke diëlectrische verplaatsingen in den aether en waarvan de voortplanting onderzocht kan worden, zoowel wanneer de ponderabele stof zich door den aether voortbeweegt, als wanneer zij in haar geheel in rust is. Onderstelt men het laatste, dan vindt men, dat de brekingsindex n met de dichtheid d der stof zoo moet veranderen, dat de uitdrukking

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\, d}$$

standvastig blijft, indien ten minste bij verandering in de onderlinge afstanden der molekulen deze elk op zich zelf dezelfde eigenschappen behouden.

Neemt men aan, dat de ponderabele stof zich verplaatst, dan vindt men voor den »meêsleepingscoëfficient" de waarde

$$1 - \frac{1}{n^2},$$

die reeds door FRESNEL werd aangenomen en in de theorie der aberratie eene belangrijke rol speelt.

— De Heer A. C. OUDEMANS JR. biedt ter plaatsing in de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer J. W. RETGERS, mijn-ingenieur, tijdelijk te 's Gravenhage, »Over de samenstelling van het duinzand van Nederland". De Voorzitter stelt de verhandeling om advies in handen van de Heeren BEHRENS en VAN BEMMELEN, nadat de Heer VAN 't HOFF bezwaar had gemaakt, als lid der adviseerende Commissie werkzaam te zijn.

— Voor de Bibliotheek der Akademie wordt, namens den Heer Dr. J. LORIÉ, door de Heer VAN RIEMSDIJK aangeboden, diens »Contributions à la Géologie des Pays-Bas"; V.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

VERSLAG

DER

COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK VAN NEDERLAND

OVER HET JAAR 1890.

De Commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland heeft de eer, aan de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen het volgende mede te deelen.

Nadat door de Commissie bericht was ontvangen, dat eene Rijks-subsidie van *f* 500 voor het doen van geognostische onderzoekingen in Nederland was verleend, wendde de Commissie zich tot de volgende heeren, met verzoek om medewerking:

Prof. Dr. F. J. P. van Calker te Groningen.

Dr. J. Lorié te Utrecht.

Dr. H. van Cappelle te Sneek.

Dr. G. A. F. Molengraaff te Amsterdam.

J. L. C. Schroeder van der Kolk, Candidaat in de geologie te Leiden.

Zij mocht van genoemde heeren de mededeeling ontvangen, dat zij bereid waren, ter bereiking van het beoogde doel, hunne gewaardeerde medewerking te verleenen. Ten gevolge van bijkomende omstandigheden, kon in het afgeloopen jaar slechts door drie hunner aan de onderzoekingen worden deelgenomen, namelijk door de Heeren Lorié, van Cappelle en Schroeder van der Kolk.

Door den Heer LORIÉ werden bezoeken gebracht aan het Merwedekanaal en aan den nieuwen Maasmond; buitendien werden door hem onderzocht de hoogvenen in het oosten van Noordbrabant en het aangrenzende gedeelte van Limburg, eindelijk de omgeving der hoogvenen van Hoogeveen-Coevorden-Ommen en Hardenberg-Almelo.

De uitkomsten dezer onderzoekingen zullen door den heer LORIÉ zoo spoedig mogelijk, met andere tot een geheel vereenigd, in het licht gegeven worden.

De Heer VAN CAPPELLE stelde onderzoekingen in West-Drenthe in het werk en de Heer SCHROEDER VAN DER KOLK bracht een bezoek aan de sluisput te IJmuiden; laatstgenoemde ging buitendien de verspreiding der kristtallijne erratica na in de Noordelijke provinciën van Nederland.

De Commissie kan voor het overige naar de verslagen verwijzen, die door genoemde heeren zijn ingediend en voor de opneming in de Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie worden aangeboden. Uit den aard der zaak zijn deze verslagen slechts de uitkomsten van voorloopig in het werk gestelde onderzoekingen, omdat eene volledige bewerking meer tijd vereischt dan tot nu toe beschikbaar was.

Wat betreft de rekening, verwijst de Commissie naar de hiernevensgaande verantwoording *).

31 Januari 1891. TH. H. BEHRENS, *Voorzitter*

A. D. VAN RIEMSDIJK, *Secretaris.*

---

*) Voor deze verantwoording vergelijke men het Jaarboek 1890.

RAPPORT

OVER DE

IN DE MAANDEN SEPTEMBER EN OCTOBER 1890
GEDANE ONDERZOEKINGEN,

DOOR

Dr. J. LORIÉ.

I. Omgeving der hoogvenen van Hoogeveen-Coevorden-Ommen en van Hardenberg-Almeloo.

Het eerstgenoemde hoogveen, in Drenthe en Overijsel gelegen, werd op een aantal punten aan zijn omtrek onderzocht en ook hier en daar in het midden, om het verband tusschen de veenvorming en den ondergrond benevens het omgevende terrein op te sporen.

Het eerst werd de smalle noordelijke wortel tusschen Westerbork en Zweeloo nagegaan, vervolgens de westrand langs Mantinge, Drijber, Hoogeveen, Zuidwolde en Nolde.

Zoowel hier als elders bleek telkenmale de belangrijke rol, die zandstuivingen bij de vorming en de begrenzing der hoogvenen hebben gespeeld. Ten deele zijn zij jonger dan het hoogveen, ten deele ouder, soms er geheel door omgeven of zelfs bedekt, en in dit geval hebben zij haar eigenaardig karakter weder grootendeels verloren. Zij zijn dan slechts met moeite en door vergelijking met andere, beter gekenmerkte, als zoodanig te herkennen. Zeker hebben in vele gevallen zandstuivingen den eersten aanleg tot de hoogveenvorming gegeven.

Nevens den westrand werd ook de oostrand in oogenschouw genomen bij de dorpen Gees, Dalen, Dedemsvaart, waarna het gedeelte van het hoogveen ten zuiden van de Dedemsvaart en de Reest aan de beurt kwam, uitgaande van Hardenberg, Ommen, Avereest en Staphorst. Door vergelijking van deze waarnemingen onderling en met andere, in dezen en vorige zomers gedaan, werd eene verklaring voor het ontstaan van hoogveen *op deze plaatsen* beproefd. Dit toch was het hoofddoel van het onderzoek: meer de geologisch-physische dan wel de botanisch-chemische zijde van het vraagstuk toe te lichten.

Dergelijke onderzoekingen en waarnemingen werden ook in het werk gesteld met het kleinere hoogveen tusschen de Vecht en de Radewijker-Beek ten oosten van Gramsbergen.

Nauwkeurig werd verder gedurende verscheidene dagen, van Hardenberg uit, het hoogveen bezocht, dat zich van den hoogterug van Velsen over Sipculoo, enz., naar Almeloo uitstrekt. Het eerst werden de drie uitloopers van het hoogveen naar het noord-oosten onderzocht, waar de wetten tevens werden nagegaan, die ik omtrent de verspreiding der hoogvenen in ons land had meenen te vinden. In verband daarmede werden ook eenige waarnemingen in het Diluvium gedaan, die tot eenige ontdekkingen leidden.

II. De hoogvenen in het oosten van Noordbrabant en het aangrenzende gedeelte van Limburg.

Het eerst werd een aanvang gemaakt met de hoogvenen en peelen tusschen Grave en Meijel. Van het dorp Uden uit werden zoowel de oost- als de westgrenzen bezocht, waarbij weder de aanzienlijke rol, die de zandstuivingen spelen, telkenmale in het oog viel. Vervolgens werd hetzelfde van Helmond en Meijel uit verricht.

Dit laatste dorp was mijn standkwartier voor een aantal excursies naar het hoogveen: »Astensche Peel", dat intusschen grootendeels afgegraven is, en welks onregelmatige gedaante in hooge mate het gevolg is van de zandstuivingen.

Van Weert uit werd vooreerst het hoogveen bij Hamont onderzocht, waarvan nog slechts zeer weinig over is en welks geschiedenis zeer ingewikkeld bleek te zijn. Vergelijking met de resultaten van ons onderzoek van de Astensche Peel en de overige hoogvenen, deed ons echter weder hier den weg vinden. Nieuwe en m. i. belangrijke beschouwingen over den oorsprong en de vervorming van ons Diluvium vloeiden uit deze waarnemingen voort.

Gedurende de excursies bleek het overtuigend, dat ik mij niet enkel tot de hoogvenen zelven kon bepalen, maar ook de omgeving in vrij uitgebreiden zin in den kring mijner onderzoekingen moest opnemen.

Grootendeels wederom van Weert uit, werden daarom nog uitstapjes gemaakt, hoofdzakelijk tusschen den spoorweg Grand-Central-Belge en de Maas, die mede verrassende uitkomsten opleverden. Gedeeltelijk moeten zij in een volgend seizoen nog voortgezet en voltooid worden.

III. Bezoek aan den Nieuwen-Maasmond.

Hiertoe bleek een dag geheel voldoende te wezen (7 October), daar er slechts een klein gedeelte, ten noorden van van de halte Capelle-Nieuwe Vaart ontgraven en tevens droog was.

Dit kleine stuk leverde intusschen verscheidene goede doorsneden van den bodem op, die in teekening werden gebracht en daardoor omtrent de afwisselende verhoudingen van rivierzand, bruine en blauwe klei veel licht verschaften. Veen werd er ook aangetroffen, doch slechts in geringe hoeveelheid. Het is grootendeels weder bij doorbraken en overstroomingen weggeslagen en door klei en zand vervangen.

IV. Bezoeken aan het Merwedekanaal.

Van mijne woonplaats, Utrecht, uit, was daartoe eene zeer geschikte gelegenheid, zoowel rechtstreeks te voet, als ook van het station Nieuwersluis uit. Het hier gevondene sluit zich zeer goed aan bij de waarnemingen in den Nieuwen Maasmond. De veenlaag is hier evenwel van veel meer beteekenis en in veel geringere mate door klei en zand

vervangen. Een gedeelte van dit rivierzand is zelfs van jongere dagteekening dan het veen, daar het hierop rust.

Ook deze onderzoekingen zullen in het aanstaande seizoen verder voortgezet worden.

De gezamenlijke resultaten zullen later in behoorlijk verband en meer uitvoerig worden behandeld.

Utrecht, Januari 1891.

KORT VERSLAG

VAN EENIGE, DEZEN ZOMER IN WEST-DRENTHE GEDANE GEOLOGISCHE WAARNEMINGEN,

DOOR

H. VAN CAPPELLE.

Eenige aan het einde van het vorig jaar in West-Drenthe verrichte en door mij onderzochte grondboringen hadden tot eenige vragen aanleiding gegeven, die mij een onderzoek van het diluvium van dit gebied zeer gewenscht deden voorkomen. Toen ik in den afgeloopen zomer door de Akademische Commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland tot het doen van eenige waarnemingen werd uitgegenoodigd en mij gevraagd werd, welke onderzoekingen ik op het oog had, viel mij dus eene keuze niet moeielijk.

Hoewel de tijd, met het oog op de beschikbare geldmiddelen, te kort was, om voor eene gedetailleerde beschrijving van den bodem van West-Drenthe de noodige bouwstoffen te kunnen verzamelen, toch hebben mijne omzwervingen door Drenthe mij reeds met eenige belangrijke verschijnsels bekend gemaakt.

In de eerste plaats werden in de omstreken van Havelte talrijke waarnemingen gedaan. De bodem dezer gemeente is zóó buitengewoon rijk aan steenen, dat hier niet lang naar de sporen eener vroegere gletscherwerking gezocht behoefde te worden. Het bleek, dat blokken — de grondmoraine van het diluviale landijs — er eene enorme verspreiding bezit: niet alleen treft men in het dorp bijna

overal deze vorming, hetzij aan de oppervlakte, hetzij met eene dikkere of dunnere steenzand-bedekking aan, doch ook de uitgestrekte heidevelden, die in deze gemeente zoo menigvuldig zijn, vertoonen dezelfde samenstelling en zouden dus voor eene ontginning in de eerste plaats in aanmerking moeten komen.

Niet alleen de gesteenten, welke de blokleem insluit, werden bestudeerd, doch ook naar de dikte der grondmoraine werd een onderzoek ingesteld. Daardoor kon worden aangetoond, dat de blokleembank op de laagstgelegen punten de grootste dikte bereikt, dunner wordt naarmate men de hoogten bestijgt en dat de onderliggende gelaagde zandvorming (glaciaal gelaagd diluvium), welke als eene afzetting der gletscherbeken van het naderende landijs moet beschouwd worden, op enkele punten uit het doorgaans vlakke terrein van de blokleem te voorschijn komt. Op dezen regel, die wij ook elders in ons land hebben waargenomen, maken de onder den naam van den Havelter- en den Bisschopsberg bekende aanzienlijke bodem-verheffingen eene uitzondering. Zelfs op den top van deze hoogten vindt men hier en daar blokleem ontwikkeld. De bouw dezer heuvels werd door gravingen nauwkeuriger nagegaan, waarvan de uitkomsten mij de overtuiging schonken, dat genoemde hoogten de overblijfselen eener eindmoraine zijn.

Daarna werden twee dagen in de gemeente Steenwijkerwold doorgebracht, waar het moraine-landschap ontwikkeld bleek te zijn, ten zuiden begrensd door aanzienlijke bodemverheffingen: den Woldberg en den Eezer rug, welke eveneens voor de brokstukken eener eindmoraine moesten verklaard worden.

Ook de zooeven genoemde, onder de grondmoraine ontwikkelde, zandvorming werd nauwkeuriger onderzocht en aangetoond, dat hier en daar glaciaal gelaagd gemengd diluvium niet ver van de oppervlakte ligt, zoodat het voorkomen van enkele witte kwartsen in het West-Drenthsch diluvium te begrijpen is.

Laatstgenoemd verschijnsel deed mij, in verband met beschouwingen, waartoe de reeds genoemde grondboringen hadden

aanleiding gegeven, tot eenige excursies ook door Midden-Drenthe besluiten.

In de omgeving van Ruinen, Zuidwolde, Echten, Beilen en Hooghalen, werden waarnemingen gedaan en aangetoond, dat op verschillende punten van Midden-Drenthe met de Noordsche gesteenten zooveel zuidelijke steenen gemengd zijn, dat in plaats van Skandinaafsch, Gemengd diluvium op de kaart zal moeten aangegeven worden, zoodat de oude geologische kaart ook hier belangrijke wijzigingen zal moeten ondergaan. Dit Gemengd diluvium bevat ook in Drenthe vormingen van zeer verschillende samenstelling en oorsprong. Wordt het nl. hier door glaciaal gelaagd diluvium vertegenwoordigd (Hunnekloosterberg bij Ruinen), elders is het de grondmoraine, die, behalve noordelijke gesteenten, zuidelijk materiaal bevat (Echten, Zuidwolde, Beilen). Door gravingen kon worden aangetoond, dat, waar het laatste het geval is, de grondmoraine eene geringe dikte bezit en op glaciaal gelaagd gemengd diluvium rust.

Eerst wanneer wij onze in den afgeloopen zomer gedane waarnemingen in een volgend jaar zullen hebben voortgezet, zal tot het samenstellen eener verhandeling over het diluvium van West-Drenthe kunnen worden overgegaan.

Sneek, 24 Dec. '90.

ONDERZOEK NAAR DE VERSPREIDING DER KRISTALLIJNE ERRATICA

IN DE

NOORD-OOSTELIJKE PROVINCIËN VAN NEDERLAND.

(19 Sept.—23 Oct. 1890.)

DOOR

J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.

Het hoofddoel van het korte onderzoek was: een bijdrage tot de kennis der horizontale en verticale verspreiding van de kristallijne gesteenten in Nederland te leveren. Achtereenvolgens werden als punt van uitgang Groenlo, Oldenzaal, Assen, Groningen, Zwolle, Zutfen en Utrecht bezocht. Daar aan het trekken van een grens tusschen noordelijk en zuidelijk diluvium groote bezwaren zijn verbonden, is een poging gedaan het geleidelijke van den overgang ook in het onderzoek op te nemen, door het gehalte aan onmiskenbaar noordelijke zwervelingen aan te geven, en wel zoo dat dit in kaart kan worden gebracht. Op deze wijze kunnen wat betreft de hoeveelheid, 9 trappen onderscheiden worden, die niet te moeielijk uit elkander zijn te houden. Op het feit dat het gehalte aan noordelijk gesteente met de grootte der keien toeneemt en op andere storingen werd zooveel mogelijk acht geslagen.

Bij Groenlo werd in het algemeen opgemerkt, dat het gehalte aan noordelijk materiaal bij toenemende diepte van gravingen en boringen afnam; verder dat het van punt tot punt sterk uiteenliep, zoodat het onderzochte gebied in twee evenwijdig loopende N.N.O. gerichte velden kan verdeeld

worden; op het westelijkste zijn noordelijke zwervelingen zeldzaam op het oostelijkste niet; het westelijke bevat de velden of grintgravingen bij Luddik Es, t. W. v. Eibergen, halfweg Eibergen Zwilbroek, Wessels; het oostelijke de vindplaatsen, ongeveer twaalf in getal, tusschen Haaksbergen en het Vragender veld. Enkele keien met meer dan metergroote afmetingen werden waargenomen, silurische kalken daarentegen niet. Een bijna drie meter diepe graving gaf een fragment, mogelijk van *Pecten*, en vele uiteengeschoven gesteenten die bij uitgraving op elkander pasten; onmiskenbaar noordelijke zwervelingen bevonden zich niet in de groeve, wel in de onmiddelijke nabijheid op den beganen grond. Hier werden ook schoone „driekanters" met scherpe S vormige nok verzameld. Een der bijeengebrachte keien vertoont gletscherkrassen. Het diluvium, dat bestanddeelen van tertiaire afkomst schijnt opgenomen te hebben, is meestal zandig, bevat enkele malen echter kleibankjes; een daarvan was ongeveer een meter dik met regelloos gerichte gesteenten en bestond uit een zeer harden, echter kalkvrijen leem.

Bij Oldenzaal schijnen de schommelingen in het gehalte minder groot te zijn dan bij Groenlo, het gehalte zelf belangrijker. Ook hier werd het afnemen met de diepte waargenomen, en het geheel ontbreken daar waar tot op den veelvuldig voorkomenden groenen leem was gegraven.

Rolde gaf eenige goede voorbeelden van keileem, die in het voor mij beschikbare gedeelte vrij van kalk was en keien met gletscherkrassen, Ålandgesteenten (o. a een rapakivi), elfdalensche porfier en andere noordelijke zwervelingen opleverde. Zeer talrijk waren de Ålandgesteenten op een veld bij Gieten niet ver van de provinciale leemgroeve. In laatstgenoemde groeve ligt de leem aan de oppervlakte, bevat Ålandgesteenten (ook rapakivi), Elfdalensche porfier enz.; op ongeveer 1 Meter diepte begon de leem zandig te worden en werd het water in dezen tijd van het jaar bereikt; dit belette het onderzoek dieper voort te zetten; naar mij medegedeeld werd volgt zand (lehmstreifig) meestal met een oerplaat; daarop volgt wederom leem met keien, die, zooals uit twee putboringen in den zomer 1889 zou gebleken zijn,

op een zuiveren klei zonder gesteenten zou liggen. Dit kan pas in een droger jaargetijde onderzocht worden; wellicht zou dan voor dit op de voortzetting van den Hondsrug gelegen punt een herhaalde ijsbedekking kunnen aangetoond worden.

Bij Heiligerlee werd keileem en Beyrichienkalk en andere gesteenten met gletscherkrassen aangetroffen.

In Steenwijk werd hoofdzakelijk aan de haven verzameld.

Epe gaf als gehalte dergelijke afwisselende getallen als Groenlo; de mergelgroeve onder Tongeren was thans ongebruikt en ontoegankelijk; »driekanters" ook onder granieten zijn hier zeer algemeen.

De uitgestrekte leemgroeven bij den Viersprong bij Markelo konden door het vele water slechts als verzamelplaats gebruikt worden.

In het geheel werden ongeveer 500 gesteenten verzameld grootendeels kristallijn en van noordelijke afkomst; een gedeelte hiervan wordt mikroskopisch onderzocht en met in den zomer van dit jaar in N.Duitschland, Noorwegen en Zweden door mij verzameld materiaal vergeleken. Enkele, o.a. boven vermelde punten moeten nog nader bezien worden.

Over de waargenomen horizontale verspreiding kan echter voorloopig het volgende medegedeeld worden.

Ålandgranieten, — porfier en — rapakivis zijn bij Groenlo niet zeldzaam, evenmin bij Oldenzaal; bij Rolde werden zij uit den keileem verzameld, zoo ook bij Gieten; een veld bij laatstgenoemde plaats bevatte ze in overvloed; in den Oosthoek van Groningen kwamen zij voor; in het Noorden van de Veluwe bij Epe en Tongeren werden Ålandgraniet en porfier verzameld; de Markelo'sche keileem leverde alle drie soorten op; ook van de Maarn is een twijfelachtige vondst.

Elfdalensche porfier vertoonde een dergelijke verspreiding, kwam echter zeldzamer voor.

Diabaas en basalt bleken slechts verzameld te zijn van plaatsen zuidelijker dan Oldenzaal; of dit toeval is, dan wel dat deze gesteenten allen van zuidelijken oorsprong zijn, moet uit nader onderzoek blijken.

Scolitheszandsteen werd behalve op twee plaatsen bij Groenlo, waar overigens slechts een gering gehalte aan noordelijke zwervelingen was gevonden, ook nog bij Markelo verzameld.

De omstreken van Oldenzaal waren rijk aan roode vuursteenen.

Natuurlijk is dit overzicht voorloopig en kan eerst na eenige maanden in vollediger en samenhangender vorm gegeven worden.

Leiden, December 1890.

VERSLAG

OMTRENT DE VERHANDELING VAN DEN HEER

J. C. KLUYVER:

„OVER DE BUIGRAAKLIJNEN EENER RUIMTEKROMME VAN DEN VIERDEN GRAAD EN DE EERSTE SOORT."

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Januari 1891).

In het eerste stuk van het in bewerking zijnde achtste deel der *Verslagen en Mededeelingen* verscheen de verhandeling van den Heer KLUYVER, getiteld: »Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid", over welke wij in de vergadering van Juni 1890 een gunstig rapport mochten uitbrengen. Aan deze sluit zich de nieuwe verhandeling van denzelfden schrijver, die in de vorige maand in onze handen gesteld is, in menig opzicht aan. In beide worden bijdragen geleverd tot de kennis van de theorie van vier elkaar kruisende lijnen. Gold het in de vorige verhandeling vier willekeurige lijnen en vier raaklijnen eener ruimtekromme R^3, thans wordt de betrekking opgespoord tusschen vier buigraaklijnen eener ruimtekromme R^4_1 en het verband onderzocht tusschen de punten, waarin vier willekeurige lijnen door een kromme R_1^4 kunnen worden aangeraakt.

In de eerste der beide studies kon de Heer KLUYVER uitgaan van de door SCHUBERT en VOSS bewezen stelling, dat er tusschen de invarianten (gh), op de bekende wijs opgebouwd uit de lijncoördinaten van vier raaklijnen eener R^3

twee aan twee genomen, een identieke betrekking bestaat. tengevolge waarvan het vraagstuk een R^3 te construeeren. die vier gegeven lijnen aanraakt, òf onoplosbaar òf onbepaald is. In de nieuwe studie bewijst de schrijver — en hierbij is hij, bedriegen wij ons niet, geheel oorspronkelijk — met betrekking tot vier buigraaklijnen eener R_1^4 het overeenkomstige. Hoewel R_1^4 door zestien constanten bepaald is en men deze figuur dus schijnbaar viermaal de viervoudige voorwaarde opleggen kan een gegeven lijn tot buigraaklijn te hebben, blijkt er tusschen vier elkaar kruisende buigraaklijnen eener R_1^4 steeds een invariante betrekking te bestaan, zoodat ook het vraagstuk een R_1^4 te construeeren, die vier gegeven lijnen tot buigraaklijnen heeft, òf onoplosbaar òf onbepaald is.

Zoo als bekend is, liggen de zestien buigpunten eener R_1^4 vier aan vier in de zijvlakken van het gemeenschappelijk poolviervlak der door de kromme gaande oppervlakken F^2 en vindt men de bij de in een zijvlak gelegen buigpunten behoorende buigraaklijnen door deze punten met het overstaande hoekpunt van dit poolviervlak te verbinden. Hieruit volgt dan verder onmiddellijk, dat men alleen dan vier elkaar kruisende buigraaklijnen verkrijgt, als men de vier buigpunten gelijkelijk aan de vier zijvlakken van het poolviervlak ontleent. Dit kan 256-maal gebeuren en bij 64 van deze gevallen liggen de vier buigpunten in een vlak. Neemt men met den schrijver het bedoelde poolviervlak eener gegeven kromme R_1^4 tot coördinatenviervlak aan en drukt men de coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4 in een enkelen parameter u uit met behulp van elliptische functies, dan bestaat er tusschen de parameters u_1, u_2, u_3, u_4 van elk der bovengenoemde 64 viertallen de betrekking $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, terwijl elk der drie gevallen $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$, $u_3 + u_1 = u_2 + u_4$, $u_1 + u_2 = u_3 + u_4$ aan 64 der 192 overige gevallen beantwoordt. Van deze vier gevallen wordt het eerste, waarbij de vier buigpunten in een zelfde vlak liggen, het uitvoerigst door den schrijver onderzocht.

Stelt men de bij vier lijnen 1, 2, 3, 4 behoorende producten (23)(14), (31)(24), (12)(34) door a, b, c voor, dan

is $a + b + c = 0$ de voorwaarde, die uitdrukt, dat de vier lijnen buigraaklijnen zijn van een oneindig aantal krommen R_1^4 en de raakpunten van elk dezer krommen met de vier raaklijnen vier in een vlak gelegen buigpunten der kromme zijn. Zijn de lijnen 1, 2, 3 gegeven, dan vormen alle lijnen 4, die met deze gegeven lijnen aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ voldoen, derhalve een lineair complex, dat op eenvoudige wijs in verband blijkt te staan met de regelschaar (1, 2, 3). Voor dit complex worden de constructies van de bij een gegeven vlak behoorende pool en het bij een gegeven punt behoorend poolvlak ontwikkeld.

Vervolgens ontwikkelt de schrijver het begrip absolute invariant bij krommen R_1^4 en onderzoekt hij, of er een betrekking bestaat tusschen deze grootheid A en de absolute invarianten A' en A'' behoorende bij de beide bikwadratische vormen, die overeenkomen met de viertallen van snijpunten van vier elkaar kruisende buigraaklijnen met in een vlak gelegen raakpunten en de beide op deze lijnen rustende lijnen f', f''. Hierbij blijkt A aan het vierkant van $\frac{A'}{A' - 2}$ en van $\frac{A''}{A'' - 2}$ gelijk te zijn; waaruit volgt, dat de betrekking $\frac{A'}{A' - 2} + \frac{A''}{A' - 2} = 0$ met de voorwaarde $a + b + c = 0$ samenhangt [1]) en dat de invarianten A' en A'' bij de 64 verschillende viertallen van buigraaklijnen met coplanaire raakpunten dezelfde waarden hebben. Waarschijnlijk is ook dit laatste resultaat nieuw.

De invoering van den absoluten invariant A der kromme geeft den schrijver aanleiding de gevallen $A = 0$, $A = \infty$ en $A = 1$ afzonderlijk te onderzoeken. In het geval eener equianharmonische kromme ($A = 0$) raakt elke lijn 4, die met drie gegeven lijnen 1, 2, 3 vier buigraaklijnen vormen kan, de regelschaar (1, 2, 3) in een punt van een van twee

---

[1]) Door berekening gaat $\frac{A'}{A' - 2} + \frac{A}{A'' - 2} = 0$ werkelijk over in $s_1 (8 s_1^5 - 27 s_1^3 s_2 + 162 s_1 s_2^2 + 54 s_1^2 s_3 - 243 s_1 s_2 s_3) = 0$.

bepaalde beschrijvende lijnen aan en zijn de vier buigraaklijnen tevens raaklijnen aan een oneindig aantal krommen R^3. In het geval eener harmonische kromme ($A = \infty$) maakt elke lijn 4 deel uit van een van drie bepaalde congruenties (1, 1). En in het geval $A = 1$ heeft de kromme R^4_1 een dubbelpunt.

Alvorens tot de asymmetrische gevallen $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$, enz. over te gaan, gaat de schrijver na welk verband er bestaat tusschen de vier punten, waarin vier willekeurig gegeven lijnen t, die niet voldoen aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ en dus geen buigraaklijnen kunnen zijn, door een kromme R_1^4 kunnen worden aangeraakt, als deze vier raakpunten weer in een zelfde vlak gelegen moeten zijn. Hij komt dan tot het besluit, dat er vier nieuwe lijnen y te vinden zijn, die de eigenschap bezitten, dat elk vlak gaande door een dier lijnen y de vier gegeven lijnen t snijdt in vier »geassocieerde raakpunten," d. w. z. in vier punten, waar de lijnen t door een kromme R_1^4 kunnen worden aangeraakt. En de betrekking tusschen de vier lijnen t ter eene en de vier lijnen y ter andere zij is geheel involutorisch; m. a. w. elk vlak gaande door een der lijnen t snijdt de vier lijnen y in geassocieerde raakpunten, de lijnen y als raaklijnen beschouwd. Hieruit moet dan wel volgen — wat de schrijver niet opmerkt —, dat de vier lijnen y aan de betrekking $a + b + c = 0$ voldoen, als dit met de gegeven lijnen t het geval is. Zoo rangschikken de krommen R_1^4, die vier gegeven lijnen tot buigraaklijnen hebben, zich in vier groepen, die bij de verschillende lijnen y behooren, en is de meetkundige plaats der krommen van elke groep een oppervlak van den achtsten graad. Dit onderzoek, dat sommige punten der vorige verhandeling in een nieuw licht verschijnen doet, wordt besloten met de constructie van een kromme R_1^4, die vier willekeurig gegeven lijnen aanraakt, en die van een kromme R_1^4, die vier aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ voldoende lijnen tot buigraaklijnen heeft.

Ten slotte beschouwt de schrijver het asymmetrische geval $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$. Hier is $(-a + b + c)^4 = 64\, a^2 b\, c$

de voorwaarde, waaronder de vier lijnen buigraaklijnen eener R^4_1 zijn. We laten de door den schrijver gegeven meetkundige verklaring van deze stelkundige uitkomst achterwege.

Bij de invoering van elliptische functies heeft de Heer KLUYVER het uitstekende werk van HALPHEN, dat wegens den vroegtijdigen dood van den genialen schrijver helaas niet is voltooid, tot leiddraad genomen. Derhalve bedient hij zich — en hij doet dit met talent — van de door WEIERSTRASS ingevoerde functie $p\,u$. Zoowel om de belangrijkheid der uitkomsten als om de wijs, waarop ze zijn afgeleid, komt den Heer KLUYVER een woord van grooten lof toe. Zonder eenige aarzeling stellen wij U voor zijn arbeid in de verslagen en mededeelingen te doen opnemen.

Amsterdam, Januari 1891.

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

OVER DE

BUIGRAAKLIJNEN EENER RUIMTEKROMME

VAN DEN

VIERDEN GRAAD EN DE EERSTE SOORT.

DOOR

J. C. KLUYVER,

Leeraar aan de H. B. S. te Breda.

De doorsnede van twee oppervlakken van den tweeden graad, de ruimtekromme R^4 van den vierden graad en de eerste soort, bezit zooals bekend is 16 buigpunten *) B, wier merkwaardige ligging reeds dikwerf een punt van onderzoek uitmaakte.

De vraag doet zich voor, of ook de 16 buigraaklijnen t, in de punten B aan de kromme getrokken, door invariante betrekkingen onderling zijn verbonden.

Het is duidelijk, dat dit tot op zekere hoogte het geval is. Immers door de kromme R^4 gaan vier kegels van den tweeden graad, wier toppen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 de hoekpunten zijn van het poolviervlak der kromme. Elk zijvlak van dezen tetraeder snijdt R^4 in vier punten B, welker raaklijnen t door het overstaande hoekpunt Q gaan.

De 16 buigraaklijnen laten zich dus onmiddellijk in vier groepen van vier splitsen. De lijnen t van iedere groep

*) Onder „buigpunt" verstaan wij hier een punt van R^4, waar het osculatievlak stationair is.

snijden elkaar in een kegeltop Q. Kiest men evenwel uit iedere groep eene lijn t, dan blijft het voorloopig nog onbeslist, of deze vier elkaar kruisende lijnen geheel onderling onafhankelijk zijn.

Men zou geneigd zijn die vraag bevestigend te beantwoorden. Want eene kromme R^4 is eene figuur van 16 constanten, en daaraan zou men viermaal de viervoudige voorwaarde kunnen opleggen, die verlangt, dat de kromme eene gegeven lijn tot buigraaklijn heeft.

Deze zienswijze echter is onjuist; in de volgende bladzijden zal worden aangetoond, dat tusschen vier elkaar kruisende buigraaklijnen t, onverschillig of de buigpunten B al of niet in één vlak liggen, steeds ééne invariante betrekking bestaat, zoodat vier willekeurig aangenomen lijnen òf voor geene enkele kromme, òf voor eene enkelvoudig oneindige hoeveelheid van krommen R^4 als buigraaklijnen t mogen worden beschouwd.

Inzonderheid zullen wij meer uitvoerig het geval nagaan, waarbij door de vier punten B een vlak gelegd kan worden, en dan uit vier gegeven buigraaklijnen t de bijbehoorende krommen construeeren.

---

1. *De invariant van twee raaklijnen van R^4.* Wanneer $x_1, \ldots x_4$ en $y_1, \ldots y_4$ de homogene coördinaten van twee gegeven punten voorstellen, noemen wij in navolging van Salmon de determinanten

$$p = (x_2\, y_3), \qquad q = (x_3\, y_1), \qquad r = (x_1\, y_2),$$
$$s = (x_1\, y_4), \qquad t = (x_2\, y_4), \qquad u = (x_3\, y_4)$$

de homogene coördinaten der verbindingslijn, waartusschen de identieke betrekking

$$p\,s + q\,t + r\,u = 0$$

bestaat. Twee lijnen g en h met de coördinaten $p_g, \ldots$ en $p_h, \ldots$ bezitten den gemeenschappelijken invariant

$$(g\,h) = p_g\, s_h + p_h\, s_g + q_g\, t_h + q_h\, t_g + r_g\, u_h + r_h\, u_g,$$

welke nul wordt, wanneer g en h elkander snijden,

Wij hebben eene uitdrukking voor dezen invariant te zoeken voor het geval, dat g en h raaklijnen zijn van R^4. De theorie der elliptische functies doet daartoe een middel aan de hand. Wel is waar zou men misschien de toepassing dezer theorie kunnen ontgaan, maar met het oog op de onderscheiding der verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen, is het hier niet ondoelmatig om van het aangeboden hulpmiddel gebruik te maken. Daar het onverschillig is van welke functie men zich bedient, kunnen wij hier de functie pu van WEIERSTRASS nemen, bepaald door de vergelijking

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \int_{pu}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}.$$

De functie pu bezit evenals hare afgeleiden twee perioden 2ω en $2\omega'$. Voor de halve perioden is

$$p\,\omega = e_1, \quad p\,(\omega + \omega') = e_2, \quad p\,\omega' = e_3.$$

Voor de theorie dezer functie moge verwezen worden naar HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I, II, aan welk werk alle hier voorkomende formules zijn ontleend.

Voor de coördinaten $x_1, \ldots x_4$ van een punt van R^4 mogen wij aannemen

$$\frac{x_1}{p''u} = \frac{x_2}{p'u} = \frac{x_3}{pu} = \frac{x_4}{1}.$$

Aan ieder punt is daardoor ééne waarde van het argument u toegevoegd. De kromme zelve wordt dientengevolge beschouwd als de doorsnede der oppervlakken

$$x_1 x_4 = 6x_3^2 - \frac{1}{2} g_2 x_3 x_4, \quad x_2^2 = \frac{2}{3} x_3 (x_1 - g_2 x_4) - g_3 x_4^2 \ ^{*)}.$$

Gemakkelijk kunnen wij nu de coördinaten van eene raaklijn g in het argument u uitdrukken. Wij denken ons

*) HALPHEN, II, blz. 450, „Biquadratique gauche".

slechts de lijn g als de verbindingslijn van twee punten met de argumenten u en $u + du$. Zoo komen wij tot het besluit, dat de determinanten der matrix

$$\begin{vmatrix} p''u & p'u & pu & 1 \\ p'''u & p''u & p'u & 0 \end{vmatrix}$$

als de coördinaten der raaklijn g mogen worden aangemerkt.

Eene dergelijke voorstelling verkrijgt men voor de lijn h, die R^4 raakt in een punt, behoorende bij het argument v, en daaruit volgt voor den invariant $(g\,h)$

$$(g\,h) = \begin{vmatrix} p''u & p'u & pu & 1 \\ p'''u & p''u & p'u & 0 \\ p''v & p'v & pv & 1 \\ p''v & p''v & p'v & 0 \end{vmatrix}.$$

Het rechter lid dezer vergelijking ondergaat belangrijke vervormingen, wanneer wij de σ-functie invoeren *).

De toepassing van formule (18), HALPHEN, I, blz. 220 levert

$$(g\,h) = -\,2!\,3!\,\frac{\sigma(2u+2v)\,\sigma^4(u-v)}{\sigma^8 u\,\sigma^8 v}.$$

Wij maken nu gebruik van

$$p'u = -\,\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u}\ \dagger),$$

en verkrijgen

$$(g\,h) = +\,2!\,3!\,\frac{\sigma(2u+2v)\,\sigma(2u-2v)}{\sigma^8 u\,\sigma^8 v\,p'(u-v)},$$

welke vergelijking ten laatste door de aanwending van

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = -\,(pu - pv)\ \S),$$

*) HALPHEN, I, blz. 168.

†) Ibid., blz. 197, formule (52).

§) Ibid., blz. 171, formule (12).

overgaat in

$$(g\,h) = -\,2!\,3!\,\frac{\sigma^2\,2\,u\,\sigma^2\,2\,v}{\sigma^8 u\,\sigma^8 v} \times \frac{(p\,2\,u - p\,2\,v)}{p'\,(u-v)},$$

of in

$$(g\,h) = -\,2!\,3!\,p'^3 u\,p'^2 v \times \frac{(p\,2\,u - p\,2\,v)}{p'\,(u-v)} \ldots\ldots (A)$$

2. *De invarianten van vier buigraaklijnen van R^4.* Wanneer wij op R^4 vier punten met de argumenten $u_1, \ldots u_4$ aannemen, en aldaar de raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ trekken, bezitten deze laatste de zes onderlinge invarianten (23), (31), ... (34), welke wij met behulp der zooeven gevonden formule in de argumenten $u_1, \ldots u_4$ zouden kunnen uitdrukken. Zijn intusschen die invarianten door eene of andere vergelijking van elkaar afhankelijk, dan moet deze noodzakelijk homogeen zijn in de coördinaten van elk der vier lijnen, en derhalve alleen bevatten de drie grootheden

$$a = (23)\,(14), \qquad b = (31)\,(24), \qquad c = (12)\,(34),$$

voor welker verhouding wij thans vinden met behulp van de formule (A)

$$\frac{a}{\dfrac{(p\,2\,u_2 - p\,2\,u_3)\,(p\,2\,u_1 - p\,2\,u_4)}{p'\,(u_2-u_3)\,p'\,(u_1-u_4)}} = \frac{b}{\dfrac{(p\,2\,u_3 - p\,2\,u_1)\,(p\,2\,u_2 - p\,2\,u_4)}{p'\,(u_3-u_1)\,p'\,(u_2-u_4)}} =$$

$$= \frac{c}{\dfrac{(p\,2\,u_1 - p\,2\,u_2)\,(p\,2\,u_3 - p\,2\,u_4)}{p'\,(u_1-u_2)\,p'\,(u_3-u_4)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Dat geldt voor vier willekeurige raaklijnen; wij moeten dus nog in aanmerking nemen, dat wij met vier buigraaklijnen in de punten $B_1, \ldots B_4$ te doen hebben.

Liggen vier punten van R^4 in een plat vlak, dan is de som der bijbehoorende argumenten nul. De buigpunten B worden derhalve bepaald door de vergelijking *)

$$4\,u = 0.$$

*) Argumenten worden hier en in het vervolg gelijk genoemd, wanneer hun verschil nul is of een geheel aantal perioden bedraagt.

Deze vergelijking splitst zich onmiddelijk in vier andere, te weten in

$$u = \omega, \quad 2u = \omega + \omega', \quad 2u = \omega', \quad 2u = 0.$$

Ieder dezer laatste heeft vier oplossingen, die behooren bij een viertal buigpunten gelegen in een zijvlak van den tetraeder $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$. In het vervolg nemen wij aan, dat B_1, B_2, B_3, B_4 in volgorde gelegen zijn in de zijvlakken, $Q_2 Q_3 Q_4$, $Q_3 Q_1 Q_4$, $Q_1 Q_2 Q_4$, $Q_3 Q_2 Q_1$, en dat de argumenten u_1, u_2, u_3, u_4 voldoen aan de vergelijkingen

$$2u_1 = \omega. \quad 2u_2 = \omega + \omega', \quad 2u_3 = \omega', \quad 2u_4 = 0.$$

Deze waarden voor de dubbele argumenten kunnen reeds in de formule (B) worden ingevoerd. Wij hebben namelijk

$$p\omega = e_1, \; p(\omega + \omega') = e_2, \; p\omega = e_3, \; \mathrm{Lim}(pu)_{u=0} = \mathrm{Lim}\left(\frac{1}{u^2}\right)_{u=0}.$$

Wanneer wij bovendien stellen

$$e_2 - e_3 = \alpha^2, \quad e_3 - e_1 = \beta^2, \quad e_1 - e_2 = \gamma^2,$$

dan gaan de vergelijkingen (B) over in

$$\frac{\alpha^2}{a\,p'(u_2 - u_3)\,p'(u_1 - u_4)} = \frac{\beta^2}{b\,p'(u_3 - u_1)\,p'(u_2 - u_4)} =$$
$$= \frac{\gamma^2}{c\,p'(u_1 - u_2)\,p'(u_3 - u_4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

3. *Onderscheiding der verschillende gevallen.* Eer wij eene verdere herleiding dezer vergelijkingen beproeven, moeten wij de verschillende gevallen aangeven, die zich kunnen voordoen. Wij gaan daarbij uit van de onder alle omstandigheden geldige vergelijking

$$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 0,$$

die blijkbaar leert, dat R^4 in de punten $B_1, \ldots B_4$ door oppervlakken van den tweeden graad kan worden geraakt. Met andere woorden de vier buigpunten vertegenwoordigen

altijd een achttal »geassocieerde" punten, die de basispunten vormen van een net van oppervlakken van den tweeden graad.

Deeling door den factor 2 splitst de vergelijking in vier andere, waarvan slechts eene tegelijk kan worden bevredigd. Zoo geraken wij tot de onderscheiding der vier gevallen:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega & , \text{ of } u_2 + u_3 = u_1 + u_4, \\ \text{II)} & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega + \omega', & \text{of } u_3 + u_1 = u_2 + u_4. \\ \text{III)} & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega' & , \text{ of } u_1 + u_2 = u_3 + u_4, \\ \text{IV)} & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0. & \end{array}$$

In elk der gevallen is door de keuze van drie der buigpunten het vierde bepaald. In het laatste heerscht er volmaakte symmetrie, die in de drie eerste ontbreekt. De meetkundige beteekenis van de betrekkingen tusschen de argumenten is namelijk, dat in het geval I de lijnen $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$, in het geval II de lijnen $B_3 B_1$ en $B_2 B_4$, in het geval III de lijnen $B_1 B_2$ en $B_3 B_4$ beschrijvende lijnen zijn van dezelfde groep op een regelvlak van den tweeden graad, dat R^4 bevat. *)

In het symmetrische geval IV echter liggen de vier buigpunten in een vlak. Die onderstelling komt bij het verdere onderzoek der vier raaklijnen t het eerst in aanmerking.

4. *De invariante voorwaarde in het geval IV.*

Hier kunnen wij stellen

$$v_1 = u_2 - u_3, \qquad v_2 = u_3 - u_1, \qquad v_3 = u_1 - u_2,$$

waarbij

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

en vinden dan

$$2\,v_1 = \omega, \qquad 2\,v_2 = \omega + \omega', \qquad 2\,v_3 = \omega',$$

$$u_1 - u_4 = v_1 + \omega + \omega', \quad u_2 - u_4 = v_2 + \omega'; \quad u_3 - u_4 = v_3 + \omega.$$

De vergelijkingen (C) kunnen geschreven worden in de gedaante

---

*) Halphen, II, blz. 451.

$$\frac{\alpha^2}{a p' v_1 p'(v_1+\omega+\omega')} = \frac{\beta^2}{b p' v_2 p'(v_2+\omega')} = \frac{\gamma^2}{c p' v_3 p'(v_3+\omega)} \cdot \cdot \text{(D)}$$

De argumenten v_1, v_2, v_3, hoewel door de betrekking

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

verbonden, kunnen toch elk vier verschillende waarden verkrijgen. Zonder nu al die verschillende substituties te verrichten, toonen wij aan, dat de producten $p' v_1 p'(v_1 + w + w')$, enz. altijd eene zelfde waarde aannemen. Dat bewijs is voor alle drie bijna gelijkluidend, het is dus voldoende, alleen het eerste product te behandelen.

Uit

$$p(v_1 + \omega + \omega') = e_2 - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{p v_1 - e_2}, \text{*)}$$

volgt

$$p' v_1 p'(v_1 + \omega + \omega') = \alpha^2 \gamma^2 \frac{p'^2 v_1}{(p v_1 - e_2)^2},$$

waarvoor ingevolge de sommatie-formule der argumenten †) geschreven kan worden

$$\begin{aligned} p' v_1 p'(v_1+\omega+\omega') &= 4\alpha^2\gamma^2 \{p(v_1+\omega+\omega') + p v_1 + e_2\} = \\ &= 2\alpha^2\gamma^2 \{p v_1 + p(-v_1) + p(v_1+\omega+\omega') + \\ &\quad + p(-v+\omega+\omega') + 2 e_2\}. \end{aligned}$$

Nemen wij in aanmerking, dat $2 v_1 = \omega$, dan blijkt, dat binnen de accoladen gevonden wordt de som van de vier wortels der bikwadratische vergelijking, die uit de betrekking $p\, 2 v_1 = e_1$ wordt afgeleid. Daar men in het algemeen heeft §)

$$p\, 2 u = \frac{p^4 u + \frac{1}{2} g_2 p^2 u + 2 g_3 p u + \frac{1}{16} g_2^2}{4 p^3 u - g_2 p u - g_3},$$

---

*) Halphen, I, blz. 37, formule (8*b*).

†) Ibid., blz. 29, formule (24).

§) Ibid., blz. 95, formule (6).

is $p\,v_1$ bepaald door de vergelijking

$$p^4 v_1 - 4\,e_1 p^3 v_1 + \ldots\ldots = 0,$$

en deze doet zien, dat

$$p\,v_1 + p(-v_1) + p(v_1 + \omega + \omega') + p(-v_1 + \omega + \omega') = 4\,e_1.$$

Derhalve verkrijgt het beschouwde product $p'v_1 p'(v_1 + w + w')$ altijd de waarde

$$2\,\alpha^2 \gamma^2 (4\,e_1 + 2\,e_3) = -4\,\alpha^2 \gamma^2 (e_3 - e_1) = -4\,\alpha^2 \beta^2 \gamma^2,$$

onverschillig welke der vier waarden van v_1 men in dat product substitueert.

Deze redeneering is voor de beide andere producten, die in de vergelijking (D) voorkomen, te herhalen. Men zal steeds $-4\,\alpha^2 \beta^2 \gamma^2$ als eindwaarde vinden, zoodat wij ten laatste geraken tot de zeer eenvoudige betrekking

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{\beta^2}{b} = \frac{\gamma^2}{c}.$$

Omdat echter

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

heeft men ook

$$s_1 = a + b + c = 0,$$

en daarmede is eindelijk het verband tusschen de vier buigraaklijnen t opgespoord.

Die uitkomst geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen. In de eerste plaats kan er op worden gewezen, dat wanneer men alleen de afleiding der vergelijking $s_1 = 0$ beoogt, het doel ook bereikt kan worden door de kromme R^4 te beschouwen als de doorsnede der oppervlakken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$a\,x_1^2 + b\,x_2^2 + c\,x_3^2 + d\,x_4^2 = 0.$$

In dat geval toch zijn de coördinaten der buigpunten, en dientengevolge ook die der buigraaklijnen onmiddellijk bekend.

En in de tweede plaats heeft men er aan te denken, dat ook een viertal gewone raaklijnen van R^4 de voorwaarde

$s_1 = 0$ bevredigen kan. Zijn zelfs van een viertal raaklijnen, die aan $s_1 = 0$ voldoen, twee buigraaklijnen, dan mag nog niet worden besloten, dat de twee andere ook buigraaklijnen zijn. Want indien men met behulp der vergelijkingen (B) den invariant s_1 uitdrukt in de argumenten en dezen dan gelijk nul stelt, vindt men, wanneer

$$u_4 = 0, \qquad u_3 = \frac{\omega'}{2}, \qquad u_2 = -u_1 - \frac{\omega'}{2}$$

wordt genomen, niet noodzakelijk $2u_1 = \omega$ of $2u_1 = \omega + \omega'$.

5. *Meetkundige beteekenis der vergelijking* $s_1 = 0$. Het is niet bezwaarlijk de betrekking $s_1 = 0$ meetkundig te verklaren. Beschouwen wij de drie lijnen t_1, t_2, t_3 als gegeven, dan vormen alle lijnen t_4, welke voldoen aan $s_1 = 0$ een lineair complex, dat gemakkelijk wordt geconstrueerd. Wij behoeven slechts na te gaan, op welke wijze de lijn t_4 de regelschaar $(t_1\ t_2\ s_3)$ moet snijden.

Daartoe is het dienstig de coördinaten van eene veranderlijke lijn t dezer regelschaar als kwadratische functies van een parameter μ te beschouwen.

Blijkbaar mag voor de veranderlijke lijn worden aangenomen

$$p = R_1\,(23)\,p_1 + R_2\,(31)\,p_2 + R_3\,(12)\,p_3\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u = R_1\,(23)\,u_1 + R_2\,(31)\,u_2 + R_3\,(12)\,u_3\,,$$

mits de veranderlijke coëfficienten R_1, R_2, R_3 voldoen aan de uit

$$ps + qt + ru = 0$$

volgende betrekking

$$R_2\,R_3 + R_3\,R_1 + R_1\,R_2 = 0.$$

Beteekent ε een imaginairen derdemachtswortel der eenheid, dan mogen wij aannemen, wanneer μ een veranderlijken parameter voorstelt,

$$R_1 = (\mu-\varepsilon)(\mu-\varepsilon^2), \quad R_2 = \varepsilon^2(\mu-\varepsilon^2)(\mu-1), \quad R_3 = \varepsilon(\mu-1)(\mu-\varepsilon).$$

Op deze wijze behoort bij iedere lijn t ééne waarde van μ, aan t_1, t_2, t_3 zijn de waarden 1, ε, ε^2 toegevoegd. De

lijn t_4 snijdt twee lijnen t, waarvoor de parameterwaarden bepaald zijn door de vergelijking

$$(tt_4) = 0 = aR_1 + bR_2 + cR_3,$$

of

$$0 = \mu^2 (a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c) + \mu s_1 + (a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c) \ldots . (E)$$

De drie lijnen t_1, t_2, t_3 bepalen een binairen kubischen vorm, wiens covariant van HESSE door twee andere lijnen der regelschaar Δ', Δ'' wordt voorgesteld, aan welke lijnen hier blijkbaar de parameterwaarden 0 en ∞ toekomen.

Houdt men dit in het oog, dan is het duidelijk, hoe de lijnen t_4, die voldoen aan $s_1 = 0$, de regelschaar ontmoeten op beschrijvende lijnen, welke harmonisch gescheiden zijn door Δ' en Δ''. Die invariante eigenschap is voldoende om het complex $s_1 = 0$ te construeeren, wanneer men van de lijnen Δ', Δ'' gebruik wil maken. Deze laatste evenwel zijn onbestaanbaar, wanneer t_1, t_2, t_3 bestaanbaar zijn, daarom verdient eene andere constructie, elders medegedeeld *), de voorkeur.

Om het nulpunt van een gegeven vlak V te vinden, zoeken wij de snijpunten A, B, C met t_1, t_2, t_3 en de doorsnede K^2 met de regelschaar. Wij verbinden elk hoekpunt van driehoek $A\,B\,C$ met het snijpunt der raaklijnen in de beide andere hoekpunten aan K^2 getrokken. Het onderlinge snijpunt dezer drie verbindingslijnen is het nulpunt van V. Om het nulvlak van een gegeven punt te vinden, wordt die constructie dualistisch omgezet.

6. *Absolute invarianten van vier elkaar kruisende lijnen.*

Vier elkaar kruisende lijnen $t_1, \ldots t_4$ bezitten in het algemeen twee gemeenschappelijke snijlijnen f' en f''. De vier snijpunten op zulk eene snijlijn bepalen een binairen bikwadratischen vorm, die een absoluten invariant A heeft. Voor het geval, dat $t_1, \ldots t_4$ buigraaklijnen zijn van R^4, bestaat er een merkwaardig verband tusschen de invarianten A' en A'' en den absoluten invariant $\mathbf{A}$ der kromme.

Om dit aan te toonen is het noodzakelijk uit de coördinaten van de vier lijnen de grootheden A' en A'' te berekenen.

---

*) *Wiskundige Opgaven*, Deel V, vraagstuk XI.

De lijn t_4 snijdt de regelschaar $(t_1\ t_2\ t_3)$ in twee beschrijvende lijnen t, wier parameters μ' en μ'' volgen uit de vergelijking (E) van het vorige artikel. De invarianten A' en A'' behooren derhalve bij twee bikwadratische vormen met de nulpunten $1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \mu'$ en $1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \mu''$.

Wij berekenen dus voor den vorm

$$x^4 - \mu x^3 - x + \mu$$

de invarianten van SALMON en vinden

$$S = \frac{3}{4}\mu, \qquad T = -\frac{1}{16}(1 + \mu^3).$$

Als absoluten invariant A beschouwen wij het getal, dat nul wordt bij equianharmonische, oneindig wordt bij harmonische ligging der nulpunten, terwijl het de waarde $+1$ verkrijgt, wanneer twee nulpunten samenvallen.

Wij hebben alzoo

$$A = \frac{S^3}{27\,T^2} = \frac{4\,\mu^3}{(1 + \mu^3)^2};$$

stellen wij

$$M = \sqrt{1-A},$$

dan komt er

$$\mu^2(1 + M) - (1 - M) = 0.$$

Uit deze vergelijking en uit de vergelijking (E) elimineeren wij μ, in de resultante vervangen wij M^2 weder door $(1-A)$, nemen

$$bc + ca + ab = s_2, \qquad abc = s_3,$$

en verkrijgen

$$(1-A)^2(4s_1^3 - 18s_1s_2 + 27s_3)^2 -$$
$$-54(1-A)(27s_3^2 + 8s_2^3 - 18s_1s_2s_3 + 4s_1^3s_3 - 2s_1^2s_2^2) + 729s_3^2 = 0,$$

eene kwadratische vergelijking in A met de wortels A' en A''.

7. *Het verband tusschen de invarianten A', A'' en A.* Voor vier buigraaklijnen $t_1, \ldots t_4$ van R^4, die de voorwaarde

$s_1 = 0$ bevredigen, gaat de zooeven afgeleide vergelijking over in

$$(1-A)^2 - 2(1-A)\left(1 + \frac{8\,s_2^3}{27\,s_3^2}\right) + 1 = 0 \;.\;.\;.\;.\; (F)$$

Wij kunnen nu de invarianten g_2 en g_3 der gebruikte elliptische functies uitdrukken in s_2 en s_3.

In art. 4 werd gevonden

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{\beta^2}{b} = \frac{\gamma^2}{s},$$

of wat op hetzelfde neerkomt

$$\frac{e_2 - e_3}{a} = \frac{e_3 - e_1}{b} = \frac{e_1 - e_2}{c}.$$

In verband met $s_1 = 0$ volgt hieruit

$$e_1 = \varrho\,(b - c),$$
$$e_2 = \varrho\,(c - a),$$
$$e_3 = \varrho\,(a - b),$$

en verder *)

$$g_2^3 - 27\,g_3^2 = 16\,(e_2 - e_3)^2\,(e_3 - e_1)^2\,(e_1 - e_2)^2 = 16.729\,\varrho^6\,s_3^2,$$
$$g_2 = 2\,(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -12\,\varrho^2 s_2.$$

Als absoluten invariant $\mathbf{A}$ nemen wij nu het getal $\frac{g_2^3}{27 g_3^2}$; voor de equianharmonische kromme R^4 is het nul, voor de harmonische is het oneindig; het verkrijgt de waarde $+1$, wanneer de kromme een werkelijk dubbelpunt bezit.

Uit de voorafgaande berekening blijkt, dat

$$\frac{g_2^2}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} - 1} = -\frac{4\,s_2^3}{27\,s_3^2},$$

en de vergelijking (F) gaat na eenige herleiding over in

*) Halphen, I, blz. 25.

$$A^2 - \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} A + \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} = 0,$$

zoodat

$$A' A'' = \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} = A' + A'',$$

of

$$\mathbf{A} = \left(\frac{A'}{A'-2}\right)^2 = \left(\frac{A''}{A''-2}\right)^2.$$

Zooals bekend is *) zijn er 64 vlakken, die uit elk zijvlak van het poolviervlak van R^4 een buigpunt bevatten. Er zijn derhalve 64 viertallen van buigraaklijnen $t_1, \ldots t_4$. Uit bovenstaande vergelijking volgt nu, dat voor alle viertallen de absolute invarianten A' en A'' dezelfde waarden bezitten, zoodat twee viertallen door collineaire transformatie in elkaar kunnen overgaan.

8. *Bespreking der bijzondere gevallen.* De zoo eenvoudige betrekking tusschen de invarianten leert in de eerste plaats, dat alle krommen R^4, die vier gegeven buigraaklijnen bezitten, denzelfden invariant $\mathbf{A}$ hebben, ten tweede blijkt, dat de kennis van de ligging der vier snijpunten op eene der beide gemeenschappelijke transversalen f' en f'' reeds voldoende is om het karakter der kromme te bepalen.

In het bijzonder gaan wij de gevallen $\mathbf{A} = 0$ en $\mathbf{A} = \infty$ na, die zich bij de equianharmonische en de harmonische kromme voordoen.

De onderstelling $\mathbf{A} = 0$ vereischt tegelijk $A' = 0$ en $A'' = 0$, wat volgens (F) met zich brengt $s_2 = 0$.

Alleen de lijnen dus, die voldoen zoowel aan $s_1 = 0$ als aan $s_2 = 0$, kunnen buigraaklijnen $t_1, \ldots t_4$ zijn van eene equianharmonische kromme. Beschouwen wij weder de lijnen t_1, t_2, t_3 als gegeven, dan ligt t_4 in de complexen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Het laatste is een kwadratisch complex van 12 constanten, hetwelk in de klassificatie van WEILER †) door het teeken [1(11)(111)] wordt voorgesteld.

---

*) SCHRÖTER, *Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species*, blz. 90.

†) „Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades etc." *Zeitschrift für Math. u. Physik*, XXVII, blz. 264.

Uit de vergelijking (E) volgt, voor $s_2 = 0$,

$$\frac{\mu'}{\mu''} = \varepsilon;$$

de lijn t_4 snijdt derhalve de regelschaar $(t_1\, t_2\, t_3)$ in twee lijnen t' en t'', waarvoor geldt de betrekking

$$t_1\, t_2\, t_3\, t' \barwedge t_3\, t_1\, t_2\, t''.$$

Daardoor is het complex voldoende gekenmerkt; overigens heb ik eene constructie reeds elders vermeld. *)

Wij hebben hier echter te maken met de lijnen der congruentie $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, die ook voldoen aan $s_1^2 - 4\, s_2 = 0$. Daaruit blijkt genoegzaam, dat de lijn t_4 de regelschaar $(t_1\; t_2\; t_3)$ raakt, en dat het raakpunt steeds ligt op eene der lijnen $\angle'$ of Δ''. Terloops brengen wij in herinnering, dat ook de voorwaarde

$$(s_1^2 - 4\, s_2)^2 - 128\, s_1\, s_3 = 0$$

bevredigd is, en wij besluiten: Bij de equianharmonische R^4 zijn de buigraaklijnen $t_1, \ldots t_4$ zoodanig gelegen, dat de hyperboloïde, door drie der lijnen bepaald, door de vierde wordt geraakt, en dat de vier lijnen gezamenlijk raaklijnen zijn van een oneindig aantal ruimtekrommen van den derden graad.

Wij vervolgen met het onderzoek der harmonische kromme.

Uit $\mathbf{A} = \infty$ leiden wij af $A' = 2$, $A'' = 2$. De beide transversalen f' en f'', die in het vorige geval samenvielen, blijven thans verschillend, hoewel de invarianten gelijk zijn.

In verband met (F) komt er

$$27\, s_3^2 + 4\, s_2^3 = 0,$$

of

$$(b-c)^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2 = 0.$$

De lijn t_4 ligt in een der drie complexen

---

*) *Wiskundige Opgaven*, Deel V, vraagstuk X.

$$b-c=0, \qquad c-a=0, \qquad a-b=0.$$

De beteekenis van deze vergelijkingen kan men weder met behulp der vergelijking (E) opsporen. Nemen wij bijv. daarin $b=c$, dan komt er

$$\mu^2(a-b)+s_1\mu+(a-b)=0,$$

waaruit volgt

$$\mu'\mu''=1,$$

d. i. de lijn t_4 snijdt de regelschaar $(t_1\,t_2\,t_3)$ op twee lijnen t' en t'', die behooren tot de involutie $(t_1\,t_1\,;\,t_2\,t_3)$.

Het nulpunt van een gegeven vlak wordt verkregen door ten eerste de snijpunten A, B, C van t_1, t_2, t_3 met het vlak te zoeken, en in het punt A eene raaklijn te trekken aan de doorsnede van het vlak met de regelschaar $(t_1\,t_2\,t_3)$. Het snijpunt van die raaklijn met de lijn $B\,C$ is het gezochte nulpunt.

Op dergelijke wijze wordt het nulvlak van een gegeven punt gevonden, zoodat de constructie van de congruentie $s_1=0$, $b-c=0$ verder geen bezwaar oplevert.

Vermeld verdient te worden de eigenschap, die aan de drie complexen gemeen is. Is namelijk aan eene der drie vergelijkingen voldaan, dan kan men altijd tetraeders construeeren, die op ieder der vier lijnen t_1, t_2, t_3, t_4 een hoekpunt hebben, en die door elk dezer lijnen een zijvlak laten gaan. Daarbij is er op zulk een viervlak ééne ribbe, welke de lijnen t_2 en t_3, of wel t_3 en t_1, of eindelijk t_1 en t_2 kruist, al naargelang men heeft $b-c=0$, $c-a=0$, of $a-b=0$.

Het geval $\mathbf{A}=1$, waarbij R^4 een werkelijk dubbelpunt heeft, kan buiten verdere bespreking blijven. De vergelijkingen leveren in dit geval $A'=1$, $A''=\infty$. Twee der lijnen bijv. t_1 en t_2 zouden elkaar moeten snijden, en op eene der gemeenschappelijke transversalen zou men vier harmonische punten moeten aantreffen. Dat is op zichzelf duidelijk. Twee kegeltoppen Q_1 en Q_2 zijn in het dubbelpunt samengevallen, en de dubbelpuntsraaklijnen t_1 en t_2 scheiden harmonisch de beide andere kegeltoppen Q_3 en Q_4, in welke punten twee aan twee de vier nog aanwezige buigraaklijnen

samenkomen. Inderdaad zal men dus op de gemeenschappelijke transversaal $Q_3\ Q_4$ een viertal harmonische punten vinden.

9. *Raaklijnen van R^4, wier raakpunten in een vlak zijn gelegen.* Wij zouden er thans toe willen overgaan om de krommen R^4 te construeeren, die vier gegeven lijnen $t_1, \ldots t_4$ tot buigraaklijnen hebben, wanneer wij niet onmiddellijk op een eigenaardig bezwaar stuitten.

Het ligt namelijk voor de hand om op de eerste raaklijn t_1 het raakpunt B_1 willekeurig aan te nemen, maar dan ondervindt men spoedig, dat, zoo de vier raakpunten in een vlak moeten komen, de drie punten B_2, B_3, B_4 reeds geheel bepaald zijn. Bracht men door B_1 een willekeurig vlak, dat drie andere lijnen in B_2, B_3, B_4 ontmoette, dan zouden alle oppervlakken van den tweeden graad, die in $B_1, \ldots B_4$ de lijnen raken, geene ruimtekromme maar eene tweemaal te tellen kegelsnee $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ gemeen hebben.

Het is derhalve de vraag door B_1 het vlak zoo aan te brengen, dat de vier raakpunten eene groep van geassocieerde punten vormen. Wij willen daarbij van vier geassocieerde raakpunten spreken.

Om daartoe te geraken gaan wij weder uit van vier in een vlak gelegen punten B van R_4 en sporen op, hoe dit vlak met de vier raaklijnen samenhangt, en dat geschiedt hier het gemakkelijkst door de invariante betrekkingen te zoeken, die er noodzakelijk moeten bestaan tusschen de vier raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ en de zes verbindingslijnen der raakpunten $B_2\ B_3$, $B_3\ B_1, \ldots B_3\ B_4$, die wij in volgorde a, b, c, a_1, b_1, c_1 zullen noemen.

Gebruik makende van de parametervoorstelling, in art. 1 besproken, hebben wij voor eene dezer lijnen, bijv. a_1

$$(2\,a_1) = \begin{vmatrix} p''u_2 & p'u_2 & pu_2 & 1 \\ p'''u_2 & p''u_2 & p'u_2 & 0 \\ p''u_1 & p'u_1 & pu_1 & 1 \\ p''u_4 & p'u_4 & pu_4 & 1 \end{vmatrix},$$

wat na aanwending van formule (18), HALPHEN, I, blz. 220 geeft, wanneer wij in aanmerking nemen, dat $u_1+u_2+u_3+u_4=0$,

$$(2a_1) = +2!\,3!\,\frac{\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma^2(u_1-u_2)\,\sigma^2(u_3-u_4)}{\sigma^4 u_1\,\sigma^4 u_4\,\sigma^8 u_2}.$$

Evenzoo is

$$(3a_1) = +2!\,3!\,\frac{\sigma(u_3-u_2)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma^2(u_3-u_1)\,\sigma^2(u_3-u_4)}{\sigma^4 u_1\,\sigma^4 u_4\,\sigma^8 u_3},$$

waaruit volgt

$$\left[\frac{(3a_1)}{(2a_1)}\right]^2 = \frac{\sigma^4(u_3-u_1)\,\sigma^4(u_3-u_4)\,\sigma^{16}u_2}{\sigma^4(u_1-u_2)\,\sigma^4(u_2-u_4)\,\sigma^{16}u_3}.$$

In art. 1 werd evenwel gevonden

$$(12) = -2!\,3!\,\frac{\sigma(2u_1+2u_2)\,\sigma^4(u_1-u_2)}{\sigma^8 u_1\,\sigma^8 u_2}, \text{ enz.},$$

waaruit wij afleiden

$$\frac{(31)(23)(34)}{(12)(23)(24)} = \frac{(31)(34)}{(12)(24)} = \frac{\sigma^4(u_3-u_1)\,\sigma^4(u_3-u_4)\,\sigma^{16}u_2}{\sigma^4(u_1-u_2)\,\sigma^4(u_2-u_4)\,\sigma^{16}u_3} = \left[\frac{(3a_1)}{(2a_1)}\right]^2.$$

Stellen wij eindelijk

$$P_1 = \sqrt{(12)(31)(14)}, \qquad P_2 = \sqrt{(12)(23)(24)},$$
$$P_3 = \sqrt{(31)(23)(34)}, \qquad P_4 = \sqrt{(14)(24)(34)},$$

dan komen wij aangaande de lijnen $a, b, \ldots c_1$ tot de gevolgtrekking, dat zij de onderstaande vergelijkingen bevredigen,

$$K_{\pm a} \equiv (1a) \pm \frac{P_1}{P_4}(4a) = 0, \qquad K_{\pm b} \equiv (2b) \pm \frac{P_2}{P_4}(4b) = 0,$$

$$K_{\pm c} \equiv (3c) \pm \frac{P_3}{P_4}(4c) = 0,$$

$$K_{\pm a_1} \equiv (2a_1) \pm \frac{P_2}{P_3}(3a_1) = 0, \quad K_{\pm b_1} \equiv (3b_1) \pm \frac{P_3}{P_1}(1b_1) = 0,$$

$$K_{\pm c_1} \equiv (1c_1) \pm \frac{P_1}{P_2}(2c_1) = 0.$$

Tegelijk volgt nog uit onze formules, dat voor drie in één punt B samenkomende lijnen, bijv. a_1, b_1, c_1, geldt

$$\frac{(2a_1)}{(3a_1)} \times \frac{(3b_1)}{(1b_1)} \times \frac{(1c_1)}{(2c_1)} = -1. \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

En daarmede zijn de zes lijnen $a, b, \ldots c_1$ bepaald, elk van hen snijdt toch steeds twee der raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ en ligt verder in een van de bovenstaande complexen K, waarvan ik elders *) eenige eigenschappen onderzocht.

10. *De hyperboloïden* $H_{\pm a}$, $H_{\pm b}, \ldots H_{\pm c_1}$. Zoolang wij het raakpunt B_1 nog onbepaald laten, kan ieder der zes lijnen twee hyperboloïden beschrijven; de lijn a bijv. rust op t_2 en t_3 en moet liggen in een der beide complexen $K_{\pm a} = 0$. Wij noemen de beide hyperboloïden, die de lijn a kan doorloopen $H_{\pm a}$. Zoo worden zes paar van die oppervlakken gevonden, waartusschen merkwaardige betrekkingen bestaan. In de eerste plaats is het duidelijk, dat de gemeenschappelijke transversalen f' en f'' der vier raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ beschrijvende lijnen zijn van alle twaalf hyperboloïden H. Dat brengt mede, dat ieder tweetal dier oppervlakken ook een paar gemeenschappelijke richtlijnen heeft, die dan noodzakelijk weder op f' en f'' rusten.

Wij zullen nu aantoonen, dat men op vier verschillende wijzen, uit elk der zes paar H's een oppervlak kiezende, een zestal regelvlakken kan verkrijgen met eene gemeenschappelijke richtlijn y.

Daartoe onderzoeken wij eerst de hyperboloïden H_{-a} en H_{-b}, die reeds de richtlijn t_3 gemeen hebben.

Voor de coördinaten van de lijn y mogen wij blijkbaar stellen

$$p_y = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_y = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4,$$

waarbij de nog onbekende coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ moeten voldoen aan de voorwaarde

---

*) „Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid," *Verslagen en Mededeelingen*, 3de Reeks, Deel VIII.

$$A_2\,A_3\,(23) + A_3\,A_1\,(31) + \ldots\,(A_3\,A_4)\,(34) = 0.$$

Uit

$$(2a) = 0, \quad (3a) = 0, \quad \frac{(1a)}{P_1} = \frac{(4a)}{P_4},$$
$$(3b) = 0, \quad (1b) = 0, \quad \frac{(2b)}{P_2} = \frac{(4b)}{P_4},$$

verkrijgen wij

$$(ya) = 0 = A_1\,P_1 + A_4\,P_4,$$
$$(yb) = 0 = A_2\,P_2 + A_4\,P_4.$$

Dientengevolge nemen wij

$$A_1 = \frac{1}{P_1}, \quad A_2 = \frac{1}{P_2}, \quad A_4 = -\frac{1}{P_4},$$

terwijl wij ter bepaling van A_3 de vergelijking vinden

$$A_3\left[\frac{(31)}{P_1} + \frac{(23)}{P_2} - \frac{(34)}{P}\right] + \left[-\frac{(24)}{P_2P_4} - \frac{(14)}{P_1P_4} + \frac{(12)}{P_1P_2}\right] = 0.$$

Omdat nu

$$\frac{(24)}{P_2\,P_4} = \frac{(31)}{P_3\,P_1}, \quad \frac{(14)}{P_1\,P_4} = \frac{(23)}{P_2\,P_3}, \quad \frac{(12)}{P_1\,P_2} = \frac{(34)}{P_3\,P_4},$$

vinden wij

$$A_3 = \frac{1}{P_3},$$

en de gemeenschappelijke richtlijn y is voorgesteld door zes vergelijkingen van den vorm

$$p_y = \frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} - \frac{p_4}{P_4}.$$

Maar nu overtuigt men zich spoedig, dat de lijn y ook

richtlijn is van H_{-c}, H_{+a_1}, H_{+b_1}, H_{+c_1}, en op deze wijze kan men door verwisseling van letters vier lijnen y_1, y_2, y_3, y_4 vinden, wier ligging met behulp van onderstaande tabel is duidelijk gemaakt. Daarbij maken wij tusschen de vier lijnen y de volgende onderscheiding:

$$\left.\begin{aligned} p_{y_1} &= -\frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} + \frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_2} &= +\frac{p_1}{P_1} - \frac{p_2}{F_2} + \frac{p_3}{P_3} + \frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_3} &= +\frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} - \frac{p_3}{P_3} + \frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_4} &= +\frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} - \frac{p_4}{P_4}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (H)$$

de lijn:	is gemeenschappelijke richtlijn van:					
y_1	H_{-a}	H_{+b}	H_{+c}	H_{+a_1}	H_{-b_1}	H_{-c_1}
y_2	H_{+a}	H_{-b}	H_{+c}	H_{-a_1}	H_{+b_1}	H_{-c_1}
y_3	H_{+a}	H_{+b}	H_{-c}	H_{-a_1}	H_{-b_1}	H_{+c_1}
y_4	H_{-a}	H_{-b}	H_{-c}	H_{+a_1}	H_{+b_1}	H_{+c_1}

Brengen wij nu door eene dezer lijnen, bijv. y_4, een willekeurig vlak, dat de lijnen t_1. t_2, t_3, t_4 in de punten B_1, B_2, B_3, B_4 ontmoet, dan zullen de zes verbindingslijnen $B_2 B_3, \ldots B_3 B_4$ of wel a, b, c, a_1, b_1, c_1 in volgorde gelegen zijn in de complexen

$$K_{-a}, \quad K_{-b}, \quad K_{-c}, \quad K_{+a_1}, \quad K_{+b_1}, \quad K_{+c_1},$$

en de voorwaarden (G)

$$\frac{(2a_1)}{(3a_1)} \times \frac{(3b_1)}{(1b_1)} \times \frac{(1c_1)}{(2c_1)} = -1$$

zullen bevredigd zijn. Zulk een vlak bepaalt op t_1, t_2, t_3, t_4

vier punten, waar deze lijnen door een enkelvoudig oneindig aantal krommen R^4 kunnen worden geraakt.

Anders uitgedrukt, hebben wij de stelling bewezen: De omhullende der vlakken, die vier willekeurig gegeven lijnen in eene groep van vier geassocieerde raakpunten treffen, wordt door een tweede viertal rechte lijnen gevormd.

11. *Eigenschappen der lijnen y.* In het voorafgaande hebben wij thans reeds voldoende hulpmiddelen verkregen om de constructie van R^4 uit vier harer buigraaklijnen te ondernemen. Voor wij evenwel daarmede aanvangen, is het wenschelijk nog een paar belangrijke eigenschappen der lijnen y te vermelden, waarmede wij gedeeltelijk rekening hebben te houden.

Berekenen wij de onderlinge invarianten $(y_2\, y_3), \ldots (y_3\, y_4)$ dezer lijnen met behulp van de vergelijkingen (H), dan is de uitkomst

$$(y_2\, y_3) = \frac{4\,(23)}{P_2\, P_3},\ (y_3\, y_1) = \frac{4\,(31)}{P_3\, P_1},\ \ldots .(y_3\, y_4) = \frac{4\,(34)}{P_3\, P_4}.$$

Stellen wij

$$\begin{aligned} a' &= (y_2\, y_3)\,(y_1\, y_4), \\ b' &= (y_3\, y_1)\,(y_2\, y_4), \\ c' &= (y_1\, y_2)\,(y_3\, y_4), \end{aligned}$$

dan vinden wij voor deze grootheden

$$a' = \frac{16\,(23)\,(14)}{P_2\, P_3\, P_1\, P_4} = \frac{16\, a}{s_3}, \qquad b' = \frac{16\,(31)\,(24)}{P_3\, P_1\, P_2\, P_4} = \frac{16\, b}{s_3},$$

$$c' = \frac{16\,(12)\,(34)}{P_1\, P_2\, P_3\, P_4} = \frac{16\, c}{s_3}.$$

Derhalve alle invariante betrekkingen, waardoor de lijnen $t_1, \ldots t_4$ onderling zijn verbonden, bestaan tegelijk tusschen de lijnen $y_1 \ldots y_4$. Evengoed als wij uit de lijnen t de lijnen y hebben afgeleid, kunnen wij uit de lijnen y vier lijnen z afleiden.

Daarvoor is de berekening van de vier grootheden

$$P_1' = \sqrt{(y_1\, y_2)\,(y_3\, y_1)\,(y_1\, y_4)}, \ldots P_4' = \sqrt{(y_1\, y_4)\,(y_2\, y_4)\,(y_3\, y_4)}$$

die evenals $P_1, \ldots P_4$ van $t_1, \ldots t_4$ nu van $y_1, \ldots y_4$ afhangen, benoodigd.

Wij vinden gemakkelijk

$$P_1' = P_2' = P_3' = P_4' = \frac{64}{s_3}.$$

De lijn z_1 is ingevolge (H) bepaald door de vergelijking

$$p_{z_1} = -\frac{p_{y_1}}{P_1'} + \frac{p_{y_2}}{P_2'} + \frac{p_{y_3}}{P_3'} + \frac{p_{y_4}}{P_4'}.$$

Substitueeren wij daarin de waarden van $p_{y_1}, \ldots p_{y_4}$, dan komt er

$$p_{z_1} = \frac{s_3}{16} p_1.$$

Dat wil zeggen, het verband tusschen de viertallen $t_1, \ldots t_4$ en $y_1, \ldots y_4$ is involutorisch. Wijst ieder vlak door eene lijn y op de vier lijnen t vier geassocieerde raakpunten aan, ieder vlak door eene lijn t doet hetzelfde op de vier lijnen y.

Er is nog eene tweede eigenschap, die op de lijnen y betrekking heeft. In mijn opstel »Over stralenstelsels enz.", toonde ik op blz. 57 aan, dat, wanneer een vlak wentelt om eene op de beide transversalen f' en f'' rustende lijn l, de diagonaalpunten van den vierhoek $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$, door de vier lijnen $t_1, \ldots t_4$ op het vlak aangewezen, rechte lijnen x beschrijven, die eveneens op f' en f'' rusten.

Had de lijn l de coördinaten, aangewezen door

$$p_l = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4,$$

dan beschreef het snijpunt der lijnen $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$ eene lijn x, wier coördinaten berekend werden met behulp van de vergelijking

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 + \\ + A_2 A_3 A_4 (23) p_4.$$

Door deze vergelijkingen was eene involutorische overeenkomst tusschen l en x tot stand gebracht.

Wij nemen nu voor l de lijn y_1 en stellen derhalve

$$A_1 = -\frac{1}{P_1}, \quad A_2 = \frac{1}{P_2}, \quad A_3 = \frac{1}{P_3}, \quad A_4 = \frac{1}{P_4}.$$

Voor de lijn x verkrijgen wij daardoor

$$p_x = -\frac{(23)}{P_1 P_2 P_3} p_1 - \frac{(14)}{P_1 P_2 P_4} p_2 - \frac{(14)}{P_1 P_4 P_3} p_3 + \frac{(23)}{P_2 P_3 P_4} p_4,$$

of daar

$$\frac{(23)}{P_2 P_3} = \frac{(14)}{P_1 P_4},$$

$$p_x = -\frac{(14)}{P_1 P_4}\left(\frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} - \frac{p_4}{P_4}\right) = -\frac{(14)}{P_1 P_4} p_{y_4}.$$

De lijn x aan y_1 toegevoegd is geene andere dan de lijn y_4.

Op deze wijze komen wij tot het besluit, dat de snijpunten van $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$, van $B_3 B_1$ en $B_2 B_4$, van $B_1 B_2$ en $B_3 B_4$ in volgorde liggen op y_4, y_3, y_2, op y_3, y_4, y_1, op y_2, y_1, y_4, op y_1, y_2, y_3 al naargelang het vlak, dat op $t_1, \ldots t_4$ de vier punten B aanwijst, door y_1, y_2, y_3 of y_4 gaat. Ten laatste kan men gemakkelijk aantoonen, dat de hyperboloïden $(y_2\, y_3\, y_4)$, $(y_3\, y_1\, y_4)$, $(y_1\, y_2\, y_4)$, $(y_3\, y_2\, y_1)$ identiek zijn met de oppervlakken, die in de reeds aangehaalde verhandeling door H_1, H_2, H_3, H_4 werden aangeduid.

12, *Constructie van krommen R^4, die vier gegeven lijnen in vier in een vlak gelegen punten raken.* Op eene der vier gegeven lijnen $t_1, \ldots t_4$, bijv. t_1, nemen wij het raakpunt B_1 willekeurig aan. Wij hebben dan op t_2 het raakpunt B_2 zoo te bepalen, dat de lijn $B_1\, B_2$ of c gelegen is in een der beide complexen

$$K_{\pm c} \equiv (3\,c) \pm \frac{P_3}{P_4}(4\,c) = 0,$$

welke vergelijking wij ook kunnen schrijven in den vorm

$$\left\{(3\,c) - \frac{(31)}{(14)}(4\,c)\right\} \pm \sqrt{\frac{(31)(24)}{(23)(14)}}\left\{(3\,c) - \frac{(23)}{(24)}(4\,c)\right\} = 0.$$

Die vergelijkingen leeren ons, dat in den complexbundel, bepaald door de beide oneigenlijke complexen

$$(3c) = 0, \quad (4c) = 0,$$

de complexen $K_{\pm c} = 0$ harmonisch zijn toegevoegd, zoowel ten opzichte der genoemde ontaardingen, als ten opzichte der beide complexen uit den bundel

$$(3c) - \frac{(31)}{(14)}(4c) = 0,$$

$$(3c) - \frac{(23)}{(24)}(4c) = 0,$$

die men in volgorde door de lijnen t_1 en t_2 kan brengen.

Uit die overleggingen zullen wij de constructie der lijn $B_1 B_2$ afleiden. Aan het punt B_1 is in ieder complex een nulvlak toegevoegd, welke zes nulvlakken een vlakkenbundel vormen. De nulvlakken behoorende bij de complexen $K_{\pm c} = 0$, zijn daarbij harmonisch ten opzichte van de beide andere paren toegevoegd. Wij leggen een vlak V door B_1 en t_2 en bepalen achtereenvolgens de punten, waar de zes nulvlakken die lijn ontmoeten. Stel, dat het vlak V de lijnen t_3 en t_4 in C en D snijdt, en dat de lijnen $B_1 C$, $B_1 D$ en $C D$ de lijn t_2 in volgorde in E, F en G treffen, dan is het in te zien, dat door deze punten de nulvlakken gaan, behoorende bij de complexen

$$(3c) = 0, \quad (4c) = 0, \quad (3c) - \frac{(23)}{(24)}(4c) = 0.$$

Wij verkrijgen verder het nulvlak, behoorende bij het complex

$$(3c) - \frac{(31)}{(14)}(4c) = 0,$$

door eerst uit B_1 eene lijn te trekken, die t_3 en t_4 snijdt en vervolgens die lijn met t_1 door een vlak te verbinden, welk vlak de lijn t_2 in H moge snijden.

Wanneer wij nu eindelijk de dubbelpunten B_2 en B_2' van

de involatie $(EF; GH)$ zoeken, zal eene der lijnen $B_1 B_2$ en $B_1 B_2'$, bijv. de eerste, liggen in het complex $K_{+c} = 0$, de tweede in $K_{-c} = 0$.

Op dezelfde wijze zoeken wij op de lijn t_3 de punten B_3 en B_3' zoodanig, dat $B_1 B_3$ een straal is van $K_{+b} = 0$, $B_1 B_3'$ een straal is van $K_{-b} = 0$.

Vervolgens brengen wij de vier vlakken $B_1 B_2 B_3$, $B_1 B_2 B_3'$, $B_1 B_2' B_3$ en $B_1 B_2' B_3'$ aan. Uit de tabel van art. 10 blijkt, dat het eerste en het laatste vlak op t_4 een punt B_4 bepalen, welks verbindingslijn met B_1 in het complex $K_{+a_1} = 0$ is gelegen, terwijl de beide andere vlakken de lijn t_4 in het punt B_4' treffen, waarbij de lijn $B_1 B_4'$ straal is van het complex $K_{-a_1} = 0$.

Zoo hebben wij nu vier vierhoeken gevonden, in wier hoekpunten de lijnen $t_1, .. t_4$ door krommen R^4 kunnen worden geraakt. En die vierhoeken zijn op eigenaardige wijze verbonden.

Vooreerst heeft ieder tweetal eene zijde gemeen. Kiest men echter er een, bijv. den eersten $B_1 B_2 B_3 B_4$, dan vindt men in zijn vlak van elk der drie andere een diagonaalpunt, welke drie diagonaalpunten op eene rechte lijn liggen. Dat is volgens art. 11 de lijn y_1. Evenzoo treft men in de drie andere vlakken in volgorde de lijnen y_2, y_3 en y_4 aan. Ieder vlak, dat eene dezer lijnen bevat, snijdt, zooals wij zagen, de lijnen $t_1, .. t_4$ in eene groep van vier geassocieerde raakpunten $B_1, .. B_4$, en het heeft dan verder geen bezwaar om door een willekeurig aangenomen punt eene kromme R^4 te laten gaan, welke $t_1, .. t_4$ in $B_1, .. B_4$ aanraakt. De gebruikelijke constructie is daartoe voldoende *).

Eene enkele opmerking aangaande de zooeven gevonden figuur moge hier nog plaats vinden. Wij onderstelden, dat de lijn $B_1 B_2$ gelegen was in het complex K_{+c} 0, het is duidelijk, dat uit B_2 ook een lijn $B_2 B_1'$ naar t_1 getrokken kan worden, behoorende tot het complex $K_{-c} = 0$. Brengen wij nu een vlak aan door $B_1' B_2 B_3$, dan moet dit weer de lijn t_4 ontmoeten in een punt, dat met B_1', B_2,

*) Reye, *Geometrie der Lage*, II, blz. 152.

B_3 een viertal geassocieerde raakpunten vormt. Blijkbaar kan dit het punt B_4 niet zijn, noodzakelijk gaat het vlak derhalve door B_4', en bevat het eene der lijnen y.

Beschouwden wij zooeven vier vierhoeken $B_1 B_2 B_3 B_4$, eigenlijk levert de figuur er ons acht, en wel zullen wij vinden

$$\text{door } y_1 \begin{cases} B_1\, B_2\, B_3\, B_4 \\ B_1'\, B_2'\, B'_3\, B_4' \end{cases}, \quad \text{door } y_2 \begin{cases} B_1\, B_2\, B_3'\, B_4' \\ B_1'\, B_2'\, B_3\, B_4 \end{cases},$$

$$\text{door } y_3 \begin{cases} B_1\, B_2'\, B_3\, B_4' \\ B_1'\, B_2\, B_3'\, B_4 \end{cases}, \quad \text{door } y_4 \begin{cases} B_1\, B_2'\, B_3'\, B_4 \\ B_1'\, B_2\, B_3\, B_4' \end{cases}.$$

Deze vierhoeken bezitten 24 diagonaalpunten, waarvan elke lijn y er 6 draagt. Het onderzoek dezer punten leert, dat die 24 punten te splitsen zijn in 3 groepen van 8. De 8 punten van zulk eene groep komen twee aan twee op de lijnen y voor. Zij hebben voor de lijnen y dezelfde beteekenis als de 8 punten B voor de lijnen t. Zoo kan men er weer 8 vierhoeken mede vormen, die een hoekpunt hebben op elke lijn y, terwijl de vlakken dezer vierhoeken weder twee aan twee door de lijnen t gaan.

En eindelijk zouden wij nog er aan kunnen herinneren, dat door de 8 punten B, en dan ook door de 8 punten van iedere dergelijke groep, hetzij zij op de lijnen y of t voorkomen, oneindig veel ruimtekrommen R^4 gebracht kunnen worden, omdat door de 8 punten B vier in vlakkenparen ontaarde oppervlakken van den tweeden graad gaan.

Buitendien zal men zich kunnen overtuigen, dat de projecties der punten B uit een willekeurig punt op een willekeurig vlak een stelsel van vier paar geconjugeerde punten van eene vlakke kromme van den derden graad oplevert, zoodanig, dat uit een willekeurig punt dezer kromme de projecties van B_1 en B_1', B_2 en B_2', B_3 en B_3', B_4 en B_4' door een involutorischen stralenbundel worden geprojecteerd.

13. *Constructie van krommen R^4, welke $t_1, \ldots t_4$ tot buigraaklijnen hebben.* Wij zijn thans in staat, wanneer de lijnen $t_1, \ldots t_4$ aan de voorwaarde $s_1 = 0$ voldoen, de krommen

R^4 te construeeren, waarvoor de gegeven lijnen buigraaklijnen zijn, wier raakpunten in één vlak komen.

Volgens de constructie van art. 12 nemen wij B_1 op t_1 willekeurig aan en zoeken B_2, B_3, B_4; het vlak dezer vier punten bevat dan de lijn y_1. De vier raakpunten $B_1, .. B_4$ zijn geassocieerde raakpunten van een net Σ, de vraag is naar de bijbehoorende kegeltoppenkromme of kernkromme. Is deze in het algemeen van den zesden graad, voor het bijzondere net Σ is zij ontaard.

Er is overgebleven eene kromme R^3 van den derden graad, welke $t_1, .. t_4$ tot koorden heeft, en die, zooals men gemakkelijk bewijst, door de drie diagonaalpunten van den vierhoek $B_1 B_2 B_3 B_4$ gaat. Wij kunnen op drie verschillende wijzen die kernkromme construeeren. Beschouwen wij den vierhoek $B_1 B_2 B_3 B_4$ en zijne drie diagonaalpunten $(B_1 B_4, B_2 B_3)$, $(B_2 B_4, B_3 B_1)$, $(B_3 B_4, B_1 B_2)$, in volgorde L, M, N geheeten, dan kunnen wij in de eerste plaats opmerken, dat volgens art. 11 deze punten gelegen zijn op de lijnen y_4, y_3, y_2; de lijnen MN, NL, LM, welke wij z_4, z_3 en z_2 zullen noemen, zijn dan blijkbaar richtlijnen van de hyperboloïden $(y_3\, y_2\, y_1)$, $(y_1\, y_2\, y_4)$, $(y_3\, y_1\, y_4)$ of van H_4, H_3, H_2. Uit hetzelfde artikel mogen wij afleiden, dat de gezochte kernkromme is de gedeeltelijke doorsnede van de regelscharen $(t_1\, t_4\, z_4)$ en $(t_2\, t_3\, z_4)$ of van $(t_2\, t_4\, z_3)$ en $(t_3\, t_1\, z_3)$, of eindelijk van $(t_3\, t_4\, z_2)$ en $(t_1\, t_2\, z_2)$. Het feit, dat de kernkromme door drieërlei constructie kan worden gevonden, staat in verband met eene eigenschap der hyperboloïden H_1, H_2, H_3, H_4, waarop zoo aanstonds nog even zal worden gewezen.

Intusschen worden nu op ieder der lijnen $t_1, .. t_4$ twee punten Q_1 en $Q_1', \ldots Q_4$ en Q_4' verkregen, toppen van kegels uit het net Σ. Voldoen daarbij de lijnen $t_1, .. t_4$ aan de voorwaarde $s_1 = 0$, dan moet het mogelijk zijn uit ieder tweetal punten Q er een te kiezen, zoodanig dat men vier kegels van een bundel verkrijgt, wier gemeenschappelijke doorsnede eene R_4 zal zijn, die $t_1, .. t_4$ raakt, en $B_1, .. B_4$ tot buigpunten heeft. Door het vlak $B_1 B_2 B_3 B_4$ om y_1 te laten wentelen, verkrijgt men er oneindig veel. Die bewerking is ten slotte niets anders dan het toepassen van

eene homographische transformatie op de eerste kromme, waarbij de punten der lijnen f' en f'' met zichzelven overeenkomen.

Zijn wij hierbij van de lijn y_1 uitgegaan, evengoed hadden de lijnen y_2, y_3, y_4 kunnen dienen. In het geheel worden derhalve vier verschillende groepen van R^4 gevonden. De krommen van elke groep zijn blijkbaar gelegen op een regelvlak van den achtsten graad, dat $t_1, \ldots t_4$ tot dubbele beschrijvende lijnen en f' en f'' tot viervoudige lijnen heeft.

14. *Eene eigenschap der hyperboloïden* H_1, H_2, H_3, H_4. Zooals in de reeds meermaal aangehaalde verhandeling werd besproken, geven vier kruisende lijnen $t_1, \ldots t_4$ aanleiding tot de beschouwing van drie nulstelsels van de derde orde, die door (14; 23), (25; 31), (34; 13) werden aangeduid. Namelijk gaat door een willekeurig punt eene snijlijn van t_1 en t_4, eene snijlijn van t_2 en t_3; het vlak dezer snijlijnen kan het nulvlak genoemd worden van het punt voor het nulstelsel (14; 23). Bewezen werd, dat het nulpunt eene ruimtekromme R^3 doorloopt, die $t_1, \ldots t_4$ tot koorden heeft, wanneer het nulvlak om eene rechte lijn wentelt. Rust evenwel die rechte lijn op f' en f'', dan beschrijft het nulpunt eveneens eene rechte lijn, die ook f' en f'' snijdt. De overeenkomst tusschen die beide rechte lijnen droeg een involutorisch karakter. Er werd nu gezocht naar de krommen R^3, in de drie nulsystemen toegevoegd aan de lijnen z van het achttal hyperboloïden H_1, $H_2, \ldots H_8$, welke lijnen z telkens gemeenschappelijk waren aan een zestal der twaalf complexen $K_{\pm a} = 0, \ldots K_{\pm e_1} = 0$.

Het bleek, dat het laatste viertal hyperboloïden zich geheel anders gedroeg dan het eerste. De krommen R^3, behoorende bij de lijnen z van eene hyperboloïde H, hebben tot meetkundige plaats een regelvlak F^6 van den zesden graad. Zoo zou men uit ieder oppervlak H drie oppervlakken F^6 kunnen afleiden, al naargelang men daarbij het nulstelsel (14; 23). (24; 31) of (34; 12) te hulp nam. Zooals werd aangetoond bezitten de hyperboloïden H_5, H_6, H_7, H_8 de merkwaardige eigenschap, dat voor elk van hen de drie regelvlakken F^6

samenvallen. Die eigenschap missen de oppervlakken H_1, H_2, H_3, H_4; uit de constructie van het vorige artikel blijkt echter welke eigenschap zij daartegenover kunnen stellen. Die constructie leerde, dat met eene lijn z_4 van H_4 in het nulstelsel (14; 23), met eene lijn z_3 van H_3 in het nulstelsel (24; 31), eindelijk met eene lijn z_2 van H_2 in het nulstelsel (34; 12) dezelfde ruimtekromme R^3 overeenkomt. Door dergelijke overleggingen komt men tot het besluit, dat aan de hyperboloïden H_1, H_2, H_3, H_4 in het nulstelsel (14; 23), vier oppervlakken F^6 zijn toegevoegd, welke in dezelfde volgorde behooren bij H_2, H_1, H_4, H_3 in het nulstelsel (24; 31) of bij H_3, H_4, H_1, H_2 in het nulstelsel (34; 12). De krommen R^3, welke op deze oppervlakken F^6 (nog steeds in dezelfde volgorde genomen) voorkomen, hebben wij leeren kennen als te zijn kernkrommen voor de oppervlakkennetten Σ, waarbij dan het vlak der vier punten B door y_4, y_3, y_2 of y_1, is gelegd. De krommen R^3, daarentegen gelegen op de oppervlakken F^6, die bij H_5, H_6, H_7, H_8 behooren, hebben de eigenschap om onder zekere omstandigheden over te gaan in krommen, welke $t_1, \ldots t_4$ aanraken, wat bij de andere groep weder niet kan voorkomen.

15. *De invariante voorwaarde in de gevallen I, II en III.* Hebben wij in het voorafgaande vrij uitvoerig het eenvoudigste geval IV onderzocht, er blijft over, ook de drie eerste gevallen te bespreken. Zooals werd opgemerkt in art. 3, is hier de symmetrie verstoord. Dat maakt de betrekking tusschen de vier lijnen meer ingewikkeld en de gevolgen minder merkwaardig,

Wij zullen ons bepalen tot het afleiden der invariante voorwaarde, en daaraan eene enkele opmerking toevoegen, aangaande het complex, hetwelk met die voorwaarde samenhangt.

De argumenten der buigpunten $B_1, \ldots B_4$ weder $u_1, \ldots u_4$ noemende, gaan wij in het geval I uit van de vergelijkingen (C) van art. 2

$$\frac{\alpha^2}{ap'(u_2-u_3)p'(u_1-u_4)} = \frac{\beta^2}{bp'(u_3-u_1)p'(u_2-u_4)} = \frac{\gamma^2}{cp'(u_1-u_2)p'(u_3-u_4)}.$$

De argumenten zijn thans verbonden door de betrekkingen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega, \quad \text{of} \quad u_2 + u_3 = u_1 + u_4.$$

Verder is

$$2\,u_1 = \omega, \quad 2\,u_2 = \omega + \omega', \quad 2\,u_3 = \omega', \quad 2\,u_4 = 0.$$

Wij stellen

$$v_1 = u_2 - u_3, \quad v_2 = u_3 - u_1, \quad v_3 = u_1 - u_2;$$

zoodat

$$2\,v_1 = \omega, \quad 2\,v_2 = \omega + \omega', \quad 2\,v_3 = \omega',$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

$$u_1 - u_4 = v_1 + \omega', \quad u_2 - u_4 = -v_2, \quad u_3 - u_4 = v_3.$$

De vergelijkingen gaan dus over in

$$\frac{\alpha^2}{a\,p'v_1\,p'(v_1 + \omega')} = \frac{\beta^2}{-b\,p'^2\,v_2} = \frac{\gamma^2}{c\,p'^2\,v_3}.$$

Zooals wij in art. 4 aantoonden, is weer

$$p'v_1p'(v_1+\omega') = \alpha^2\beta^2\,\frac{p'^2\,v_1}{(pv_1-e_3)^2} = 4\alpha^2\beta^2\{pv_1+p(v_1+\omega)+e_3\},$$

waaruit volgt

$$p'\,v_1\,p'\,(v_1 + \omega') = 4\,\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2,$$

onverschillig welke der vier waarden, die v_1 kan aannemen, men in het beschouwde product substitueert.

Anders is het met de uitdrukking p'^2v_2. Daar v_2 hier de waarden $\pm\,\dfrac{\omega + \omega'}{2}$, $\pm\,\dfrac{\omega - \omega'}{2}$ kan aannemen, is *)

$$p'\,v_2 = \pm\,2\,\alpha\,\gamma\,(\gamma \pm i\,\alpha),$$

*) HALPHEN I, blz. 54, formule (22).

en dus hebben wij voor $p'^2 v_2$ twee verschillende waarden

$$p'^2 v_2 = + 4 \alpha^2 \gamma^2 (\gamma \pm i \alpha)^2.$$

Op volkomen dezelfde wijze hebben wij

$$p'^2 v_3 = + 4 \alpha^2 \beta^2 (\alpha \pm i \beta)^2,$$

en dan, in aanmerking nemende, dat de dubbele teekens geheel onafhankelijk van elkaar zijn,

$$\frac{\alpha^2}{a \alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = \frac{\beta^2}{-b \alpha^2 \gamma^2 (\gamma \pm i \alpha)^2} = \frac{\gamma^2}{c \alpha^2 \beta^2 (\alpha \pm i \beta)^2},$$

wat, daar

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

herleid kan worden tot

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{(i\gamma \pm \alpha)^2}{b} = \frac{(i\beta \pm \alpha)^2}{c}$$

of tot

$$\frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{i\gamma \pm \alpha}{\sqrt{b}} = \frac{i\beta \pm \alpha}{\sqrt{c}}.$$

Dit levert

$$\frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{i\gamma}{\sqrt{b} \mp \sqrt{a}} = \frac{i\beta}{\sqrt{c} \mp \sqrt{a}}, \quad \ldots\ldots \text{(K)}$$

zoodat

$$-a + (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2 + (\sqrt{c} \pm \sqrt{a})^2 = 0.$$

Verdrijving der wortelteekens doet ten laatste vinden

$$(-a + b + c)^4 = 64\, a^2 b c.$$

Zijn de buigpunten B dus zoo gekozen, dat door de kromme R^4 en de koorden $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$ een regelvlak

gaat, dan zijn de vier buigraaklijnen door eene bikwadratische betrekking verbonden.

Verwisseling der letters a, b, c geeft de voorwaarde in de gevallen II en III.

16. *Meetkundige beteekenis der gevonden vergelijking.* Nemen wij als in het geval IV de lijnen t_1, t_2, t_3 willekeurig aan, dan vormen alle lijnen t_4, die voldoen aan

$$(-a+b+c)^4 - 64\,a^2 b c = 0,$$

een bikwadratisch complex. De vergelijking is van zulk een bijzonderen aard, dat men zonder groote moeite voor een willekeurig punt P den complexkegel kan construeeren.

Doelmatig is het evenwel in plaats van dien kegel zelf zijne doorsnede te zoeken met het poolvlak van P ten opzichte van de regelschaar $(t_1\, t_2\, t_3)$.

Laat dit vlak de drie gegeven lijnen in A, B en C, de regelschaar volgens de kegelsnede K^2 snijden. Wij trekken in A, B en C de raaklijnen aan K^2, welke door hunne onderlinge doorsnijding den driehoek $A_1\, B_1\, C_1$ bepalen.

De lijnen AA_1, BB_1, CC_1 gaan daarbij door één punt. Trekken wij nog BC, welke lijn B_1C_1 in A_2 treft, dan is de figuur gereed, waarin wij de doorsnede van den gezochten complexkegel zullen aanwijzen.

Het is op zichzelf duidelijk, dat de lijnen B_1C_1, C_1A_1, A_1C_1, BC de doorsneden zijn van het vlak van teekening met de nulvlakken van P ten opzichte van de lineaire complexen

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad -a+b+c = 0.$$

Wij kunnen derhalve in zeker opzicht de grootheden, a, b en c als trilineaire coördinaten beschouwen, waarbij $A_1\, B_1\, C_1$ als coördinatendriehoek is aangenomen.

Deze zienswijze leert, dat door de vergelijking

$$(-a+b+c)^4 - 64\,a^2 b c = 0$$

eene kromme van den vierden graad wordt voorgesteld, welke

in A_2 een „Selbstberührungspunkt" heeft met B_1C_1 tot raaklijn, en die in B en C twee buigpunten bezit, waar de raaklijnen C_1A_1 en A_1B_1 vier opvolgende punten met de kromme gemeen hebben.

Zij kan volledig worden geconstrueerd als meetkundige plaats der snijpunten van homologe elementen uit den involutorischen stralenbundel

$$\{(-a+b+c)+\lambda a)\}\ \{(-a+b+c)-\lambda a\}=0$$

en den daarmede projectivischen kegelsneebundel

$$\lambda^2(-a+b+c)^2-64\,bc=0.$$

Neemt men van de kromme de reciproke figuur ten opzichte van K^2, dan zal daardoor de complexkromme van het vlak van teekening worden verkregen.

17. *Absolute invariant der kromme.* Evenals in het geval IV zou men ook thans den absoluten invariant A in de coördinaten der gegeven lijnen kunnen uitdrukken. Aangezien er evenwel geene symmetrie bestaat, kan A bezwaarlijk uit de beide absolute invarianten worden berekend.

De vergelijkingen (K) geven

$$\frac{e_2-e_3}{-a}=\frac{e_3-e_1}{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}=\frac{e_1-e_2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2},$$

met behulp waarvan wij als in art. 7 kunnen afleiden

$$\wp^2 g_2=\frac{2}{3}\{a^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4\},$$

$$\wp^3 g_3=\frac{4}{27}(b-c+2\sqrt{ac}-2\sqrt{ab})(-a+c-2\sqrt{ac})(a-b+2\sqrt{ab}).$$

Daaruit volgt

$$\mathsf{A}=\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}=\frac{\{a^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4\}^3}{2(b-c+2\sqrt{ac}-2\sqrt{ab})^2(-a+c-2\sqrt{ac})^2(a-b+2\sqrt{ab})^2}.$$

De invariant $\mathbf{A}$ is geene rationale functie van de coördinaten der vier buigraaklijnen. Op dezelfde wijze als in art. 8 zou men ook hier weder eenige lineaire complexen kunnen opsporen, waarin de lijn t_4 gelegen zou moeten zijn, opdat de invariant $\mathbf{A}$ de waarde 0 of ∞ zou kunnen aannemen.

Breda, December 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Februari 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, Voorzitter, WEBER, ZEEMAN, MAC GILLAVRY, VAN BEMMELEN, KORTEWEG, FRANCHIMONT, BIERENS DE HAAN, VAN DORP, STOKVIS, FORSTER, KAPTEIJN, PLACE, SCHOUTE, SCHOLS, VAN DIESEN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, LORENTZ, MICHAËLIS, KOSTER, PEKELHARING, RAUWENHOFF, ENGELMANN, MULDER, MOLL, VAN RIEMSDIJK, MARTIN, BEHRENS, HOEK, BAKHUIS ROOZEBOOM, J. A. C. OUDEMANS, HOFFMANN, en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden: 1°. L. VAN DER STEEN, Bibliothecaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 4 Februari 1891; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 14 Februari 1891; 3°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1891; 4°. A. AOSTLE, Bibliothecaris van de State University of Iowa te Iowa City, 20 Januari 1891; 5°. W. H. HOTTS,

Bibliothecaris van de Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters te Madison, 30 Januari 1891.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden: 1⁰. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 20 Februari 1891; 2⁰. het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid te 's Gravenhage, 31 Januari 1891; 3⁰. W. P. WOLTERS, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Januari 1891; 4⁰. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 2 Februari 1891; 5⁰. den Directeur van het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, Februari 1891; 6⁰. F. NICHOLSON, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 1890; 7⁰. F. VON HOLLEN, Secretaris van het Reichs-Marine-Amt te Berlijn, 30 Januari 1891; 8⁰. H. MOHN, Voorzitter van de Norwegian North-Atlantic Expedition, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn:

1⁰. twee brieven van den Minister van Binnenlandsche Zaken (3 en 16 Februari 1891), waarin door de Regeering voorlichting gevraagd wordt omtrent de wijze, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen behoort plaats te hebben. De Voorzitter deelt mede, dat hij, ten einde tijd te winnen, kort na den 3den Februari eene Commissie benoemd heeft om de Afdeeling in deze te dienen van raad. Die Commissie bestaat uit de Heeren HOFFMANN, BEHRENS en WEBER. Het verlangen is te kennen gegeven, dat het advies in de Maart-vergadering ter tafel moge komen;

2⁰. brieven van de Heeren A. VAN BEMMELEN en J. BÜTTIKOFER over het aanvaarden van eene benoeming van Regeeringswege als afgevaardigde naar het 2de ornithologisch Congres, te houden te Buda-Pesth. De Heer VAN BEMMELEN kon zich niet beschikbaar stellen, doch de Heer BÜTTI-

KOFER zou het mandaat aanvaarden, indien zijne reiskosten werden vergoed. De verblijfkosten zou hij dan zelf wenschen te dragen. De inhoud van beide brieven werd aan den Minister meêgedeeld, en daarbij aangedrongen op de aanneming van de zeer weinig bezwarende voorwaarden van den Heer BÜTTIKOFER;

3°. eene circulaire, waarbij de Afdeeling door een Comité d'Organisation uit de Académie royale des Sciences, des Lettres en des Beaux Arts de Belgique, wordt uitgenoodigd, een adres van gelukwensching op te stellen bij gelegenheid van het op 5 Mei a.s. invallend 50-jarig jubilé, als lid van genoemde Instelling, van den Heer JEAN SERVAIS STAS, en dit vóór den genoemden datum toe te zenden aan een nader opgegeven adres. De Voorzitter meent, dat, zooals vroeger meermalen gebeurde, aan dit verzoek behoort te worden voldaan, en dat het wenschelijk is dat eene Commissie uit de Afdeeling, meer van nabij bekend met de verdiensten van den jubilaris, met de samenstelling van zulk een adres worde belast. Daar tegen deze opvatting geene bedenkingen worden vernomen, wenscht de Voorzitter de door hem bedoelde taak opgedragen te zien aan de Heeren GUNNING en FRANCHIMONT. De laatste, ter vergadering tegenwoordig, neemt de benoeming aan; aan den Heer GUNNING zal daarvan kennis worden gegeven;

4°. eene circulaire, waarbij de Afdeeling door een groot aantal vereerders van den Hoogleeraar HERMANN VON HELMHOLTZ wordt uitgenoodigd, een adres van gelukwensching in gereedheid te brengen tegen den 31sten Augustus a.s.: den datum, waarop voornoemde geleerde den 70-jarigen leeftijd bereikt zal hebben. Op dezelfde gronden als hierboven genoemd, worden de Heeren ENGELMANN, LORENTZ en VAN DER WAALS met de samenstelling van het adres belast. De eerste twee heeren nemen de benoeming aan; aan den Heer VAN DER WAALS zal daarvan kennis worden gegeven;

5°. een antwoord van het Bestuur der Akademie op het verzoek der Afdeeling om eene som van *f* 100 beschikbaar te stellen voor den Heer BIERENS DE HAAN, tot het doen overschrijven van titels van mathematische opstellen en ver-

handelingen uit tijdschriften, enz., voor een vroeger nader omschreven doel. Het Bestuur acht, om nader aangevoerde redenen, het verzoek voor geene inwilliging vatbaar.

— De Heeren BEHRENS en VAN BEMMELEN brengen een zeer gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer J. W. RETGERS, en bevelen de opneming daarvan in de 4° werken der Akademie aan. Aldus wordt besloten.

— De Heer VAN BEMMELEN vertoont twee nieuwe gekristalliseerde zouten: het $HgO.SO_3.H_2O$ en het basische $(HgO)^3(SO_3)^2.2H_2O$, dat zich door zijne kleurloosheid onderscheidt van het reeds lang bekende gele zout $(HgO)^3.\ SO_3$. [1]).

De Heer HENSGEN, assistent aan het anorganisch scheikundig Laboratorium te Leiden, heeft deze zouten verkregen bij zijn onderzoek omtrent de evenwichtstoestanden tusschen HgO, SO_3 en H_2O. De uitkomsten daarvan zullen later aan de Akademie medegedeeld worden. Het is gebleken, dat meer dan één basisch zout daarbij kan ontstaan, en dat de evenwichtstoestanden dus ingewikkelder zijn dan vroeger gemeend werd.

In de tweede plaats vertoont de Heer v. B. zeer fraai gekristalliseerd Antimoniumchloruur, door sublimeering verkregen, en eenige buizen, met $SbCl_3$ en verdund zwavelzuur in verschillende verhoudingen gevuld. De Heer HENSGEN heeft ontdekt, dat daarin dezelfde merkwaardige verschijnselen van ontmenging tot twee lagen bij verwarming — en hermenging tot ééne homogene vloeistof bij afkoeling — kunnen voortgebracht worden, als waargenomen zijn bij

---

[1]) Uitkomsten der analysen:

Molekuulverhouding.

	Berekend	Gevonden I	Gevonden II
SO_3	2.	2.00	2.00
HgO	3.	2.96	2.92
H_2O	2.	2.04	2.04

Molekuulverhouding.

	Berekend	Gevonden I	Gevonden II
SO_3	1	1.00	1.00
HgO	1	1.01	1.00^5
H_2O	1	0.92^6	0.99^3

verschillende vloeistofmengsels (bijv. benzol en water, trimethylamine en water enz.). De onderste laag bestaat uit $Sb\,Cl_3$ met 1—2 mol. water en eenig zwavelzuur; de bovenste uit verdund zwavelzuur met eenig $Sb\,Cl_3$. De temperaturen van de mengpunten hangen van de verhouding der samengevoegde stoffen af. De Heer HENSGEN houdt zich met het onderzoek daarvan bezig.

— De Heer KORTEWEG begint met eene vroegere mededeeling (Verslagen en Mededeelingen, 3de Reeks, Deel V, p. 402) over plooipunten in herinnering te brengen. Sedert heeft hij in twee uitvoerige opstellen: het eene opgenomen in de *Wiener Berichte*, Bd. XCVIII 1889, en vertaald in de *Archives Néerland.*, T. XXIV, p. 57, het andere onlangs verschenen in hetzelfde deel der *Archives*, p. 295, dit onderwerp en 'tgeen er mede samenhangt nader behandeld. Op één punt echter heeft hetgeen daar gegeven wordt nog nadere aanvulling noodig. Dit betreft het gedrag der plooipunten met bijbehoorende spinodale en connodale lijnen bij de vervorming door een kegelpunt heen.

Spreker gaat bij de beschrijving van dit gedrag uit van den toestand als het kegelpunt juist aanwezig is. Is alsdan $H_2 + H_3 + H_4 + \ldots = 0$ de vergelijking van het oppervlak met het kegelpunt als oorsprong, dan gaan er door het kegelpunt zes takken der spinodale lijn, welke in het kegelpunt tot raaklijnen bezitten de zes lijnen $H_2 = 0$, $H_3 = 0$.

Van deze takken kunnen er dus *zes*, *vier*, *twee* of *nul* bestaanbaar zijn. Iedere tak loopt door het kegelpunt heen over beide bladen van het oppervlak. Ieder blad wordt daardoor in even zoovele segmenten verdeeld als er bestaanbare takken zijn der spinodale lijn. Deze segmenten zijn beurtelings positief en negatief gekromd, de overeenkomstige segmenten op beide bladen *tegengesteld.*

Iedere bestaanbare tak der spinodale lijn is vergezeld van een bestaanbaren tak der connodale lijn. In het kegelpunt raken beide takken elkander. Zij gaan aldaar *niet* door elkander heen, waarvan het gevolg is, dat de tak der connodale lijn op beide bladen op gelijksoortig gekromd gebied voortloopt.

De beteekenis van zulk een tak der connodale lijn is *deze*: dat zij de meetkundige plaats is der punten, wier raakvlakken door het kegelpunt gaan, of, wil men liever, de contactlijn van het oppervlak met den omhullenden kegel, die het kegelpunt tot top heeft. Dewijl ieder vlak, gaande door het kegelpunt, als een raakvlak moet worden opgevat, is het duidelijk dat zulk eene lijn als eene connodale lijn moet worden beschouwd, waarvan de ééne connode voortdurend in het kegelpunt blijft, de andere langs het oppervlak voortloopt.

Spreker gaat daarop over tot den invloed, dien eene geringe vervorming van het kegelpunt op den loop der spinodale en connodale lijnen heeft. Bij *scheiding* der beide in het kegelpunt samenkomende bladen breidt het positief gekromde deel zich uit ten koste van het negatief gekromde. De takken der connodale lijn, welke op negatief gekromd gebied verliepen, verdwijnen spoorloos, de anderen verdubbelen zich. Eén der beide door verdubbeling ontstane takken raakt de spinodale lijn in een plooipunt, de andere tak loopt, zoover beiden zonder nadere kennis van de gedaante van het oppervlak op eindigen afstand vervolgd kunnen worden, met deze ongeveer evenwijdig. De zoo beschreven figuur vertoont zich natuurlijk op beide bladen. Er ontstaan dus bij scheiding dubbel zooveel bestaanbare plooipunten als er bestaanbare takken der connodale lijn op positief gekromd gebied verliepen toen het kegelpunt aanwezig was. Daar na de scheiding alle connodale lijnen zich op positief gekromd gebied bevinden, zijn de plooipunten allen van de eerste soort. Van de door verdubbeling ontstane takken bezitten die met plooipunt, connoden, welke beiden op hetzelfde blad gelegen zijn; bij de anderen met deze evenwijdig verloopenden, liggen de connoden op verschillende bladen.

Bij *verbinding* doen zich tegengestelde verschijnselen voor, die gemakkelijk te gissen zijn.

Spreker hoopt over het behandelde onderwerp en eenige andere verwante een opstel voor de Verslagen en Mededeelingen gereed te maken.

— Namens den Heer Kamerlingh Onnes, die verhinderd is

de vergadering bij te wonen, biedt de Heer LORENTZ voor de boekerij een exemplaar aan van de onlangs verschenen dissertatie van den Heer L. M. J. STOEL *) en deelt in het kort de uitkomsten mede van het daarin beschreven onderzoek.

Het doel daarvan was: de verandering der inwendige wrijving eener vloeistof met de temperatuur te leeren kennen tusschen het kookpunt onder den druk van 1 atm. en de kritische temperatuur, en aldus eene leemte aan te vullen, die de tot nog toe verrichte metingen lieten bestaan. Als vloeistof werd chloormethyl gekozen, dat onder een druk van 1 atm. bij — 23° C. kookt, en waarvan de kritische temperatuur 143° C. is.

In den gebezigden toestel bevonden zich twee verticale, op kleinen afstand van elkander geplaatste buizen, die, boven en beneden met elkander verbonden, eene langgerekte () vormden. Het eene been A was betrekkelijk wijd, het andere bestond uit een nog wijder reservoir B beneden en eene capillaire buis van 55 cM. lengte daarboven. Van het laagste punt der () liep naar beneden eene buis, die met haar open einde in de persbus van een toestel van CAILLETET geplaatst was, zoodat van onder kwik in den toestel kon worden gedreven. Te dien einde stond de bedoelde persbus in gemeenschap met een tweede met kwik gevuld vat; op den vloeistofspiegel in dit laatste, kon door middel van koolzuur of lucht een hooge druk worden uitgeoefend, hetgeen noodig was, daar bij de hoogste temperatuur, waarbij men werkte, de spanning van den verzadigden chloormethyldamp ruim 40 atm. bedroeg.

Van het bovenste punt der ()-vormige buis verhief zich eene verticale buis, die aanvankelijk geopend en, met het oog op het reinigen, het luchtledig pompen en het vullen van den toestel door het overdestilleeren van chloormethyl (waar bij de buis werd afgekoeld door een mengsel van vast kool-

---

*) L. M. J. STOEL. Metingen over den invloed van de temperatuur op de inwendige wrijving van vloeistoffen tusschen het kookpunt en den kritischen toestand. Leiden 1891.

zuur en alcohol), van eene bijzondere inrichting voorzien was, maar naderhand werd dichtgesmolten. Het benedenste deel dier buis was een reservoir C, ruim tweemaal zoo groot als het reservoir B.

De beschreven, uit glas vervaardigde, toestel was geplaatst in een even hoogen mantel, waardoor men absoluten alcohol liet stroomen, die door een mengsel van alcohol en vast koolzuur was afgekoeld, of wel water van de verlangde temperatuur, of eindelijk verhitte glycerine. Op deze wijze konden proeven genomen worden bij temperaturen tusschen -28^0 C. en $+123^0$ C.

Bij het begin eener proef stond het kwik tot even beneden de 0, het vloeibare chloormethyl tot even in het reservoir C, terwijl daarboven de toestel slechts den damp der vloeistof bevatte. Perste men nu het kwik omhoog, dan steeg het spoedig in de buis A tot een daarop, nabij het boveneinde, aangebracht merkteeken; door regeling van den druk werd dan de kwikspiegel op dat merk gehouden, terwijl het van beneden komende kwik langzaam het chloormethyl uit het reservoir B door de capillaire buis naar C dreef. Op den wand van B waren een drietal merkteekens aangebracht, waarop aflezingsmikroskopen met kruisdraden waren gericht; met behulp van een registreer-toestel werden de oogenblikken bepaald, waarop de stijgende kwikspiegel deze merken bereikte; tienden van secunden konden aldus met zekerheid worden bepaald, en zelfs honderdste deelen geschat.

Daar boven in den toestel steeds eene met damp gevulde ruimte overbleef, was de druk aan het boveneinde der capillaire buis slechts weinig grooter dan het maximum van spanning van den damp bij de temperatuur der proef. De druk aan het benedeneinde wordt gemeten door de hoogte van het kwik in de buis A.

In de verhandeling wordt de invloed, dien afwijkingen van de wet van Poiseuille en de uitzetting der vloeistof gedurende het opstijgen kunnen hebben, uitvoerig besproken. Voor de afwijkingen van de wet van Poiseuille zullen - dere proeven nog de juiste correctiën moeten leeren kennen

Uit de verkregen uitkomsten zal het mogelijk zijn, naderhand met behulp van de afmetingen der capillaire buis absolute waarden voor den wrijvings-coëfficient af te leiden, waartoe men ook zal kunnen geraken door dezelfde buis voor proeven met eene vloeistof van bekenden wrijvingscoëfficient te bezigen. Reeds thans echter geven de niet gecorrigeerde waargenomen doorlooptijden ϑ een voldoend beeld van de veranderingen der inwendige wrijving met de temperatuur. Zij kunnen, in secunden uitgedrukt, met voldoende nauwkeurigheid worden voorgesteld door de empirische formule:

$$\log \vartheta = \frac{896 - T}{250},$$

waarin T de absolute temperatuur is. Dit blijkt uit de volgende tabel, ontleend aan die van den Heer Stoel, welke 61 waarnemingen omvat.

$T-273$	ϑ (waargenomen)	ϑ (berekend)	Afwijking in proc.
— 28°	408.50	401.79	+ 1.7 pCt.
— 20.75	379.91	375.84	+ 1.1
— 11.3	339.41	344.51	— 1.5
+ 0.75	305.72	308.32	— 0.8
10.8	280.21	281.06	— 0.3
19.0	259.81	260.62	— 0.3
27.8	236.17	240.33	— 1.7
35.9	220.995	223.05	— 0.9
45.2	204.595	204.74	— 0.1
55.8	186.58	185.69	+ 0.5
66.6	169.99	168.11	+ 1.1
75.2	157.59	155.31	+ 1.5
85.1	143.46	141.78	+ 1.2
93.15	133.38	131.64	+ 1.2
104.3	120.88	118.80	+ 1.8
110.7	112.68	112.00	+ 0.6
122.95	97.06	100.04	— 3.0

— De Heer VAN DE SANDE BAKHUIJZEN spreekt over de verandering van de poolshoogte. Hij toont aan, dat de veranderingen, in de jaren 1889—1890 te Berlijn, Potsdam en Praag waargenomen, bezwaarlijk aan waarnemingsfouten kunnen worden toegeschreven, en geeft daarna verslag van zijn onderzoek der waarnemingen van de poolster, in de jaren 1851—1890 te Greenwich volbracht. Uit de waarnemingen van de jaren 1851—1882 leidde hij af, dat een groot deel van de jaarlijksche afwijkingen, welke de hoogtemetingen van de poolster vertoonen, moest worden toegeschreven aan abnormale straalbreking in de waarnemingszaal, doch dat een klein deel dier afwijkingen door werkelijke veranderingen der poolshoogte moest worden verklaard. Voor de jaren 1884—1885 en 1889—1890 vond hij echter veel grootere afwijkingen, die heenwezen op grootere wijzigingen in de poolshoogte, in vrij goede overeenstemming met de uitkomsten, die elders, ook in Leiden, waren verkregen, en die dus doelden op buitengewone oorzaken, welke in die jaren de richting van de aardas hadden veranderd.

— Voor de bibliotheek der Akademie worden aangeboden, door den Heer FRANCHIMONT: Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas, IX, n°. 5, en door den Heer SCHOLS zijn werk over Landmeten en Waterpassen (4e druk) en verder: Waterbouwkunde van HENKET, SCHOLS en TELDERS, I Afd., VII, afl. 4.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING:

DE SAMENSTELLING VAN HET DUINZAND VAN NEDERLAND,

DOOR

Dr. J. W. RETGERS,
Mijn-Ingenieur te 's Gravenhage.

Reeds herhaaldelijk zijn zanden aan een mineralogisch onderzoek onderworpen geworden; tot heden echter ontbrak een dergelijk onderzoek van zeezand. Nogtans zou juist dit, als grondslag onzer eenigszins zwevende voorstellingen over de wording van zandbanken en zandstuivingen, in hooge mate gewenscht zijn. Eene verhandeling, die over de samenstelling van duinzand licht tracht te verspreiden, heeft om deze reden aanspraak op eene gunstige beoordeeling, al liet de uitkomst van het onderzoek te wenschen over. Maar wanneer, gelijk in de verhandeling, waarover thans verslag wordt uitgebracht, het onderwerp met groote nauwgezetheid en volledigheid is afgehandeld, mag aan den onderzoeker wel dubbel hulde gebracht worden, met het oog op de eigenaardige moeielijkheden, die hij alléén door eigen vinding en arbeid heeft moeten overwinnen. De Heer RETGERS was voor het onderzoek van zand als het ware geroepen door de schitterende uitkomsten, die hij bij zijn onderzoek van de vulkanische asch der Krakatau-uitbarsting van 1883 verkregen had. Hij heeft dan ook getracht, dezelfde methode van

onderzoek in toepassing te brengen: scheiding naar het soortelijk gewicht, door middel eener oplossing van joodkwikjoodkalium. Toch zag hij zich spoedig genoopt, aan deze methode eene aanzienlijke uitbreiding en aanvulling te geven, door het aanwenden van andere scheidingsvloeistoffen en van optische hulpmiddelen van onderzoek. Nagenoeg de helft der verhandeling is aan de uiteenzetting der methode van onderzoek gewijd, en dit gedeelte mag, om zijne oorspronkelijkheid en om de beteekenis voor latere onderzoekingen van denzelfden of van soortgelijken aard, geacht worden van ten minste even groote waarde te zijn als het tweede, waarin de uitkomsten van het onderzoek zijn neergelegd.

Terwijl men zich bij het onderzoek van vulkanische asch binnen een betrekkelijk engen kring van mineralen beweegt, en er oprekenen mag, van die allen goed ontwikkelde kristallen te zullen vinden, heeft men in zeezand nagenoeg enkel rotsvormende mineralen te verwachten, en dan nog wel versletene, door schuring afgeronde exemplaren. Daartegenover staat het niet onbelangrijke voordeel, dat men slechts met homogene korrels van niet al te kleine afmeting te doen heeft, hetgeen bij de scheiding door middel van zware vloeistoffen veel gemak en tijdbesparing aanbrengt.

De eerste scheiding, met behulp van Thoulet'sche vloeistof van het soort. gew. 2.7, dient om de groote hoeveelheid kwarts (ca. 85 pCt.) te verwijderen. Eene tweede scheiding met Thoulet'sche vloeistof van s. g. 3.0, levert hoofdzakelijk kalkspaat en brokken van schelpen. Voor de derde scheiding dient joodmethyleen (s. g. 3.3); zij levert amphibool en toermalijn. Eene vierde scheiding met eene oplossing van jodium en jodoform in joodmethyleen (s. g. 3.6) geeft augiet en epidoot. Voor de verdere splitsing van het hierin bezonken roodachtig zand, werd van het dubbelzout $Tl\,Ag\,N_2\,O_6$ gebruik gemaakt, hetwelk, bij 75° C. smeltend, een s. g. = 5.0 heeft, terwijl door toevoeging van een weinig water het s. g. tot 4.0, en het smeltpunt tot 50° teruggebracht kan worden. Met behulp van dit zout werden granaat, rutiel, zirkoon en ijzererts gescheiden.

Het optisch onderzoek der mineraalkorrels wordt door hare dikte (0.25 mM.), haar ronden vorm en de oneffenheid harer oppervlakte bemoeielijkt. De Heer RETGERS heeft hierin voorzien door voorzichtige verbrijzeling, die tevens dienen moest om splijtvakken op te sporen en daarvan voor kristallographische en optische orienteering partij te trekken, en voorts door vernuftige toepassing van vloeistoffen van verschillend brekingsvermogen. Deze vloeistoffen, voornamelijk *benzol* ($n = 1.5$) en joodmethyleen ($n = 1.74$), werden gebruikt om de doorzichtigheid der korrels en schilfers te verhoogen, en tevens om bij benadering het lichtbrekend vermogen der onderzochte mineralen vast te stellen. Eindelijk heeft hij van enkele mikrochemische reactiën gebruik gemaakt, o. a. voor K, Ca, Ti, Zr, P ; terwijl hardheidsproeven niet in toepassing gebracht zijn, ofschoon die allicht voor enkele mineralen, o. a. voor korund, goede diensten hadden kunnen bewijzen.

Door THOULET'sche vloeistof van s. g. 3.00 worden 95 pCt. van het zand afgescheiden, en wel 85 pCt. kwarts, 7.5 pCt. kalkspaat en brokken van schelpen, en 2.5 pCt. orthoklaas en mikroklien. Onder de groote hoeveelheid kwarts schuilt een weinig cordiëriet en plagioklaas. Dat mineralen van een zoo uitnemend splijtingsvermogen als veldspaat in eene zoo groote hoeveelheid in het zeezand voorkomen, wekt reeds bevreemding, maar opvallend is voorzeker de groote hoeveelheid gevonden kalkspaat, met het oog op zijne gemakkelijke splijting en zijne geringe mate van hardheid. Men dient te veronderstellen, dat het kalkspaat door de Maas uit België aangevoerd wordt. In de amphiboolgroep (s. g. 3—3.3) werden aangetroffen : hoornblende, straalsteen, een weinig smaragdiet en glaukophaan, voorts apatiet en tamelijk veel toermalijn ; gezamenlijk bedrag : 1.5 pCt. In de pyroxeengroep (s. g. 3.3—3.6) : augiet, epidoot, titaniet, sillimaniet en olivien ; het laatstgenoemd mineraal waarschijnlijk uit Rijnpruisen afkomstig ; gezamenlijk gewicht 1 pCt. In de granaatgroep (s. g. 3.6—4.2) : roode granaten, stauroliet, een weinig

distheen, korund en enkele octaëders van spinel; gezamenlijk bedrag 2.4 pCt. Het residu, ten bedrage van 0.15 pCt., bevat rutiel, zirkoon, titaanijzer en magnetiet.

Verreweg de meeste der genoemde mineralen wijzen op graniet, gneiss en glimmerlei. Enkele zijn bepaald typisch voor de twee laatstgenoemde gesteenten, bijv. cordiëriet, stauroliet, distheen, sillimaniet, granaat en glaukophaan. Maar, wanneer het zand der Nederlandsche duinen in hoofdzaak van archeïsche gesteenten afkomstig is, dan rijst de vraag, of het wellicht slechts voor een klein *gedeelte* door Rijn, Maas en Schelde aangevoerd is, en of zijn oorsprong niet elders gezocht moet worden. De schrijver stelt de hypothese, dat het in diluvialen tijd door ijs uit het Noorden zoude aangevoerd zijn. Hij heeft het voornemen, met het oog op dit vraagstuk, het zand der Nederlandsche rivieren te onderzoeken. Strikt genomen, zou zich daarbij een onderzoek van Noordzee-zanden uit noordelijker streken en ook uit het kanaal La Manche moeten aansluiten.

In afwachting eener dergelijke voortzetting, aarzelen de verslaggevers, niet der Natuurkundige Afdeeling de verhandeling des Heeren J. W. Retgers ten zeerste ter publikatie in hare Verhandelingen aan te bevelen.

Delft en *Leiden*,
Februari 1891.

Th. H. BEHRENS.
J. M. VAN BEMMELEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Maart 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MULDER, LORENTZ, VAN BEMMELEN, VAN DIESEN, HOFFMANN, MARTIN, BEHRENS, BIERENS DE HAAN, MOLL, FRANCHIMONT, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, VAN RIEMSDIJK, VAN DORP, GUNNING, FORSTER, MAC GILLAVRY, BEIJERINCK, ZEEMAN, VAN 'T HOFF, STOKVIS, PLACE, KOSTER, KAPTEIJN, VAN DER WAALS, SCHOUTE, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAKHUIS ROOSEBOOM en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Wordt gelezen een Brief van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van den Heer R. ETHERIDGE, Bibliothecaris van het Department of Mines, N. S. W. te Sydney, 30 Januari 1891.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van: 1°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 14 Maart 1891; 2°. E. LIENENKLAUS, Secretaris van het naturwissenschaftliche Verein te Osnabrück, 2 Maart 1891; 3°. R. HILDEBRAND te Leipzig, 6 Maart 1891;

4°. T. C. WENDENHALL, Superintendent van het U. S. Coast and geodetic Survey te Washington, 27 Februari 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. brieven van de Heeren A. C. OUDEMANS JR., HOEK, WEBER en MICHAËLIS, waarbij zij hunne afwezigheid verontschuldigen;

2°. brieven van de Heeren GUNNING en VAN DER WAALS, waarin zij mededeelen, dat zij het hun in de vorige vergadering opgedragen mandaat aanvaarden;

3°. eene missive van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken (18 Maart 1891), de mededeeling behelzend, dat Z.Ex. den Heer BÜTTIKOFER, Conservator aan 's Rijks Museum van Natuurlijke Historie te Leiden, heeft opgedragen, 's Lands Regeering te vertegenwoordigen op het in de maand Mei 1891 te Buda-Pesth te houden 2e Ornithologisch Congres.

Op eene des betreffende vraag van den Voorzitter, deelt de Heer MARTIN mede, dat het hem bekend is, dat de Minister de door den Heer BÜTTIKOFER gestelde voorwaarde heeft aangenomen;

4°. een brief van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken ter begeleiding van 100 exemplaren van het Verslag over zijn wetenschappelijk onderzoek aan het botanisch Station te Buitenzorg, van den Heer Dr. F. A. F. C. WENT;

5°. eene circulaire van den Heer MAURITS SNELLLEN, de kennisgeving behelzend, dat H. M. de Koningin-Regentes hem benoemd heeft tot Hoofd-Directeur van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut;

6°. eene uitnoodiging ter bijwoning van het in Mei a. s. te Buda-Pesth te houden 2e Ornithologische Congres;

7°. eene uitnoodiging ter bijwoning van het 5e internationale Geologische Congres te Washington op 26 Augustus e. k.

— De Heeren HOFFMANN, BEHRENS en WEBER brengen verslag uit over de in hunne handen gestelde ministerieele stukken betrekkelijk de wijze, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen, door den chef der geologische opneming van Java, door tusschenkomst van het Departement van Koloniën aan den Directeur van het Geologische Museum te Leiden toegezonden, behoort plaats te hebben.

Dit verslag, met de conclusiën 12 pagina's folio groot, wordt door de vergadering goedgekeurd en zal in zijn geheel aan den Minister van Binnenl. Zaken worden toegezonden.

— De Heer GUNNING leest, ook uit naam van den Heer FRANCHIMONT, het adres van gelukwensching voor, op verlangen der Afdeeling door hen ontworpen naar aanleiding van het weldra door den Heer J. S. STAS te vieren jubilé van zijn 50-jarig lidmaatschap der Belgische Academie. Het adres wordt bij acclamatie goedgekeurd.

— De Heer BEHRENS deelt eenige waarnemingen mede betreffende het verband tusschen de kristallisatie en de samenstelling der oplossingen, waarin de kristallen gevormd worden. Ammonium-magnesiumphosphaat vormt tweelingen van geheel afwijkenden habitus, wanneer de oplossing, waarin de kristallen gevormd worden, aluminium bevat. Cupri-mercurirhodanide bevat geen kristalwater, wanneer het gelijktijdig met een groote overmaat van zink-mercurirhodanide tot kristallisatie komt. De mengkristallen vertoonen eene zeer eigenaardige violet-bruine tint, geheel afwijkend van de geelgroene kleur van het cupri-mercurirhodanide. — Zilverchromaat, gelijktijdig met veel zilversulfaat tot kristallisatie gebracht, vormt daarmede mengkristallen, die den rhombischen vorm van het sulfaat vertoonen, en dus het normale chromaat moeten bevatten, niettegenstaande de aanwezigheid eener aanzienlijke hoeveelheid vrij salpeterzuur.

— De Heer VAN DER WAALS spreekt over den druk bij coëxisteerende phasen van mengsels, en in het bijzonder bij

[illegible] de hypothese der [illegible] der druk- [illegible] nog een [illegible] stof [illegible] voor [illegible] invloed [illegible] werking [illegible] opge- [illegible] Dat [illegible] van 2 [illegible] werking [illegible]

[illegible]

[illegible] niet kunnen [illegible]

[illegible] van RECNAULT en [illegible] een maxi- [illegible] en maximum- [illegible] groep, waarvan [illegible] worden, be- [illegible] bekend met [illegible] waarde, die bij [illegible] bereikt is.

[illegible] is vertegenwoordiger [illegible] wel evenzeer met [illegible] maximumwaarde, [illegible] van concentratie ligt, [illegible] concentratie, die bij de [illegible] zo groot is om ze aan [illegible]

als p_1 de drukking van den verzadigden waterdamp voorstelt, en y berekend is uit de formule der dissociatie

$$y^2 = C(x - y).$$

Moet meer samengestelde dissociatie worden aangenomen dan splitsing van de zoutmolekulen in 2 ïonen, dan blijft in hoofdzaak de gang dezelfde, maar de waarde der betrekkelijke drukvermindering begint met 3.

— De Heer BEIJERINCK handelt over ophooping van atmospherische stikstof in culturen van Bacillus radicicola. De talrijke proeven, door den spreker genomen, hadden tot uitkomst, dat er bij die culturen ophooping van stikstof plaats heeft, en dat de atmospherische stikstof als zoodanig hoogst waarschijnlijk als de bron daarvan mag worden beschouwd. Toch moet het absolute bewijs, dat geene stikstofverbingen uit den atmospheer daarbij werkzaam zijn, nog geleverd worden.

— Voor de Bibliotheek der Akademie worden aangeboden, door den Heer VAN T' HOFF: »J. E. MARSH, Chemistry in space"; en door den Heer SCHOUTE, uit naam van den Heer KAPTEYN, diens: »Bestimmung von Parallaxen durch Register-Beobachtungen am Meridiankreise".

— De Vergadering wordt gesloten.

RAPPORT

OVER EEN

ONDERZOEK VAN VERSTEENINGEN, AFKOMSTIG VAN JAVA.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Maart 1891).

De Commissie, in Uwe vergadering van 28 Februari benoemd om praeadvies uit te brengen over eene vraag der Regeering, de wijze betreffende, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen behoort plaats te hebben, heeft de eer U het volgende te berichten.

In het najaar van 1889 zond de Chef der geologische opneming van Java, Dr. R. D. M. VERBEEK, door tusschenkomst van het Departement van Koloniën, aan den Directeur van het Geologisch Museum te Leiden, Prof. K. MARTIN, eene uitgebreide verzameling van op Java bijeengebrachte versteeningen, met verzoek die voor hem te willen determineeren en, op grond dier determinatie, hem een aantal vragen te willen beantwoorden aangaande de geognostische gesteldheid van Java.

De Heer VERBEEK wenschte namelijk van de antwoorden, hem door Prof. MARTIN te verstrekken, gebruik te maken bij het bewerken en het kleuren van de geologische kaart van Java, waarmede hij thans bezig is. Zonder die gegevens kan hij die kaart niet voltooien. De Heer MARTIN verklaarde zich tot medewerking bereid, maar schreef tevens aan den Minister van Koloniën (dato 18 December 1889

N°. 47), dat hij aan den wensch van den Heer VERBEEK, om hem spoedig met de verkregen uitkomsten in kennis te stellen, onmogelijk gevolg konde geven, omdat het ondoenlijk is — en naar de meening uwer Commissie volkomen terecht — zulk eene groote verzameling, *binnen betrekkelijk korten tijd* te determineeren, terwijl het zonder deze determinatie niet mogelijk is, het percentgehalte der nog levende soorten te berekenen en op grond daarvan den ouderdom der lagen te bepalen. De verzameling, door den Heer VERBEEK aan den Heer MARTIN toegezonden, bevat ruim 7500 voorwerpen, alle, zooals gemakkelijk te begrijpen is, oorspronkelijk alleen naar de vindplaatsen gerangschikt. Maar voor het determineeren moesten eerst al die fossielen zoölogisch worden gesorteerd: eene werkzaamheid, welke op zich zelve reeds zeer veel tijd vorderde. Elk voorwerp toch moest nauwkeurig worden onderzocht, om te weten bij welke groep en bij welk geslacht het behoorde. Kost zulk een voorloopige arbeid voor het bijeenzoeken van verwante geslachten en soorten van thans nog levende dieren reeds veel tijd, nog veel meer is dit het geval bij fossielen, waar men, in stede van met gave en volkomen voorwerpen, dikwijls slechts met brokstukken daarvan te doen heeft en de meeste voorwerpen bovendien hunne natuurlijke kleur verloren hebben.

Eerst wanneer zulk een voorloopige arbeid is afgeloopen, kan met het determineeren een aanvang worden gemaakt. Daarvoor moet de palaeontoloog elk voorwerp met verwante levende en uitgestorven soorten vergelijken, en hij kan dit slechts doen, als hij in staat is, de rijke verzameling te Leiden en die van andere Musea, vooral dat van Londen, te raadplegen; want zonder nauwkeurige vergelijking kan hij niet uitmaken of hij eene nog levende of wel eene reeds uitgestorvene, eene nieuwe of wel eene reeds bekende soort voor zich heeft. Daaruit volgt dan ook, dat hij onmogelijk, zonder zeer groot tijdverlies, de versteeningen van elke laag afzonderlijk kan determineeren, en dat de eenige wijze van bewerking, die aanbeveling verdient, die is, welke Prof. MARTIN in zijne missive van 12 Juni 1890 aan Zijne

Excell. den Minister van Koloniën voorgesteld en uitvoerig heeft toegelicht. De palaeontoloog zou anders hetzelfde werk bijna even zoo vele malen moeten doen als hij lagen te onderzoeken heeft. Wij willen dit nog met een enkel voorbeeld ophelderen. De door den Heer VERBEEK bijeengebrachte verzameling van versteeningen bevat onder anderen een aantal Echinodermen. Door eerst alle tot die groep van dieren behoorende voorwerpen bijeen te zoeken, en onderling zoowel als met verwante levende en uitgestorven vormen te vergelijken, kunnen zij met nauwkeurigheid worden gedetermineerd. Maar, als men de Echinodermen voor elke laag afzonderlijk zou willen bewerken, zooals de Heer VERBEEK meent dat mogelijk is, dan zou men hetzelfde genus en alle daartoe behoorende soorten evenvele malen moeten onderzoeken, als het aantal lagen, waarin het genus wordt aangetroffen, groot is. Niet alleen zou de bewerking daardoor nog tijdroovender worden, maar tevens de gegronde vrees ontstaan, dat men voorwerpen uit de eerst onderzochte laag of lagen als nieuwe soorten zou beschrijven, die later zouden blijken alleen mutatiën of variatiën voor een en dezelfde soort te zijn. En, wat voor de Echinodermen geldt, dat geldt in nog veel hooger mate voor de Gastropoden en voor de Lamellibranchiaten.

Indien de collectie VERBEEK grootendeels uit voorwerpen bestond, waarvan reeds representanten in de collectie van 's Rijks Museum te Leiden voorhanden waren, dan zou het determineeren der Javasche verzameling in betrekkelijk korten tijd kunnen geschieden. De Chef der geologische opneming van Java schijnt dit te meenen, zooals blijkt uit zijn schrijven van 11 September 1890 n^{0}. 22, gericht aan den Hoofdingenieur, Chef der Afdeeling Mijnwezen, maar dat dit geenszins het geval is, zal uit de volgende mededeeling duidelijk blijken.

Onder de ruim 7500 voorwerpen, die gedetermineerd moeten worden, bevinden zich 4600 Gastropoden, van welke de Heer MARTIN er reeds 587 onderzocht en in manuscript heeft gebracht — de Commissie heeft zich hiervan overtuigd. Deze 587 gedetermineerde voorwerpen vormen 52

verschillende soorten, waarvan slechts een klein gedeelte volkomen overeenstemt met reeds bekende recente of fossiele vormen; de meesten zijn nieuw of nieuwe mutatiën of variatiën, zoodat zij alle zonder uitzondering uitvoerig beschreven moeten worden.

Prof. MARTIN verklaart, dat de beschrijving van de genoemde 52 soorten en de vergelijking daarvan met levende en fossiele vormen uit het Leidsche Museum hem ruim 4 maanden onafgebroken werkzaamheid heeft gekost en een blik op het reeds gereed zijnde, lijvige manuscript, wettigt die verklaring zeker volkomen. Wanneer men nu bedenkt, dat die 52 soorten thans nog vergeleken moeten worden met gelijksoortige vormen in andere Musea en met tal van beschrijvingen van levende en uitgestorven Schelpdieren, en dat gezegde 52 soorten slechts een klein gedeelte der geheele verzameling uitmaken, dan blijkt daaruit voldoende, dat de wensch van den Heer VERBEEK om binnen betrekkelijk korten tijd met de uitkomsten der onderzoekingen van Prof. MARTIN in kennis te worden gesteld, niet voor vervulling vatbaar is.

Uwe Commissie heeft verder ernstig de vraag overwogen, of die collectie niet in korter tijd gedetermineerd zou kunnen worden. De Chef der geologische opneming van Java namelijk zegt het te bejammeren, dat de geheele collectie naar Leiden is gezonden, in plaats van haar onder 5 of 6 Palaeontologen te verdeelen, die gezamentlijk het onderzoek in veel korter tijd hadden kunnen doen, dan wanneer één enkel persoon daarmede belast wordt. Misschien zoude de Heer VERBEEK langs genoemden weg spoediger in het bezit van eenige gegevens gekomen zijn, dan wanneer de geheele collectie door een enkel persoon wordt gedetermineerd. Zeker is het echter, dat de zóó verkregen uitkomsten tot zeer groote verwarring aanleiding zouden geven. De verzameling van den Heer VERBEEK was niet zoölogisch, maar geologisch gerangschikt, zoodat men aan elken medewerker een aantal lagen (of: ongesorteerde voorwerpen van een aantal vindplaatsen) ter onderzoeking had moeten toezenden. Nieuwe soorten of mutatiën van soorten zou de bewerker der

ééne laag onder dezen, die der andere laag onder genen naam beschrijven; ook zou eene en dezelfde soort onder verschillende benamingen in de wetenschap worden ingevoerd. Bovendien zou elke medewerker de fossielen, die hij op zich genomen had te determineeren, moeten gaan vergelijken met gelijksoortige versteeningen, die reeds in het geologisch Museum te Leiden gedetermineerd aanwezig zijn. Liet hij dit na, dan zouden zijne uitkomsten niet te vertrouwen zijn. Eindelijk zou de rijke verzameling fossielen, welke nu de basis kan worden voor een standaard-werk over fossielen van Java, bij eene verdeeling over verschillende Palaeontologen versnipperd worden. Kortom, het zou in alle opzichten zeer te betreuren zijn geweest, wanneer die collectie over 5 of 6 Palaeontologen verdeeld ware geworden, vooral wanneer men bedenkt, dat in Nederland, behalve Prof. MARTIN, geen Palaeontologen zijn. Tegen eene nog twijfelachtige winst in tijd, staan zulke ontwijfelbaar groote nadeelen, dat eene zoodanige handelwijze uit een wetenschappelijk oogpunt niet te rechtvaardigen zou wezen. Hoe, volgens onze meening, aan den alleszins billijken wensch van den Heer VERBEEK, om gelijdelijk met de uitkomsten der onderzoekingen van Prof. MARTIN in kennis te worden gesteld, kan worden voldaan, zullen wij zoo aanstonds nog nader bespreken, maar eerst willen wij nog op de wenschelijkheid wijzen, om voor het uittegeven werk niet de Nederlandsche taal, maar een der Europeesche hoofdtalen: Duitsch, Engelsch of Fransch te gebruiken.

Het bezigen der Hollandsche taal, door den Heer VERBEEK gevraagd, hoe gewenscht ook in 't algemeen, komt ons in dit bijzondere geval noch doelmatig, noch wenschelijk voor. Niet doelmatig, omdat men toch voortdurend van vreemde kunsttermen gebruik zal moeten maken, aangezien er voor de vereischte termen nog geen Nederlandsche woorden bestaan; niet wenschelijk, omdat bedoelde Monographie een standaardwerk voor de Geologie van den Indischen Archipel belooft te zullen worden. Zulk een werk dient in eene taal geschreven te zijn, die het elk geoloog mogelijk zou maken daarmede zijn voordeel te doen, en dit zou zeker het geval

niet wezen, indien daarvoor de Hollandsche taal werd gebruikt. (Menzie verder wat de firma BRILL daarover in haren brief van 30 December 1890 aan Prof. MARTIN heeft geschreven en de missive van den Heer MARTIN aan den Minister van Koloniën d.d. 12 Juni van het vorige jaar).

Evenmin als op het gebruik der Duitsche taal, meent de Commissie op de andere voorstellen van den Heer MARTIN, de wijze van uitgeven betreffend, aanmerkingen te mogen maken. De vrees toch van den Heer VERBEEK, uitgedrukt in zijn schrijven van 11 September 1890, dat de beschrijving der door hem verzamelde versteeningen niet een afzonderlijk werk zou vormen, is der Commissie gebleken ongegrond te zijn; evenzoo de veronderstelling van den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid »dat de beschrijving der Javasche fossielen tusschen andere beschrijvingen verspreid zal voorkomen" (zie missive van 2 October 1890, gericht aan Zijne Excellentie den Gouverneur-Generaal van Nederlandsch Indië). Zooals door Prof. MARTIN reeds bij schrijven van 12 Juni 1890 aan Zijne Excellentie den Minister van Koloniën is uiteengezet, zal een *afzonderlijk* werk worden uitgegeven, waarvan de titel door hem werd overgelegd. Terwijl de Commissie tegen dien titel »Die Fossilien von Java" geen bezwaar heeft, drukt zij tevens den wensch uit, dat het uittegeven werk ook inderdaad zij eene monographische bewerking van de versteeningen van Java; zij spreekt de verwachting uit, dat, al moge de verzameling VERBEEK den grondslag vormen voor die Monographie, daarin toch ook, voor de volledigheid, de beschrijving van andere voorwerpen zal worden opgenomen, die op hetzelfde onderwerp betrekking hebben.

Aan den wensch van den Heer VERBEEK om geleidelijk met de uitkomsten van het onderzoek van den Heer MARTIN in kennis te worden gesteld, zou naar onze meening het best op de volgende wijze voldaan kunnen worden. Voor de ouderdomsbepalingen der geologische lagen is de kennis der fossiele Foraminiferen en Gastropoden van het meeste gewicht. De eerstgenoemde diergroep is door Prof. MARTIN

reeds geheel bewerkt; het manuscript met de daarbij behoorende plaat is kant en klaar. Het komt ons derhalve wenschelijk voor, dat dit gedeelte van het onderzoek zoo spoedig mogelijk worde uitgegeven. Met de bewerking der Gastropoden is de Heer MARTIN, zooals wij vermeld hebben, eveneens reeds begonnen. Nu kan, wel is waar, de daarbij behoorende tekst eerst worden afgedrukt, wanneer *alle* tot die groep behoorende voorwerpen nauwkeurig zijn gedetermineerd, maar toch zou men de platen, welke op die voorwerpen betrekking hebben, kunnen laten drukken, naar mate de bewerking vordert en de teekeningen gereed komen. Die platen kunnen in afleveringen van 5—10 stuks verschijnen, en wordt hierbij nu eene voorloopige verklaring gegeven, dan zal de Heer VERBEEK van zelf voortdurend op de hoogte van den stand der onderzoekingen blijven. Om te voorkomen dat de uitgaaf van het werk ook de minst mogelijke vertraging ondervinde, komt het der Commissie zeer gewenscht voor, dat jaarlijks ten minste 10 platen worden uitgegeven, want er zullen vermoedelijk wel ± 100 platen voor het geheele werk vereischt worden.

Deze begrooting van het aantal platen berust op eene berekening der voorwerpen, die geteekend moeten worden voor het reeds bewerkte gedeelte der Gastropoden. Daar eene dergelijke berekening vroeger niet mogelijk was, heeft de Heer MARTIN in zijne missive van 18 December 1889 het vereischte aantal platen te laag geraamd.

Indien nu Dr. VERBEEK, tegen den tijd dat de tekst der Gastropoden voor den druk gereed zal zijn gekomen, aan den Heer MARTIN al de hem bekende gegevens over de ligging der lagen verstrekt, vergezeld van eene nauwkeurige opgave van de vindplaatsen der fossielen, dan zal het mogelijk zijn, reeds na afloop van het onderzoek der Gastropoden, in groote en algemeene trekken den ouderdom der lagen te bepalen. Aangezien nu van den kant des Heeren VERBEEK tegen het verstrekken dier gegevens geenerlei bezwaar bestaat, zooals uit de gevoerde correspondentie blijkt, zoo vertrouwt de Commissie, dat op bovengenoemde wijze het

beoogde doel: de ouderdoms-bepaling zoo spoedig mogelijk vast te stellen, het best zal worden bereikt.

Uwe Commissie weet geen anderen weg aantewijzen. Zij heeft zich ook overtuigd, dat het niet mogelijk is, voorloopig meer over het karakter der Javasche lagen te zeggen, dan de Heer MARTIN in zijn voorloopig rapport van 8 September 1890 heeft vermeld. In dat rapport, waarvan Prof. MARTIN ons eene kopie heeft gegeven, zijn door hem de vragen van den Heer VERBEEK, voor zooverre dit slechts eenigszins mogelijk was, beantwoord, en Uwe Commissie is van oordeel, dat het rapport zelf wel is waar klein is, maar dat de inhoud daarvan stellig niet met den naam van „zeer sober" mag worden bestempeld.

Kort samengevat komt het ons het meest doelmatig voor:

1°. dat de bewerking der Javasche fossielen, welke van zeer groot belang voor de wetenschap belooft te zullen worden, aan den Heer MARTIN worde opgedragen en op de door hem voorgestelde wijze, namelijk in zoölogische volgorde, geschiede;

2°. dat de uitkomsten van het onderzoek worden nedergelegd in een afzonderlijk, in het Duitsch, Fransch of Engelsch geschreven werk — de keuze daarvan aan den bewerker over te laten — welk werk dan tevens als een afzonderlijke band en als onderdeel van het tijdschrift van het Geologisch Rijks-Museum kan verschijnen;

3°. dat de titel luide, zooals hij door den Heer MARTIN is voorgesteld, maar dan ook zooveel mogelijk gezorgd worde, dat de inhoud van het werk aan dien titel »Die Fossilien van Java" beantwoorde;

4°. dat het gereedliggend manuscript over Foraminiferenhoudende gesteenten onmiddellijk ter perse worde gelegd;

5°. dat op de Foraminiferen het eerst de Gastropoden mogen volgen, en dat de bij die groep van fossielen behoorende platen in bundels van 5 tot 10 stuks, toegelicht door eene voorloopige verklaring, uitgegeven en de tekst eerst worde afgedrukt, als het manuscript over de Gastropoden geheel gereed is gekomen. De uitgave der platen kan gelijken tred houden met de bewerking van het materiaal;

6°. dat de overige diergroepen op dezelfde wijze worden uitgegeven. Om vertraging bij het drukken te vermijden, kan elke groep afzonderlijk worden gepagineerd;

7°. dat jaarlijks ten minste 10 platen worden uitgegeven, tenzij door onvoorziene omstandigheden de bewerking der voorwerpen vertraging mocht ondervinden;

8°. dat de verdere bijzonderheden, de uitgave betreffend, aan den Heer MARTIN worden overgelaten, in het vertrouwen, dat Prof. MARTIN zooveel van zijn beschikbaren tijd aan de bewerking der door den Heer VERBEEK bijeengebrachte verzameling versteeningen zal willen wijden, als hem mogelijk zal blijken.

De Commissie,

C. K. HOFFMANN.
TH. H. BEHRENS.
MAX WEBER.

DE GROOTTE DER DRUKKING

BIJ

COËXISTEERENDE PHASEN VAN MENGSELS IN HET BIJZONDER BIJ ZOUTOPLOSSINGEN.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

In mijne »théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes", opgenomen in de *Archives Néerlandaises*, T. XXIV, heb ik in de vergelijkingen *A* van § 5 de differentiaalvergelijking gegeven, waardoor wordt aangegeven hoe de drukking afhangt van de samenstelling van coëxisteerende phasen van mengsels *). Voor zeer verdunde oplossingen verkregen deze vergelijkingen een zeer eenvoudige gedaante, en voor het geval dat een der stoffen niet in de dampphase voorkomt, vereenvoudigde de eerste dezer vergelijkingen zich zelfs tot $\frac{dp}{dx_1} = -p$, terwijl de tweede haar beteekenis verloor. De vergelijking

$$\frac{dp}{dx_1} = -p \quad \text{of} \quad -\frac{\Delta p}{p \Delta x} = 1$$

stelt, zooals bekend is, in staat het molekulairgewicht te bepalen van opgeloste stoffen. De overige methoden daartoe

*) *Zeitschrift für physikalische Chemie.* V 2. S. 143.

in den laatsten tijd aangegeven, staan met deze vergelijkingen in zoo onmiddellijk verband, dat zij tegelijk met deze vergelijking staan of vallen. Nu leert de ondervinding echter. dat in vele gevallen slechts bij zeer hoogen graad van verdunning uitkomsten verkregen worden, die de stelling bevestigen, dat de drukvermindering, door opgeloste stoffen teweeggebracht, gedeeld door het produkt van den oorspronkelijken druk en het aantal opgeloste molekulen in een hoeveelheid, die voor het geheele mengsel één molekuul bedraagt, juist gelijk aan de eenheid zijn zou. Daarenboven komen, speciaal voor zoutoplossingen en mengsels van zuren in water, zelfs in hoogen graad van verdunning, nog zooveel afwijkingen voor, dat zij geleid hebben tot de hypothese van Arrhenius, die ik de hypothese der Electrolytische dissociatie zal noemen.

Een nader onderzoek omtrent den invloed der samenstelling op de drukking boven een mengsel moet dus alleen reeds om bovengenoemde toepassing van gewicht geacht worden.

Nu heb ik juist in mijn theorie mij tot doel gesteld om bij mengels van twee stoffen in alle gevallen, hetzij bij verdunning, hetzij bij hoogen graad van concentratie, het evenwicht en dus ook de drukking te kunnnen aangeven, en daarbij moeten de gevallen, waarin twee of drie phasen naast elkander bestaan kunnen, als van zelf op den voorgrond treden. Geometrisch als eenmaal de constanten der vergelijking

$$\psi = f\,(x,\ V,\ T)$$

gegeven zijn, bleek mij dit eenvoudig te zijn. Maar zelfs als de constanten bekend zijn, is de berekening in vele gevallen een ingewikkelde. Een eenvoudige formule bijv. voor den druk bij coëxisteerende phasen liet zich niet aangeven. Neemt men in aanmerking de uitgebreide reeks van gevallen waarvoor die formule de oplossing zou moeten geven, ik noem maar: »oplossing van zouten, oplossing van vluchtige stoffen, wet van Henry enz." dan liet zich dat ook niet verwachten.

Toch heb ik beproefd den vorm te vinden voor een al-

gemeene benaderings-formule, die in al de bovengenoemde gevallen dien druk leert kennen, en in elk geval, naar ik meen, licht kan geven over de afwijkingen bij zoutoplossingen.

§ 1. Kunnen twee phasen van een enkelvoudige stof coëxisteeren, dan moet, zooals door GIBBS is aangetoond, behalve T en p, nog een derde grootheid voor beide phasen gelijk zijn, namelijk de waarde van

$$\varepsilon - T\eta + pV$$

welke per eenheid van gewicht door hem met den naam van thermodynamische potentiaal is bestempeld, en door μ wordt aangeduid. Voor een mengel van twee stoffen moeten, behalve T en p, nog twee grootheden aanelkander gelijk zijn, door GIBBS de thermodynamische potentialen der bestanddeelen genoemd. In de theorie van een mengsel, zooals die door mij is ontwikkeld, komt daarvoor in de plaats, dat behalve T en p, nog twee functiën van V, T en x aan elkander gelijk moeten zijn, n. l. $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT}$ en $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} + pV$, terwijl p gelijk is aan $-\left(\frac{d\psi}{dV}\right)_{xT}$ Daar $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} - V\left(\frac{d\psi}{dV}\right)_{XT}$ de waarde is van de thermodynamische potentiaal voor een molekuul der eerste stof en $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT}$ het verschil dezer potentialen voor de twee stoffen, is er dus geen wezenlijk onderscheid tusschen de gevolgen uit de behandeling van het ψ-vlak afgeleid en die uit de wijze, waarop GIBBS het evenwicht behandelt. Alleen werd o. a. het voordeel verkregen, dat de voorwaarden voor het evenwicht, die door GIBBS steeds gedacht worden als uitgedrukt in functiën van p en x en T, nu vanzelf uitgedrukt worden in functiën van V, x en T; terwijl ze uit te drukken in p, x en T onuitvoerbaar moet

geacht worden, wegens den aard der afhankelijkheid van p en V.

Nemen wij voor de waarde van ψ per molekulaire hoeveelheid *):

$$\psi = -MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} + MRT\{(1-x)\log(1-x) + x\log x\}$$

dan is

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} = MRT\frac{\frac{db_x}{dx}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V} + MRT\log\frac{x}{1-x}$$

en $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} - V\left(\frac{d\psi}{dV}\right)_{XT}$ wordt gelijk gevonden aan:

$$pV - MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} - x\left\{MRT\frac{\frac{db_x}{dx}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}\right\} + MRT\log(1-x)$$

Dit stelt dus ook voor de waarde der molekulaire potentiaal voor de eerste stof.

Daar $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} = M_2\mu_2 - M_1\mu_1$ vinden wij voor de waarde der thermodynamische potentiaal der tweede stof.

$$M_2\mu_2 = M_1\mu_1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT}$$

of

$$pV - MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} + (1-x)\left\{MRT\frac{\frac{db_x}{dx}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}\right\} + MRT\log x.$$

§ 2. De grootheid $pV - MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V}$ zou de waarde der thermodynamische potentiaal uitdrukken voor

*) Men zie *Arch. Neerl.* T. XXIV of *Zeitschrift für physikalische chemie* V. 2.

een enkelvoudige stof, die dezelfde waarde voor a en b heeft, als a_x en b_x voor het mengsel, en denkt men V geelimineerd met behulp der vergelijking:

$$p = \frac{MRT}{V - b_x} - \frac{a_x}{V^2}$$

dan is de loop dezer waarde aangegeven door de grafische constructie in fig. 1 *) n.l. voor bepaalde waarde van x en T.

Deze figuur zal dus bij andere waarde van x en T gemodificeerd worden. Zoodra $MRT > \frac{8}{27} \frac{\frac{a_x}{b_x}}{(1 + a_x)(1 - b}$ heeft de kromme een continue kromming.

Denkt men drie assen, een p-as, een x-as en een loodrecht daarop, en construeert men voor elke waarde van x tusschen $x = 0$ en $x = 1$ dusdanige krommen, dan verkrijgt men een oppervlak. De waarde der derde ordinaat of die van

$$pV - MRT \log (V - b_x) - \frac{a_x}{V}$$

zal ik door de letter μ_x aanduiden.

Voor $x = 0$ valt zij dus samen met $M_1 \mu_1$ en voor $x = 1$ met $M_2 \mu_2$. In die gevallen is μ_x dus de waarde der molekulaire potentiaal. In de andere gevallen is dit niet zoo.

Een doorsnede van dit oppervlak loodrecht op de p-as, zal in het algemeen uit drie geïsoleerde takken bestaan, waarvan de bovenste den labielen toestand aangeeft, en de twee anderen den gastoestand en den vloeistoftoestand aangeven.

De grootheid $MRT \frac{\frac{db_x}{dx}}{V - b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}$ is het differentiaal-

*) Men zie *Arch. Neerl.* T. XXIV of *Zeitschrift für physikalische chemie* V. 2.

quotient naar x (V en T standvastig) van het eerste gedeelte van ψ, n.l. van $-MRT\log(V-b_x)-\frac{a_x}{V}$. Maar zij kan ook beschouwd worden als het differentiaalquotient naar x (p en T standvastig) van μ_x en kan dus gebracht worden onder den vorm $\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$.

De molekulaire potentiaal voor de eerste stof kan dus voorgesteld worden door

$$MRT\log(1-x)+\mu_x-x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$$

en de eisch, dat in de coëxisteerende phasen die potentiaal gelijke waarde heeft, door de vergelijking:

$$MRT\log(1-x_1)+\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}=$$

$$=MRT\log(1-x_2)+\mu_{x_2}-x_2\left(\frac{d\mu_{x_2}}{dx_2}\right)_{pT}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

§ 3. Beperken wij ons nu tot die gevallen, waarin de tweede phase van zoodanigen aard is, dat daarop de wetten der volkomen gassen kunnen worden toegepast, dan is

$$\mu_{x_2}=MRT\log\frac{p}{MRT}+MRT,\text{ en }\left(\frac{d\mu_{x_2}}{dx_2}\right)_{pT}=0.$$

De vergelijking (1) kan dan geschreven worden:

$$MRT+MRT\log\frac{p(1-x_2)}{MRT}=MRT\log(1-x_1)+\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}$$

of

$$p(1-x_2)=MRT(1-x_1)\,e^{\frac{\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1}.$$

Uit deze vergelijking kunnen wij x_2 verwijderen door gebruik te maken van de omstandigheid, dat

$$\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)_{V_1T} = \left(\frac{d\psi}{dx_2}\right)_{V_2T} \text{ moet zijn}$$

of

$$\frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1}{1-x_1} e^{\frac{\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}}$$

of

$$\frac{1}{1-x_2} = 1 + \frac{x_1}{1-x_1} e^{\frac{\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}}.$$

Wij vinden dan voor p de volgende waarde

$$p = MRT(1-x_1)e^{\frac{\mu x_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1} + MRTx_1 e^{\frac{\mu x_1 + (1-x_1)\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1} \quad ..(2)$$

De waarde van den druk, uitgedrukt, zooals zij is, in x_1 (de samenstelling der vloeistofphase) bestaat dus uit 2 deelen, waarvan het tweede gedeelte natuurlijk onmiddellijk uit het eerste kan afgeleid worden door x_1 in $1-x_1$ en omgekeerd te veranderen.

Wij kunnen het eerste gedeelte n.l. $MRT(1-x_1)e^{\frac{\mu x_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1}$ beschouwen als teweeggebracht door het aantal molekulen der eerste stof en het tweede gedeelte n.l. $MRTx_1 e^{\frac{\mu x_1 + (1-x)\frac{d\mu x_1}{dx_1}}{MRT}-1}$ door de molekulen der tweede stof. In zoover kunnen wij den totalen druk als de som van partieel-spanningen beschouwen. Natuurlijk, dat hier het woord partieelspanning anders gebruikt wordt dan men dit gewend is, als men den druk beschouwt als de som van twee spanningen, teweeggebracht door de bestanddeelen der gasphase.

Neemt men $x_1 = 0$, dan wordt $p_1 = MRT\, e^{\frac{\mu_1}{MRT}}$, waarin

p_1 den druk van den verzadigden damp der eerste stof voorstelt, en μ_1 de potentiaal van de eerste vloeistof, als zij staat onder dezen druk. Evenzoo vindt men voor $x_1 = 1$

$$p_2 = MRT\, e^{\frac{\mu_2}{MRT} - 1}.$$

Met behulp van p_1 en p_2 wordt de formule van den druk:

$$p = p_1 (1 - x_1) e^{\frac{\mu_{x_1} - \mu_1 - x_1 \left(\frac{d\mu_{x_1}}{d x_1}\right)_{pT}}{MRT}} + p_2 x_1 e^{\frac{\mu_{x_1} - \mu_2 + (1 - x_1)\left(\frac{d\mu_{x_1}}{d x_1}\right)_{pT}}{MRT}}.$$

De druk, door de $1 - x_1$ molekulen der eerste stof in het mengsel voorhanden uitgeoefend, is dus evenredig aan het aantal, maar de drukking per molekuul is niet volkomen dezelfde als wanneer deze $1 - x_1$ molekulen zich naast x_1 molekulen derzelfde stof bevinden zouden. In dat geval zouden zij een drukking gelijk aan $p_1 (1 - x_1)$ uitoefenen. Nu wordt de drukking verkregen door $p_1 (1 - x_1)$ nog met zekeren factor te vermenigvuldigen — een factor die dus rekenschap geeft van de *wijziging* in den druk teweeggebracht door de aanwezigheid der vreemde molekulen. En hetzelfde geldt voor den partieeldruk der x molekulen der 2de stof. De waarde van dien factor zal dus moeten afhangen van de grootheden die ik door a_{12}, a_1, b_1 enz. heb aangeduid.

§ 4, De factor, die de grootte der wijziging aangeeft, heeft een belangrijke eigenschap. Het is n.l. gemakkelijk in te zien, dat als x_1 van de eerste orde van kleinheid is, het verschil tusschen de waarde van dien factor en de eenheid van de tweede orde van kleinheid is. Evenzoo als $1 - x_1$ van de eerste orde van kleinheid is, is de wijziging in p_2 van de tweede orde van kleinheid. Hebben wij een functie van x, n.l. $f(x)$, en denken wij die, en hare differentiaalquotienten voor een bepaalde waarde van x bekend, dan is

$$f(0) = f(x) - x f'(x) + \frac{x^2}{12} f''(x) \text{ enz.}$$

Is die functie μ_x, dan geeft dat

$$\mu_1 = \mu_x - x\frac{d\mu_x}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{dx^2} -$$

of

$$\mu_x - \mu_1 - x\frac{d\mu_x}{dx} = -\frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{dx^2} +$$

Daar μ_x niet alleen van x maar ook van p afhangt is

$$\mu_1 = \mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p - (p-p_1)\left(\frac{d\mu_x}{dp}\right)_x + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{dx^2} + \text{enz.}$$

De afhankelijkheid van μ van p is in den vloeistoftoestand echter zoo gering, dat met hoogen graad van benadering mag gesteld worden

$$\mu_1 = \mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$$

Zeker mag dit geschieden, als de druk zoo weinig uiteenloopt, als bij zoutoplossingen het geval is. Daar bij standvastige waarde van x, $d\mu_x = V dp$ is, zal in al die gevallen, waarin men gewoonlijk het vloeistofvolume verwaarloost tegen dat van den damp, mogen gesteld worden:

$$\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p = -\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p +$$

Evenzoo mag gesteld worden:

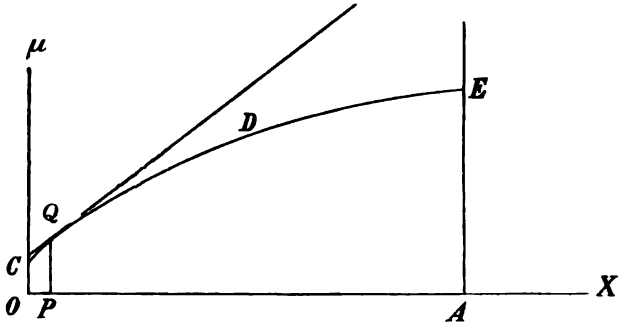
$$\mu_x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p = -\frac{(1-x)^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$$

of

$$e^{\frac{\mu x_1 - \mu_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}} = e^{-\frac{\frac{x_1^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu x_1}{dx_1^2}\right)_{pT}}{MRT}}$$

Uit deze eigenschap volgt dat de spanning door een stof uitgeoefend, waarin een zeer kleine hoeveelheid van een andere is opgelost, per molekuul als limietwaarde even groot is als vóór de oplossing. De drukvermindering die dan plaats heeft is alleen toe te schrijven daaraan, dat er minder molekulen aanwezig zijn. De druk door het bijmengsel uitgeoefend mag dan evenwel niet gelijk aan $p_2 x_1$ gesteld worden, want de factor van $p_2 x_1$ behoeft dan niet slechts weinig van de eenheid te verschillen.

De volgende figuur kan dit verduidelijken



Zij CDE de kromme, die het beloop van μ_x aangeeft en laat OP een kleine waarde van x voorstellen, dan is $PQ = \mu_x$. Een raaklijn in Q aan de kromme getrokken, snijdt van de vertikale lijn, door O gaande, een stuk af grooter dan OC. Dit verschil is gelijk aan $\mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p - \mu_1$. Maar diezelfde raaklijn verlengd zou de vertikale lijn boven het punt A ($OA = 1$) snijden in een punt, dat zeer ver boven E kan liggen en de afstand van het snijpunt tot het punt E stelt de waarde voor van $\mu_x + (1 - x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p - \mu_2$. Alleen in het geval dat μ_x een lineaire functie van x zou zijn zouden de beide verschillen $= 0$ zijn en dus de factor, zoowel die van p_1 als die van p_2 gelijk aan de eenheid. Past men dit toe voor gevallen als waarvoor de wet van Henry bij benadering geldt, bijv. als SO_2 in water wordt opgelost, dan wil dit zeggen: Is een zeer kleine hoeveelheid SO_2 in water opgelost, bijv. x molekulen dan is de uit-

wendige druk van het water met hoogen graad van benadering gelijk aan $p_1(1-x_1)$. Maar de uitwendige druk van de opgenomen hoeveelheid SO_2 is niet bij benadering gelijk aan $p_2 x_1$. Alleen in die gevallen waarin p_2 gelijk nul mag beschouwd worden, blijft de totale uitwendige druk beperkt tot p_1 $(1-x_1)$. Dit is dus het geval bij zoutoplossingen en enkele zuren als bijv. $SO_4 H_2$ en dan nog maar bij lage T. Zoodra echter x_1 niet zeer klein is zal het van de grootte van $e^{-\frac{x_1^2}{12}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx_1^2}\right)_p \frac{1}{MRT}}$ dus van de waarde van $\left(\frac{d^2\mu_x}{d\,x_1^2}\right)_p$ afhangen in hoever $p_1(1-x_1)$ als benadering mag aangenomen worden.

Ik doe hier, tot voorkoming van misverstand, bij opmerken, dat ik in het bovenstaande alleen den *uitwendigen* druk op het oog heb. Tot dezen dragen zoutmolekulen in een oplossing, waarboven zich waterdamp bevindt, niet bij, ten minste als $p_2 = 0$ is. Wel leveren zij, evengoed als de watermolekulen, hun bijdragen tot het weerstandbieden aan den molekulairdruk.

A. Zoutoplossingen.

§ 5. Alvorens nader onderzoek te doen naar den vorm, die de theorie voor de exponent van e als hoogsten grond van benadering aanwijst, zullen wij zien in hoever het experiment de opgegeven waarde van p bevestigt. Daarvoor kiezen wij het eenvoudigste geval n.l. dat waarin $p_2 = 0$ is. Dan is

$$p = p_1(1-x_1)\,e^{-\alpha x_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dus een benaderde waarde voor den druk boven een zoutoplossing. Hierbij is α gelijk gesteld aan $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mu_{x_1}}{dx_1^2}\right)_p \frac{1}{MRT}$. De laatste uitdrukking is wel geen standvastige maar ook

met x veranderlijk; zoolang wij echter geen hoogere machten van x_1 dan de tweede macht behouden, kunnen wij voor $\left(\frac{d^2\mu_{x_1}}{dx_1{}^2}\right)_p$ de waarde nemen die deze uitdrukking in het punt $x = 0$ heeft en ze dus standvastig beschouwen. Ofschoon de fig. 1 zoo is geteekend alsof $\frac{d^2\mu_x}{dx^2}$ negatief is, is zij in alle gevallen waarin ik ze heb trachten te bepalen, positief gevonden.

Uit (4) volgt *):

$$-\frac{dp}{p_1 dx} = e^{-\alpha x^2}\left\{1 + 2\alpha x(1-x)\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

en

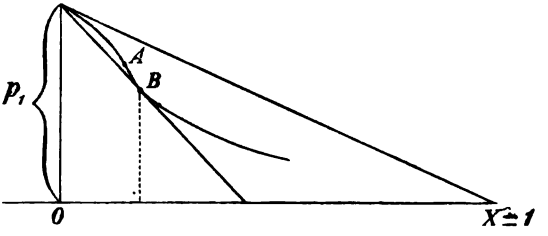
$$-\frac{1}{p_1}\frac{d^2p}{dx^2} = 2\alpha e^{-\alpha x^2}\left\{1-2x-2\alpha x^2(1-x)\right\} \; . \; . \; . \; (6)$$

Uit (5) blijkt, dat de druk altijd afneemt en $-\frac{1}{p_1}\frac{dp}{dx}$ voor x gelijk 0 een waarde gelijk aan de eenheid heeft, en dat bij $x = 1$ de waarde dezer uitdrukking gelijk aan $e^{-\alpha}$ is, waarbij echter moet opgemerkt worden, dat het onwaarschijnlijk zijn zou, dat voor zoo hoogen graad van concentratie de vorm (4) nog als voldoende benadering zou gelden. Uit (6) blijkt, dat voor kleine waarden van x de lijn $p = f(x)$ beneden de raaklijn ligt, maar dat vanaf zekere waarde van x het omgekeerde plaats vindt. Het buigpunt vinden wij uit $0 = 1-2x-2\alpha x^2(1-x)$.

Zoolang α positief is, heeft deze vergelijking een wortel $< \frac{1}{2}$. Die wortel ligt bij $x = \frac{1}{3}$ voor $\alpha = 2^1/_4$, bij $x = \frac{1}{4}$ voor $\alpha = 5^1/_3$, bij $x = \frac{1}{10}$ voor $\alpha = 45$ ongeveer. Naarmate α grooter is, verandert dus de kromme $p = f(x)$ spoe-

*) Daar voortaan slechts de samenstelling der vloeistof ter sprake zal komen, is er geen reden meer voor x het teeken x_1 te gebruiken.

diger van concaaf in convex. De loop der kromme is voorgesteld in Fig. 3.



Zij begint rakende aan de rechte lijn, die het boven uiteinde van p_1 vereenigt met het punt $x = 1$, welke rechte lijn zelve de druklijn zijn zou als $\alpha = 0$ is.

Beschouwt men niet den druk zelf, maar de drukvermindering, dan zou de bekende regel voor de drukverlaging voeren tot $\frac{p_1 - p}{p_1 x} = 1$.

Uit de figuur ziet men dat deze uitdrukking voor uiterste verdunning wel aan de eenheid gelijk is, maar al spoedig grooter dan de eenheid is, en tot zekere maximumwaarde aangroeit. Deze maximumwaarde verkrijgt men als men uit het boveneinde van p_1 een raaklijn aan de kromme trekt. Dit voert tot een waarde van x, die natuurlijk grooter is dan die, waarbij het buigpunt ligt. Het punt A der figuur geeft de plaats van het buigpunt aan en B het punt waarvoor $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ een maximumwaarde heeft. Vereenigt men het boveneinde van p_1 met een willekeurig punt der kromme en noemt men den hoek φ, die zulk een koorde maakt met een lijn evenwijdig aan de X-as, dan is $\text{tg.}\,\varphi = \frac{p_1 - p}{p_1 x}$.

Wordt die koorde een raaklijn dan, is $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ ook gelijk aan $-\frac{dp}{p_1\, dx}$ zooals zij in het raakpunt is.

§ 6. Om het bestaan van een maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$

aan te toonen, heb ik geraadpleegd de uitkomsten door REGNAULT verkregen bij oplossingen van $SO_4 H_2$ in water, medegedeeld in de physikalisch-chemische Tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN, pag, 52.

$x =$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
bij 35°	3.002	3.58	3.74	3.967	3.94	3.873	3.47	2.86	1.99
» 30°	3.077	3.56	3.78	4.03	3.966	3.887	3.48	2.87	1.99
» 20°	2.986	3.49	3.76	4.08	4.00	3.926	3.43	2.85	1.98
» 5°	2.84	3.83	3.67	4.10	4.02	4.005	3.47	2.82	1.97

De gang der waarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ is zoo regelmatig, dat wij recht hebben het tweede cijfer der benedenste horizontale rei aan een foutieve opgave toe te schrijven.

Het maximum moet dus liggen bij een waarde van x, die bij elk der opgegeven temperaturen niet veel van $x = {}^1/_8$ kan verschillen.

Nu ligt de maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$, als wij ten minste $p = p_1 (1 - x) e^{-\alpha x^2}$ mogen stellen, bij een waarde van x, die aan de volgende vergelijking moet voldoen

$$e^{x^2} = 1 + 2 \alpha x^2 (1 - x).$$

Kennen wij x, dan is α uit deze vergelijking te bepalen — en dit zou voor $x = {}^1/_8$ voeren tot een waarde van α, die dicht bij 60 zou liggen. Vóór ik dit kenmerk ter bepaling van α had toegepast, had ik door herhaalde beproeving de waarnemingen vrij wel sluitend gevonden met $\alpha = 37$ bij 35° en daar α omgekeerd met T is, met een iets grootere waarde bij lagere temperaturen. Dit verschil in de waarde van α, n.l. 37 of 60, was een eerste vingerwijzing, dat ter bepaling van p als functie van x nog iets

anders in rekening moest worden gebracht, dan hierboven gedaan is *).

Noemt men $\frac{p_1 - p}{p_1 x} = K$, dan levert elke waarneming een middel om α te bepalen, en wel is dan $e^{\alpha x^2} = \frac{1-x}{1-Kx}$. Op deze wijze vindt men voor α bij 35° uit de verschillende getallen der horizontale rei

$\alpha =$ 40 39 36.5 35.3 34.2 31.6 28.7 24 20

Al is het waar dat de laatste getallen, waar de druk tot zoo gering bedrag is gedaald, bijv. 0.28 mM. niet te vertrouwen zijn, dan valt een voortdurende afname van α niet te miskennen. Maar dit alleen zou niet behoeven te leiden tot het aannemen van een dissociatie van $SO_4 H_2$.

De theorie, zooals straks zal blijken, doet de afname van α met toenemende concentratie verwachten. Maar een dwingende reden om $p = p_1 (1-x) e^{-\alpha x^2}$ onvoldoende te verklaren zal geleverd worden als bij uiterst geringen graad van concentratie, de waarde van K nog veel van de eenheid verschilt. Voor kleine waarde van x, n.l. zulke waarvoor in plaats van $e^{-\alpha x^2}$ de waarde $1 - \alpha x^2$ kan gesteld worden, is

$$K = 1 + \alpha x.$$

Hoe groot ook α moge zijn, men kan dus x zoo klein nemen, dat K niet merkbaar boven 1 ligt. Bij de medegedeelde waarnemingen van REGNAULT was de kleinste waarde $x = \frac{1}{18}$ niet klein genoeg om te beslissen. Daarom moet het gelukkig geacht worden, dat ook vertrouwbare waarnemingen gedaan zijn bij kleinere waarden van x. Daarvoor was het echter noodig tot hoogere temperaturen de toe-

*) Ik had natuurlijk wel direkt nog bovendien een dissociatietheorie op den voorgrond kunnen stellen; maar ik wilde beproeven in hoever de verschijnselen van den druk alleen mij tot zulk een aanname zouden dwingen.

vlucht te nemen. Bij 100° is door TAMMAN een uitgebreide reeks van waarnemingen gedaan, waarbij ook waarnemingen omtrent $SO_4 H_2$ voorkomen; en waarbij x daalt tot 0,00892. Zij zijn o. a. opgenomen in OSTWALD, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie*, Band I, Seite 733. Zelfs bij deze kleine waarde van x vindt TAMMAN $p_1 - p = 12.9$ mM., wat tot een waarde van $K = 1.89$ voert. Bij andere stoffen vindt men bij dezelfde waarde van x nog grootere verhouding, en alles wijst er op, dat de limietwaarde vau K voor $x = 0$ gelijk gesteld moet worden aan 2, en men dus bij oplossing van zouten en zuren en bases in water in het algemeen dissociatie zal moeten aannemen. Wel blijft de gang der waarde van K een dusdanige, dat zij door dissociatie alleen niet te verklaren is, iets wat trouwens algemeen erkend wordt. In het volgende hoop ik aan te toonen, dat de gang in zijn hoofdtrekken begrijpelijk wordt, als men naast de dissociatie (de chemische reden der afwijking van de eenheid) ook in aanmerking neemt dat er een physische reden voor de afwijking is, die door den factor α wordt aangeduid. Daarvoor is het echter noodig te zoeken welke verandering het ψ-vlak, dat aan mijn onderzoek ten grondslag ligt, ondergaat als de tweede stof zich dissociëert.

§ 7. Betrof het alleen zouten, die in water opgelost afwijkingen voor K van 1 vertoonden, dan zou het voor de hand liggen de dissociatie te zoeken in splitsing in zuur en basis.

Maar nu ook $SO_4 H_2$, KOH, enz. dezelfde soort afwijkingen vertoonen, kan, ten minste bij die stoffen, van geen andere dissociatie sprake zijn, dan van de electrolytische. Wij zullen dus $SO_4 H_2$ gesplitst moeten denken ten minste partieel in de ïonen SO_4 en H_2, terwijl wij tegelijk ten minste van een der ïonen moeten aannemen, dat die niet in de dampphase kan overgaan; dus dat daarvoor de hiervoor genoemde grootheid $p_2 = 0$ is, zooals dat voor $SO_4 H_2$ in zijn geheel aangenomen werd. Die eigenschap behoeft niet voor beide ïonen afzonderlijk te bestaan. Ten minste als wij, zooals de theorie der electrolyse doet, de ïonen als

dragers van electriciteit, mogen beschouwen — en dat ook mogen doen niet alleen als er electrische inductie is, maar ook in een neutraal veld. In dat geval zal zoodra H_2, de drager der positieve electriciteit, slechts voor een gering gedeelte in de gasphase is overgegaan, zooals H_2 in onelectrischen toestand noodwendig schier geheel doen zou, door het enorme potentiaalverschil dat dan tusschen vloeistof en damp bestaan zou, dit bestanddeel in de vloeistof worden teruggetrokken Wij nemen met de theorie der electrolyse in het volgende aan dat dit potentiaalverschil zoo groot is, dat wij de hoeveelheid, die in de dampphase overgaat, mogen verwaarloozen.

§ 8. Brengen wij bij elkander $1-x$ molekulen water en x molekulen SO_4H_2, dan zal na menging voorhanden zijn $1-x$ mol. water, $x-y$ mol. zuur, y mol. SO_4 en y mol. H_2 *). Voor een homogene phase van dit mengsel is $p = \frac{MRT(1+y)}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, waarin a en b nu functiën van x en y zijn. Zij bijv. bij benadering

$$b = b_1(1-x) + b_2(x-y) + b_3 y + b_4 y,$$

zoodat dan alleen $\frac{db}{dy} = 0$ is als wij mogen aannemen $b_3 + b_4 = b_2$ — ingeval dus het molekulairvolume van de 2 ïonen gelijk is aan dat vóór de splitsing.

Ook a is een functie van x en y, waarbij het mogelijk is dat $\frac{da}{dy}$, zoo niet rigoreus gelijk nul, toch als klein beschouwd mag worden. Maar voorloopig ten minste zullen wij deze onderstelling niet invoeren. De functie ψ is nu gelijk aan

$$-MRT(1+y)\log(V-b) - \frac{a}{V} + \varphi(xy)$$

en $\varphi(x, y)$ kan op dezelfde wijze gevonden worden als in

*) Het geval wordt behandeld van splitsing in 2 ïonen — en SO_4H_2 als voorbeeld gekozen, ofschoon de binaire splitsing in dat geval niet zeker is.

de *Théorie moléc* etc., § 4 of § 14 geschied is met wat toen alleen een functie van x was. Men vindt dan

$$\psi = -MRT(1+y)\log(V-b) - \frac{a}{V} +$$
$$+ MRT\{(1-x)\log(1-x) + (x-y)\log(x-y) + 2y\log y\}$$
$$+ (1-x)(E_1 - TH_1) + (x-y)(E_2 - TH_2)$$
$$+ y(E_3 - TH_3) + y(E_4 - TH_4).$$

In hetzelfde volume en bij onveranderde x kunnen wij voor y alle mogelijke waarden denken tusschen 0 en x. Maar slechts die waarde zal inderdaad voorhanden zijn, welke ψ tot een minimum maakt — of met andere woorden — y wordt bepaald door $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{VXT} = 0$ te stellen

Men vindt dan:

$$\text{og}\frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = -\frac{E_3 + E_4 - E_2}{MRT} + \frac{H_3 + H_4 - H_2}{MR} -$$
$$-1 - \frac{\left(\frac{MRT}{V-b}\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{1}{V}\right)}{MRT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

In deze formule stelt $E_3 + E_4 - E_2$ het energieverlies voor, wanneer de twee ionen zich tot een mol. SO_4H_2 verbinden. Evenzoo $H_3 + H_4 - H_2$ het entropieverlies bij die vereeniging. V is het uitwendig volume der $1 + y$ molekulen en $V-b$ dat, wat aan de warmtebeweging ten goede komt.

Deze formule is reeds door Ostwald, ofschoon op geheel andere wijze, gevonden *) — en met afwijkingen trouwens. Vooreerst komt de laatste term niet voor. Maar die term zou, zooals hiervoor opgemerkt is, misschien kunnen wegvallen, ten minste als het gezamenlijk molekulairvolume der SO_4H_2 molekulen hetzelfde mag gesteld worden vóór en na de splitsing. Evenzoo zou $\frac{da}{dy}$ wegvallen, als men mag

*) *Physik. Chemie*, Band II, S. 278.

aannemen, dat de molekulairattractie volkomen hetzelfde blijft voor al of niet gesplitste molekulen, als men die attractie dus als de stof maar dezelfde blijft steeds even groot mag beschouwen — iets dat mogelijk is, maar geheel onzeker *).

Ostwald schrijft de formule in een vorm die op het volgende neerkomt;

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} = \left(\frac{V}{x} - \beta\right) C$$

en beschouwt β als het volume der zuurmolekulen.

Na weglating van den laatsten term kan de hier gevondene formule geschreven worden:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} = C\frac{V-b}{x} = C\left[\frac{V-b_1}{x} - (b_2-b_1)\right].$$

Men mag echter hierbij niet over het hoofd zien dat V zelf een functie van x is. Het stelt namelijk het molekulair-volume van het mengsel voor en neemt dus met x toe. Bij gegeven temperatuur zal

$$y^2 = C(x-y)\left(1 + \frac{b_2-b_1}{b_1}x\right)$$

een formule zijn die met hoogen graad van benadering het aantal gesplitste molekulen doet vinden. Bij geringen graad van concentratie kan $y^2 = C(x-y)$ gesteld worden.

§ 9. De waarde van y uit (8) opgelost en in ψ gesubstitueerd geeft nu ψ in functie van x en V, en dit gewijzigd ψ-vlak kan nu voeren tot de waarde van p; als, evenals vroeger, de thermodynamische potentiaal voor een watermolekuul bepaald wordt. Wij hebben dus te bepalen de

*) Men zie omtrent deze kwestie een volgenden arbeid: „De formule der electrolytische dissociatie."

waarde van $\psi + pV - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{Y,VT}$ en die voor de damp- en vloeistof-phase aan elkander gelijk te stellen. Daar $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT} = 0$ is, kan men evengoed bepalen:

$$\psi + pV - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{YVT} - y\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT}$$

Stellen wij nu:

$$pV - MRT(1 + y)\log\frac{V-b}{1+y} - \frac{a}{V} = \mu_{xy}$$

dan vinden wij

$$M_1\mu_1 = MRT\log\frac{1-x}{1+y} + \mu_{xy} - x\frac{d\mu_{xy}}{dx_{ypT}} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy_{xpT}} + E_1 - TH_1.$$

Is nu in de dampphase zoowel x als y voor elk der ionen $= 0$, dan is

$$MRT + MRT\log\frac{p}{MRT} = MRT\log\frac{1-x}{1+y} + \mu_{xy} - x\frac{d\mu_{xy}}{dx_{ypT}} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy_{xpT}}.$$

Is $x = 0$ dan is ook $y = 0$ en $p = p_1$, en dus

$$p = p_1\frac{1-x}{1+y}e^{-\frac{\mu_{xy} - \mu_1 - x\frac{d\mu_{xy}}{dx} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy}}{MRT}} \quad \ldots . (9)$$

Evenals hiervoor is opgemerkt, kunnen wij als benadering μ_x voor een bepaalde waarde van p kiezen bijv. p_1 en de verandering verwaarloozen die veranderde waarde van p in de waarde van μ_{xy} teweeg brengt, met andere woorden μ_{xy} als functie van x en y alleen beschouwen, en daar y van x afhangt eigenlijk van x alleen.

Voor $\mu_{xy} - \mu_1 - x\frac{d\mu_{xy}}{dx} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy}$ kunnen wij schrijven

$$-\frac{1}{2}\left\{x^2\frac{d^2\mu_{xy}}{dx^2}+2xy\frac{d^2\mu_{xy}}{dxdy}+y^2\frac{d^2\mu_{xy}}{dy^2}\right\}$$

en de formule (9) in den vorm:

$$p=p_1\frac{1-x}{1+y}e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}\quad\ldots\ldots(10)$$

§ 10. Nemen wij voor een oogenblik aan dat α, β en $\gamma=0$ is, dus dat er geen invloed van zuiver physischen aard op de grootte der drukking aanwezig is, dan zouden wij mogen stellen:

$$p=p_1\frac{1-x}{1+y}$$

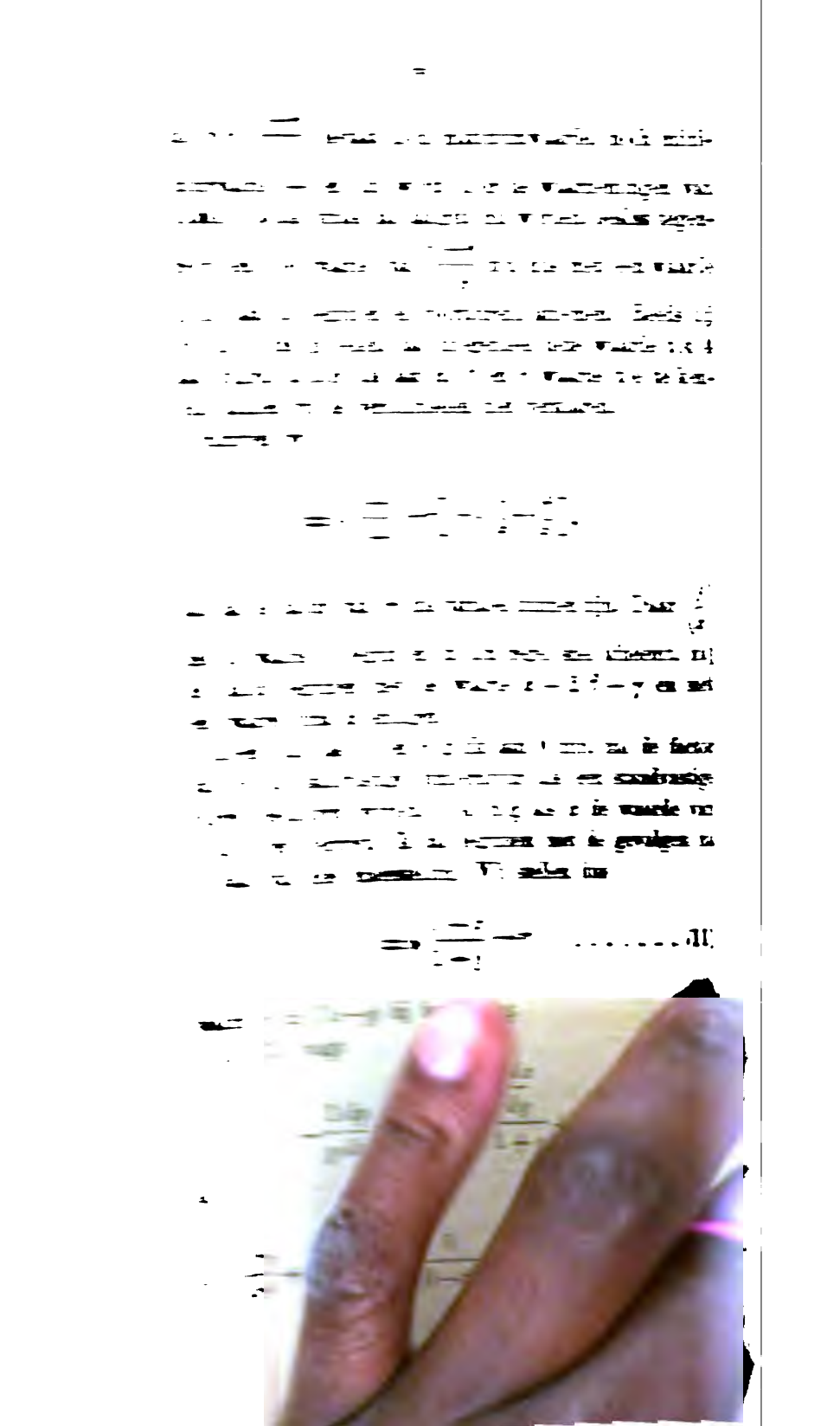
$$-\frac{dp}{p_1dx}=\frac{1}{1+y}+\frac{1-x}{(1+y)^2}\frac{dy}{dx}$$

en

$$-\frac{1}{p_1}\frac{d^2p}{dx^2}=-\frac{2}{(1+y)^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2(1-x)}{(1+y)^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1-x}{1+y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

De tweede dezer vergelijking leert ons dat de waarde van $-\frac{1}{p_1}\frac{dp}{dx}$ steeds positief is, dus de druk steeds afnemende als x aangroeit. De waarde voor $x=0$ is gelijk aan 2, daar tegelijk met x ook $y=0$ is en $\frac{dy}{dx}$ voor $x=0$ gelijk is aan de eenheid. Uit $y^2=C(x-y)$, vinden wij n.l. $\frac{dy}{dx}=\frac{C}{C+2y}$.

Dit zijn uitkomsten die door de ervaring bevestigd worden — zeker niet tegengesproken. Uit de derde dezer vergelijkingen volgt, daar $\frac{d^2y}{dx^2}$ negatief is, dat $\frac{d^2p}{dx^2}$ positief is, dus dat de kromme steeds boven de raaklijn ligt. Van uit het boveneinde van p_1 kan dus geen andere raaklijn aan de kromme getrokken worden dan in het beginpunt zelf —



Uit de eerste dezer vergelijking volgt dat de waarde van $-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$, en dus ook de waarde van $\frac{p_1-p}{p_1 x}$, begint met 2, en dat $\frac{dp}{dx}$ voortdurend negatief is. Er kan dus geen maximum- of minimumdruk zijn. Uit de tweede volgt, dat het mogelijk is, dat de kromme in het beginpunt een buigpunt bezit. Dan moet n.l. voor x en $y = 0$ ook $\frac{d^2 p}{d x^2} = 0$ zijn en dus

$$4 = 1 - 1 - \frac{2}{C} + 2\alpha$$

of

$$(\alpha - 2)\, C = 1.$$

Is die voorwaarde niet juist vervuld, dan vindt men he teeken van $\left(\frac{d^2 p}{d x^2}\right)_{x=0}$ uit de vergelijking:

$$-\frac{1}{p}\left(\frac{d^2 p}{d x^2}\right)_{x=0} = -4 - \frac{2}{C} + 2\alpha = +\frac{2}{C}[(\alpha - 2)\, C - 1].$$

Is dus $(\alpha - 2)\, C > 1$ dan ligt de kromme in het beginpunt beneden de raaklijn en zal dus $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ met de waarde 2 beginnen en bij iets grootere waarde van x grooter dan 2 zijn. Is daarentegen $(\alpha - 2)\, C < 1$ dan begint deze waarde wel met 2, maar is zij spoedig kleiner.

Nu is C altijd een kleine grootheid, afwisselende in de gevallen, waarin ik ze heb trachten te bepalen, tusschen 0.056 en 0.002. Zoodra dus $(\alpha - 2)\, C$ merkbaar van de eenheid verschilt, is de kromming in den beginne groot, en moet dus de waarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$, behalve als $(\alpha - 2)\, C - 1$ zelve klein is, snel veranderen.

Het geval $(\alpha - 2)\, C > 1$ komt voor telkens als in de opgaven voor de drukverlaging van Tamman het eerste cijfer merkbaar meer bedraagt dan 13.56 mM., een cijfer, dat men vindt, door $p_1 - p$ te berekenen uit $\frac{p_1 - p}{p_1 x} = 2$, in aanmer-

king nemende, dat $p_1 = 760$ en $x = 0.00892$ is. In verreweg de meeste gevallen is het cijfer lager. Bij KOH en LiOH is het hooger, terwijl bij anderen, waar het veel hooger is, zeker wel meer samengestelde dissociatie, dan hier ondersteld is, in het spel komt. Ook bij LiJ is het eerste cijfer iets boven 13.56 en wel bedraagt het 13.6. Het verschil is hier zoo gering, dat wij wel tot $(\alpha - 2)\ C = 1$ kunnen besluiten.

Is $(\alpha - 2)\ C \geqq 1$, dan is de loop der kromme eenvoudig, en komt overeen met die in Fig. 2 — met dit verschil dat de beginrichting niet samenvalt met een lijn die naar het punt gericht is, waarvoor $x = 1$ is, maar waarvoor $x = {}^1/_2$ is. Het buigpunt komt voor, eveneens als de maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$. Men vindt de waarde van x waarvoor $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ maximumwaarde heeft uit de vergelijking:

$$(1 + y)\, e^{\alpha x^2} = 1 + x\,(1 - x) \left\{ \frac{\frac{dy}{dx}}{1 +} + 2\,\alpha\, x \right\} \quad . \ . \ (12)$$

terwijl, als wij weder $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ door K voorstellen

$$(1 + y)\, e^{\alpha x^2} = \frac{1 - x}{1 - K x} . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

De vergelijking (12) heeft steeds een wortel ook in het geval dat $(\alpha - 2)\ C < 1$ zooals bij SO_4H_2 het geval is. Wij kunnen ze dus ook gebruiken bij SO_4H_2 en doen zien, dat hoe groot men ook het bedrag der electrolytische dissociatie zou willen stellen zelfs tot volkomen splitsing in ïonen toe, de grootheid α een hooge waarde heeft.

Door verbinding van (12) met (13) verkrijgt men n.l.

$$\frac{1 - x}{1 - K x} = x\,(1 - x) \left\{ \frac{\frac{dy}{dx}}{1 + y} + 2\,\alpha\, x \right\} + 1.$$

Bij de proeven van REGNAULT kon bij 35° $K = 4$ en $x = \frac{1}{8}$ gesteld worden, en dus

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y} + \frac{4}{\alpha} = 6.7$$

of

$$\alpha = 27 - 4\,\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y}.$$

Nam men volledige dissociatie aan, dan zou α nog circa 23 zijn — of met andere woordan — uit de waarnemingen omtrent de plaats van het maximum en van de waarde van K_m vindt men α tusschen 27 en 23.

Terwijl zelfs, als die waarnemingen volkomen scherp zich lieten doen èn α èn C daaruit te bepalen zouden zijn. Maar juist in de genoemde gevallen waar $(\alpha - 2)\,C > 1$ is zijnde waarnemingen van TAMMAN niet ver genoeg voortgezet om het maximum te toonen. De waarnemingen zijn gedaan bij waarden van x:

	0,00892	0,01768	0,03475	0,05123	0,06715	0,08257	0,09747	0,12587	0,15242
KOH	2,210	2,191	2,424	2,548	2,743	2,894	2,981	3,236	3,348
Li J	2,006	2,128	2.450	2,70	3,027	3,283	3,53	3,732	3,842

De cijfers der twee laatste rijen zijn de waarden van K. Het maximum is dus nog niet bereikt bij $x = 0,15242$, maar schijnt niet veel verder te zullen liggen. Het eerste cijfer in de recks bij KOH zal wel foutief zijn. Bij beide stoffen is van den beginne af aan $K > 2$ en stijgt tot een vermoedelijk maximum en zal dus $(\alpha - 2)\,C > 1$. Voor KOH had ik door herhaalde beproeving gezocht welke waarde voor C en α moeten gekozen worden. Met $C = 0,056$ en $\alpha = 20,8$ had ik een goede overeenstemming gekregen. Het product $(\alpha - 2)\,C = 1,023$ dus slechts weinig grooter dan 1. Maar was dit product veel grooter dan 1, dan is hierboven opgemerkt dat de drukkromme zoo sterk gekromd

zou zijn, dat reeds bij $x = 0{,}00892$ de waarde van K ver boven 2 zou liggen.

§ 11. Het geval $(\alpha - 2)\, C < 1$ vertoont meer complicaties. Daartoe behoort ook SO_4H_2. De waarden van K zijn voor dezelfde waarden van x:

x	0,00892	0,01768	0,03475	0,05123	0,06715	0,08257	0,09747	0,12587
k	1,89	1,971	2,379	2,67	2,9	3,184	3,3	3,59

De waarde van K die bij $x = 0$ gelijk aan 2 is, is dus eerst gedaald tot beneden 2, is bij zekere waarde van x weder gelijk aan 2 geworden om van daaruit verder toe te nemen tot zekere maximumwaarde die bij 100° dus ligt bij een waarde van $x > {}^1/_8$. Er moet dus een waarde van x aan te wijzen zijn, waarvoor K een minimum geweest is. Maar dat was dan ook eigenlijk uit het vroeger opgemerkte reeds af te leiden. Zoodra $(\alpha - 2)\, C < 1$ is, ligt de kromme in den beginne boven de raaklijn en moet dus de waarde van K verminderen — maar niet onbeperkt, daar reeds uit de waarnemingen van Regnault gebleken was dat er nog bovendien een maximum bestond. Ik had door herhaald beproeven de waarde van $C = 0{,}01$ gevonden. Neemt men die waarde aan en berekent men voor elke x der waarnemingen de waarde van y door $y^2 = C(x - y)$, dan kan uit elke waarde van p der proef den factor van x^3 berekend worden in de vergelijking:

$$p = p_1 \frac{1 - x}{1 + y} 10^{-\alpha x^1}$$

In gewone logarithmen waren de verschillende waarden van α':

$12^1/_8$	11,6	12,2	12,5	12,02	12,18,	11,99	11,87

en dus in Nep. log gemiddeld 28. De waarde van $(\alpha - 2)\, C = 0{,}26$, dus zooveel kleiner dan 1, dat de kromming der lijn sterk moet zijn. Spoedig moet de waarde van K dus beneden 2 dalen. Het minimum ligt reeds vóór

de eerste waarde van x. Daar x zoo klein is kunnen wij met een benaderingsformule volstaan om x te berekenen en voor $e^{-\alpha x^2}$ de waarde $(1 - \alpha x^2)$ schrijven, en dus $K = 1 + \frac{y}{x} + \alpha x$ stellen.

$$\frac{dK}{dx} = \frac{d\frac{y}{x}}{dx} + \alpha = 0$$

Uit $y^2 = C(x - y$, vindt $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$

of

$$\frac{x}{C} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{dx}{C} = \left(-\frac{2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) d\frac{x}{y}$$

of

$$\alpha C = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{2 - \frac{y}{x}} = 0{,}28 \ldots\ldots\ldots (14)$$

Aan deze vergelijking voldoet $\frac{y}{x} = 0{,}71$ en met $\frac{x}{C} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ berekent men met $C = 0{,}01$, $x = 0{,}00576$.

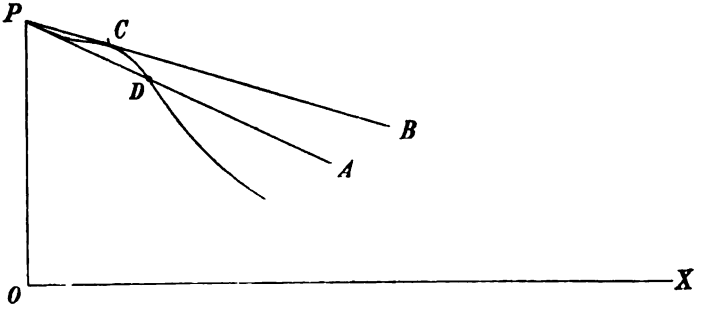
Waren de proeven dus vóór die waarde van x begonnen, dan zou men eerst eenigszins afnemende waarde van K gezien hebben en niet evenals nu steeds klimmende. Met $\alpha = 28$ wordt de minimumwaarde van K echter maar weinig verschillend gevonden van de eerste door TAMMAN opgegevene n.l. $K_m = 1{,}87$

De waarde van x waarvoor K opnieuw gelijk aan 2 is, kan uit de volgende benaderingsvergelijkinge gevonden

worden, ten minste als ook deze waarde van x nog klein genoeg is om $e^{-\alpha x^2} = 1 - \alpha x^2$ te mogen stellen:

$$(1 - \alpha x)^2 = C(\alpha - 2)(1 - 2x)$$

Een wortel dezer vergelijking is gelijk aan $x = 0{,}018$ wat met de getallen van TAMMAN vrij goed sluit. De andere wortel ligt te vèr weg om als benaderingswaarde te kunnen gelden voor de plaats waar later K weder 2 is, na zijn maximumwaarde. Binnen dat kleine interval dus, van $x = 0$ tot $x = 0{,}018$ is, bij SO_4H_2, de complicatie ten einde gespoed, die het geval $(\alpha - 2)\,C < 1$ bezit boven het geval $(\alpha - 2)\,C > 1$.



In Fig. 3 moet de lijn PA gedacht worden de X-as te snijden op afstand van $O = {}^1/_2$ en de lijn PB op grooteren afstand van O. Nu begint de kromme rakend aan PA met de convexe zijde naar beneden; maar die wijze van kromming keert spoedig om. In C raakt de kromme aan de lijn PB. In D snijdt zij de lijn PA weder. Bij SO_4H_2 is de x van $C = 0{,}00576$ en die van $D = 0{,}018$, terwijl de plaats van het nieuwe buigpunt natuurlijk nog voor C liggen moet.

Bij benadering kan men die plaats berekenen uit

$$1 + \frac{4x}{C} = \frac{1}{\sqrt{{}^1/_2\, C(\alpha - 2)}}.$$

Bij SO_4H_2 geeft dit $x = 0.0035$.

Van $x = 0$ tot $x = 0.0035$ is dus de bolle zijde der

kromme naar beneden gekeerd; van $x = 0.0035$ tot $x < 0.125$ daarentegen de holle zijde. Voor grootere waarde weder de bolle zijde.

§ 12. Ook voor oplossingen van NaCl heb ik de waarden van C en α bepaald, die noodig zijn om aan de waarnemingen van TAMMAN te voldoen — en heb p kunnen voorstellen door

$$p = p_1 \frac{1 - x}{1 + y} 10^{-6x^2}$$

als y berekend wordt uit $y^2 = 0.01453\ (x - y)$.

C is dus gelijk aan 0.01453 en $\alpha = 13.6$.

De loop der kromme komt met die van SO_4H_2 oplossing overeen. De waarden van K zijn voor de hierboven opgegeven waarden van x:

1.817	1.875	1.974	2.054	2.175	2.274	2.36.

De in Fig. 3 voorgestelde complicatie der lijn duurt hier echter langer en eerst bij $x = 0.05$ is de waarde van $K = 2$ geworden. Volgens de formule zou dit echter eerst bij $x = 0.06$ het geval zijn.

Nu kan de waarde van C en α zoodanig zijn, dat ook het minimum van K ver naar voren verschoven is en wel zoover, dat het valt binnen de grenzen van x, die bij de proeven van TAMMAN voorkomen.

Een dergelijk geval komt voor o. a. bij oplossingen van NH_4Cl. De waarden van K zijn:

1.77	1.766	1.71	1.78	1.845	1.885	1.85	1.885	1.85

Het 7de cijfer der reeks (1.85) staat vreemd tusschen de vorige en volgende in — en men zou geneigd zijn dit tot 1.89 te willen verhoogen. De drukvermindering, die door TAMMAN 138.2 mM. wordt opgegeven, zou dan 141.4 mM. moeten bedragen hebben. Maar ook dan nog is de waarde van x voor de maximumwaarde te dicht gelegen bij die voor de minimumwaarde om ze te kunnen verklaren door de form:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-\alpha x^2}$$

ten minste als α constant blijft. Ik meen dus hier een geval te mogen zien, dat alleen verklaard kan worden door aan te nemen:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} \text{ *)}.$$

En dit geval staat niet alleen. Telkens wanneer de factor van x^2 klein gevonden wordt. kan, welke waarde van C ook gekozen wordt, geen standvastige waarde gevonden worden, maar neemt zij af als x toeneemt. Het zou natuurlijk mogelijk zijn voor C, α, β en γ uit 4 waarnemingen van elke oplossing een stel waarden te bepalen, waardoor behoorlijk de waarnemingen worden wedergegeven — maar als dan ook met de overigen, die niet tot de bepaling hebben gediend, sluiting gevonden werd, zou de bewijskracht gering zijn, zoolang het niet gelukt is theoretisch aan te toonen in welk verband die grootheden tot elkander moeten staan. In dat opzicht ben ik nog niet tot zekerheid gekomen.

B. Wet van Henry.

§ 13. Onder den naam van »wet van Henry" zullen wij die verschijnselen samenvatten, waarbij in de formule (2) de eerste term kan weggelaten worden of in de formule

$$p = p_1 (1-x)\, e^{\frac{\mu z - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu}{dz}\right)_p}{MRT}} + p_2\, x\, e^{\frac{\mu z - \mu_2 + (1-z)\left(\frac{d\mu}{dz}\right)_p}{MRT}}$$

de grootheid p_1 verwaarloosd kan worden tegenover $p_2 x$. Wordt SO_2 in water opgelost, dan stelt dus p_2 de drukking

---

*) Of door physische redenen, die α doen afnemen. (Zie later).

van den verzadigden damp van SO_2 bij de temperatuur der waarneming voor en p_1 die van water, welke laatste ten minste bij lagere temperaturen en bij een totale drukking die p_1 vèr overtreft verwaarloosd kan worden. Dat men in zulke gevallen van den totalen druk steeds p_1 aftrekt, is, volgens het vorige, wel niet strikt juist, maar de fout. die hierdoor begaan wordt, kan niet van invloed zijn op den algemeenen gang der verschijnselen.

Bij SO_2 oplossingen is dus de beteekenis van p_2 duidelijk aan te wijzen. Maar bij oplossingen van stoffen als O_2, CO enz., waarvoor de temperatuur der waarneming hooger ligt dan haar kritische temperatuur, heeft p_2 een waarde die niet door proefneming te bepalen zou zijn; dan is het beter tot de vergelijking (2) terug te gaan.

Wij stellen dus

$$p = p_2 x e^{\frac{\mu_x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}}{MRT}}$$

of

$$p = MRT x e^{\frac{\mu_x + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}}{MRT} - 1}.$$

Uit beiden volgt:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT} + \left(\frac{d\mu_x}{dp}\right)_{xT}\frac{dp}{dx} + (1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx\,dp}\right)_T\frac{dp}{dx}}{MRT}.$$

Nu is bij standvastige temperatuur

$$d\left\{pV - MRT\log(V-b) - \frac{a}{V}\right\} = \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p dx + V\,dp$$

waarin V het volume van 1 molekuul van het mengsel in vloeistoftoestand voorstelt en dus $\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = V$ is, terwijl $\frac{d^2\mu_x}{dp\,dx} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_p$ is.

Zoolang nu $\frac{pV}{MRT}$ en $\frac{p\left(\frac{dV}{dx}\right)_p}{MRT}$ zeer kleine breuken zijn, kan gesteld worden;

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT}}{MRT}$$

of

$$\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1 + \frac{x(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT}}{MRT}$$

De wet van Henry, als volkomen juist aannemende, zou $\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1$ moeten zijn. Zoo die wet dus streng goldt, zou $\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right) = 0$ moeten zijn. Als eerste benadering kan, zoolang x klein is, $\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1$ worden aangenomen. Maar de afwijking is hier niet van de 2de orde van kleinheid, maar slechts van de 1ste orde.

Zien wij die afwijking over het hoofd dan zou men misschien kunnen meenen dat $p = p_2 x$ als de formule moet worden aangenomen, maar ten onrechte, want ook als $p = kp_2 x$ (k een willekeurige constante) wordt gesteld, is $\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1$. Was inderdaad, van $x = 0$ tot $x = 1$ toe, μ_x een lineaire functie, dan eerst zou de formule $p = p_2 x$ gelden; maar gevallen waarin dat gelden zal, komen bij de verschijnselen waarbij de wet van Henry wordt toegepast, niet voor. Is daarentegen μ_x een lineaire functie, of daarmede practisch gelijk te stellen, alleen binnen zekere grenzen van x, van 0 af tot zekere waarde x_3 bijv., zoodat $\mu_x + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p = \mu_3$ kan gesteld worden, dan wordt

$$p = p_3 x e^{\frac{\mu_3 - \mu}{MRT}}$$

wat met $p = k\, p_2\, x$ overeenkomt. Daaruit volgt dat, tenzij men μ_3 en μ_2 leert kennen, aan de wet van HENRY geen middel kan ontleend worden om het aantal molekulen in een oplossing te bepalen. Wat hier gezegd is komt overeen met in Fig. 1 de kromme voor kleine waarden van x een zwakke kromming te geven, maar een richting die ver boven E heenwijst. Als allereerste benadering zou men ze als een rechte kunnen beschouwen, dus $\left(\frac{d^2\mu}{d\,x^2}\right)_{pT} = 0$ stellen. Wij zullen een waarde voor $\left(\frac{d^2\mu}{d\,x^2}\right)_{pT}$ aannemen, maar die als constant beschouwen, en dus stellen

$$p = p_2\, e^{\frac{\mu_2 - \mu_1}{MRT}}\, x\, e^{\frac{\alpha x(1 - \frac{1}{2}x)}{MRT}}$$

of met nog eenige vereenvoudiging:

$$p = C\, x\, e^{\beta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waaruit

$$\frac{dp}{dx} = C\, e^{\beta x}\,(1 + \beta x)$$

en

$$\frac{d^2p}{dx^2} = C\, e^{\beta x}\, \beta\,(2 + \beta x)$$

Waar afwijkingen van de wet van HENRY met zekerheid bekend zijn is de afwijking in dien zin dat $\frac{x}{p}$ met toenemenden druk afneemt. Dit beteekent dus dat β positief is, en daar β hier voorstelt, wat α bij de zoutoplossingen beteekende, zijn deze uitkomsten in overeenstemming. Alleen bij NH_3 bij 0^0, is dit slechts in den beginne waar, waaruit blijkt, dat $\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$ slechts approximatief standvastig mag genomen worden en, wat wel de regel zijn zal, eigenlijk afnemende is.

C. Invloed der temperatuur.

§ 14. Zij p de druk in een ruimte waarin zich twee phasen van een mengsel bevinden, de vloeistofphase gegeven door x_1 en de dampphase door x_2. Verandert de temperatuur dan zullen in het algemeen x_1 en x_2 veranderen. Door verandering van het volume is het altijd mogelijk x_1 op het oorsproukelijk bedrag terug te brengen. Zij dT de verandering in temperatnur dan kan gemakkelijk bewezen worden:

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{x_1} - 1 = \frac{\frac{a_{x_1}}{V_1} + (x_2 - x_1)\frac{d\left(\frac{a_x}{V_1}\right)}{dx}_{pT}}{MRT} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Wij zullen het bewijs doen volgen, om tegelijk te doen zien, dat deze vergelijking alleen geldt als bij de dampphasen de gaswetten als volkomen geldig worden aangenomen.

Verandert bij een homogene phase ook de temperatuur dan is $Vdp = \eta\, dT + d\,M_1\mu_1 + x\, d\,(M_2\mu_2 - M_1\mu_1)$ als wij door η de entropie voorstellen en door $M_1\mu_1$ en $M_2\mu_2$ de thermodynamische potentialen der 2 stoffen, en dus geldt de vergelijking

$$(V_2 - V_1)\, dp = (\eta_2 - \eta_1)\, dT + (x_2 - x_1)\, d\,(M_2\mu_2 - M_1\mu_1)$$

of

$$(V_2 - V_1)\, dp = (\eta_2 - \eta_1)\, dT + (x_2 - x_1)\, d\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)_{VT}$$

en daar

$$d\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)_{VT} = \left(\frac{d^2\psi}{dx_1^2}\right)_{pT} dx_1 + \left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT} dp - \left(\frac{d\eta_1}{dx_1}\right)_{pT} dT$$

is

$$\left\{ V_2 - V_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT}\right\}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x = \left\{\eta_2 - \eta_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{d\eta_1}{dx_1}\right)_{pT}\right\}$$

Deze vergelijking verbonden met

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-T(\eta_2-\eta_1)+p(V_2-V_1)=(x_2-x_1)\frac{d\{\varepsilon_1-T\eta_1+pV_1\}}{dx_{1pT}}$$

leidt tot

$$\left\{(V_2-V_1)-(x_2-x_1)\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT}\right\}\left\{T\left(\frac{dp}{dT_x}\right)-p\right\}=$$

$$=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-(x_2-x_1)\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx_1}\right)_{pT}.$$

Is de tweede phase nu een dampphase, dan kan V_1 en $\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT}$ verwaarloosd worden en voor $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$ de waarde $\frac{a_x}{V_x}$ gesteld worden, waaruit (1) volgt.

Voor een enkelvoudige stof wordt dit:

$$\frac{T}{p}\frac{dp}{dT}-1=\frac{\frac{a}{V}}{MRT}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

terwijl als integraal dezer vergelijking de uitdrukking

$$\log\frac{p}{MRT}=\frac{\mu}{MRT}-1\ldots\ldots\ldots(3)$$

kan beschouwd worden.

Voor een zoutoplossing, waarbij $x_2=0$ is, (en geen dissociatie plaatsgrijpt) wordt dit

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x-\frac{T}{p_1}\frac{dp_1}{dT}=\frac{\frac{a_x}{V_x}-x\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}-\frac{a_1}{V_1}}{MRT}\ldots(4)$$

Voor oplossingen van gassen, waarbij $x_2=1$ kan gesteld worden

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x-\frac{T}{p_2}\frac{dp_2}{dT}=\frac{\frac{a_x}{V_x}+(1-x)\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}-\frac{a_2}{V_2}}{MRT}\ldots(5)$$

terwijl wij de integralen dezer vergelijkingen hierboven vonden. Voor zoutoplossingen:

$$\log \frac{p}{p_1} = \log (1 - x) + \frac{\mu_x - x \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} - \mu_1}{MRT} \quad . . (6)$$

en voor gasoplossingen:

$$\log \frac{p}{p_2} = \log x + \frac{\mu_x + (1 - x) \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} - \mu_2}{MRT} \quad . . (7)$$

Integreert men de vergelijking (4) en (5), aannemende dat $\frac{a_x}{V_x}$ een grootheid is, die slechts weinig met de temperatuur verandert, dan vindt men

$$\log \frac{p}{p_1} = f(x) - \frac{\frac{a_x}{V_x} - x \left(\frac{d \frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} - \frac{a_1}{V_1}}{MRT} \quad . . . (8)$$

en

$$\log \frac{p}{p_2} = \varphi(x) - \frac{\frac{a_x}{V_x} + (1 - x) \left(\frac{d \frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} - \frac{a_2}{V_2}}{MRT} \quad . . (9)$$

Als men nu (6) met (8) vergelijkt en (7) met (9) komt men tot de vraag: kan

$$- \left\{ \frac{a_x}{V_x} - \frac{a_1}{V_1} - x \left(\frac{d \frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} \right\}$$

ten minste bij benadering gelijk gesteld worden aan

$$\mu_x - \mu_1 - x \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} \text{ en } - \left\{ \frac{a_x}{V_x} - \frac{a_2}{V_2} + (1 - x) \left(\frac{d \frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} \right\}$$

met $\mu_x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\,\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}$? Was dit zoo, dan was de waarde van $\left\{\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}\right\}$, die bijv. bij SO_4H_2 zoo groot gevonden werd en bij andere oplossingen kleiner was, met andere bekende eigenschappen der stoffen in verband gebracht.

Stellen wij door W_x de warmte voor, die bij de menging van $(1-x)$ molekulen der 1ste stof met x der 2de stof vrij komt, en door E_x de energie van het mengsel, door E_1 en E_2 de energie per molekuul voor de bestanddeelen vóór de menging, dan is

$$W_x = (1-x)\,E_1 + x\,E_2 - E_x$$

of

$$E_x = (1-x)\,E_1 + x\,E_2 - W_x$$

en

$$E_x - x\frac{d\,E_x}{d\,x} - E_1 = -\left(W_x - x\frac{d\,W_x}{d\,x}\right)$$

of

$$E_x - E_1 - x\frac{d\,E_x}{d\,x} = x^2\,\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{d\,x}$$

$$-\frac{a_x}{V_x} + x\,\frac{d\,\frac{a_x}{V}}{d\,x} + \frac{a_1}{V_1} = x^2\,\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{d\,x}$$

of de teller van het 2de lid van (4) gelijk aan $+\,x^2\,\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{d\,x}$ en dan zou ook de teller van den laatsten term van (6) eveneens gelijk zijn, ten minste bij benadering, aan

$$+\,x^2\,\frac{d\,\frac{W_x}{x}}{d\,x}$$

of

$$p = p_1 (1 - x) e^{-\frac{x^2 d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{MRT}}.$$

Nu kan ten minste bij SO_4H_2 oplossingen $\frac{W_x}{x}$ gelijk gesteld worden volgens de onderzoekingen van THOMSEN aan $\frac{A(1-x)}{1-x+rx}$ en dus $\frac{d\frac{W_x}{x}}{dx} = -\frac{Ar}{(1-x+rx)^2}$.

De waarde van p wordt dan gelijk aan $p_1(1-x)e^{-\frac{x^2\frac{Ar}{(1-x+rx)^2}}{MRT}}$, alleen dus als $r = 1$ is zou een standvastige waarde voor de grootheid, die vroeger door α is voorgesteld, gevonden worden.

Natuurlijk dat eer dit mag gesteld worden den invloed der dissociatie bij de zoutoplossingen ook zou moeten nagegaan worden — en opheldering gevonden worden, waarom ook zouten, die negatieve verdunningswarmte bezitten, toch den factor α positief wordt gevonden, zooals bij Na Cl. Nu is er natuurlijk geen gelijkheid tusschen

$$\mu_x \quad \text{en} \quad -\frac{a_x}{V_x}$$

want

$$\mu_x = p\,V - MRT \log (V - b) - \frac{a}{V}.$$

Maar dat neemt niet weg dat

$$\mu_x - \mu_1 - x \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$$

toch niet veel zal kunnen verschillen van

$$-\left\{\frac{a_x}{V_x} - \frac{a_1}{V_1} - x \left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}\right\}$$

in alle gevallen waarin $\frac{d^2 \frac{a_x}{V_x}}{d x^2}$ een zeer groote waarde heeft.

Het verschil n.l. tusschen μ_x en $-\frac{a_x}{V_x}$ is, als wij $p\,V$ verwaarloozen mogen gelijk aan $-MRT \log (V-b)$ of bijna gelijk aan $MRT \log \frac{MRT}{\frac{a_x}{V_x^2}}$ en het 2de differentiaalquotient dezer uitdrukking blijkt bij uitrekening slechts weinig malen MRT te kunnen zijn, terwijl $\frac{d^2 \frac{a_x}{V_x}}{d x^2}$ o. a. bij SO_4H_2 oplossingen tot ruim 30 MRT stijgen kan. Daar dit in het limiet geval samenvalt met $\frac{d^2 \frac{a_x}{b_x}}{d x^2}$, meen ik dat de grootte van den coëfficient α niet veel verschilt van $\frac{2\,a_{12}}{b_1 b_2} - \frac{a_1}{b_1^2} - \frac{a_2}{b_1^2}$, waarvan de beteekenis in § 20 mijner *Théorie Mol.* enz. is besproken.

Ofschoon dus verschillende punten, die hier ter sprake zijn gekomen, nog niet tot volkomen klaarheid zijn gebracht, en nader onderzoek eischen, meen ik dat een zaak duidelijk genoeg in het licht is getreden, n.l. dat men verkeerd doet, om, als een stof opgelost wordt in een andere, het oplosmiddel allen invloed op de opgeloste stof te ontzeggen — en omgekeerd — iets wat in den laatsten tijd toch herhaaldelijk is geschied. De afwijkingen voor de drukverlaging door zouten zijn hoofdzakelijk toe te schrijven niet aan invloeden die van het zout op het zout zelf uitgaan, maar die van het oplosmiddel op het zout worden uitgeoefend.

DE FORMULE DER ELECTROLYTISCHE DISSOCIATIE.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

In mijn vorigen arbeid »over de drukking van zuur- en zout-oplossingen", ben ik tot het besluit gekomen dat de waarnemingen ons noodzaken om, behalve electrolytische dissociatie, aan te nemen, dat door het oplosmiddel een sterke invloed uitgeoefend wordt op de opgeloste stof. Tengevolge van dien invloed komt in de formule voor die drukking een factor, dien ik door $e^{-\alpha x^2}$ heb voorgesteld. Bij benadering kon α als standvastig worden beschouwd — en voor een paar oplossingen heb ik de waarden van α medegedeeld. Sedert heb ik bij tal van oplossingen de waarde van α trachten te bepalen — en bij sommige zeer groote waarden voor die grootheid gevonden. Voor het oogenblik zal ik die waarden niet mededeelen, maar enkele opmerkingen maken over den anderen invloed, die der dissociatie, welke zich op de grootte der drukking merkbaar maakt. Met het doel om te vinden in hoever α als constante mag behandeld worden, had ik voor vele oplossingen een stel van waarden voor de 2 parameters C en α gezocht, die zoo na mogelijk de waarnemingen wedergeven. Aannemende, dat de formule der dissociatie $y^2 = C(x - y)$ nauwkeurig genoeg is, zocht ik eigenschappen van α — en dan bleek mij, dat in bijna alle gevallen α met den concentratiegraad afneemt. Niet in die mate dat het bestaan van die grootheid twijfelachtig wordt, want de afname bedraagt dan in

de meeste gevallen slechts 10 pCt. Het is natuurlijk, dat als de dissociatie niet volkomen beantwoordt aan de formule $y^2 = C(x - y)$, ook de gang der waarden van α anders zal gevonden worden, dan hij in werkelijkheid is. En nu blijkt bij de berekeningen dat de standvastigheid van α in hooge mate kan gevonden worden, als y niet zoo sterk met x toenemend aangenomen wordt als de formule $y^2 = C(x - y)$ zou eischen. Daar dit geheel in overeenstemming is met de eigenschappen der geleidbaarheid, die op een maximumwaarde van y wijzen, heb ik de formule der dissociatie aan een nauwkeuriger onderzoek onderworpen, dan ik in mijn vorigen arbeid had gedaan.

§ 1. Beperken wij ons tot het geval dat het zoutmolekuul zich slechts in 2 ïonen splitst, dan zijn in de oplossing aanwezig: $(1 - x)$ molekulen water, $(x - y)$ molekulen ongesplitst zout, y molekulen van de 1ste ïone en evenzoo y molekulen van de 2de ïone. Dan zijn in het geheel aanwezig $1 + y$ molekulen. Voor een homogene phase geldt dan de vergelijking:

$$p = \frac{MRT(1 + y)}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

In deze vergelijking is V het volume van het mengsel zooals het gesplitst is, dus van de $1 + y$ molekulen.

Evenzoo is b en a het molekulairvolume van de $1 + y$ molekulen en de spec. attractie. De waarde van b is dan met hoogen graad van benadering

$$b = b_1(1 - x) + b_2(x - y) + b_3 y + b_4 y$$

als b_1 de grootte van het molekuul water, b_2 van het zout, b_3 van de 1ste ïone en b_4 van de 2de ïone voorstelt. De waarde van $\frac{db}{dy} = b_3 + b_4 - b_2$ kan dan gelijk aan 0 gesteld worden als wij het volume van het zoutmolekuul mogen gelijk stellen aan dat der 2 ïonen. Dit als benadering aan te nemen, zal wel weinig bezwaar ontmoeten.

De grootheid a heeft een samengestelden vorm, n.l.

$$a = a_{11}(1-x)^2 + a_{22}(x-y)^2 + a_{33}y^2 + a_{44}y^2 + \\ + 2a_{12}(1-x)(x-y) + 2a_{13}(1-x)y + 2a_{14}(1-x)y + \\ + 2a_{23}(x-y)y + 2a_{24}(x-y)y + 2a_{34}y^2 \text{ *)}$$

en

$$\frac{1}{2}\frac{da}{dy} = (1-x)(a_{13} + a_{14} - a_{12}) + (x-y)(a_{23} + a_{24} - a_{22}) + \\ + y(a_{33} + a_{44} + 2a_{14} - a_{23} - a_{24}).$$

De factor van $(1-x)$ is de meerdere waarde der aantrekking, die een molekuul water uitoefent op de 2 geïsoleerde ïonen dan op het verbonden zoutmolekuul — de factor van $x-y$ stelt voor de meerdere aantrekking, die een zoutmolekuul uitoefent op de 2 geïsoleerde ïonen dan op een zoutmolekuul zelf — en de factor van y is de meerdere aantrekking die de gesplitsten ïonen op elkander uitoefenen dan een zontmolekuul op haar uitoefent.

Hebben wij recht ook $\frac{da}{dy} = 0$ als benadering aan te nemen? Het volgende dient hoofdzakelijk om te doen uitkomen, dat het antwoord op deze vraag ontkennend moet luiden.

§ 2. Daar wij de voorwaarde voor het evenwicht aan $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT} = 0$ zullen ontleenen, moeten wij er nu toe overgaan om den vorm van ψ te bepalen †). Zij moet zijn van de gedaante:

$$\psi = -\int p\, dV + \varphi(x, y)$$

---

*) Stelde men door V voor het volume van een molekulaire hoeveelheid, dan zou b door $1+y$ moeten gedeeld worden en a door $(1+y)^2$. Maar na herleiding zou voor p toch dezelfde waarde worden gevonden.

†) Zie § 4. Théorie moléculaire etc. *Arch. Néerl.*, T. XXIV, of Molecularthéorie. *Phys. Chemie*, V, 2.

of

$$\psi_T = -MRT(1+y)\log(V-b) - \frac{a}{V} + \varphi(x,y)$$

en het komt er dus op aan $\varphi(x, y)$ te bepalen. Noemen wij E_1, E_2, E_3 en E_4 de hoeveelheid arbeidsvermogen van plaats, die elk der 4 soorten van molekulen zou bezitten, als zij afzonderlijk in oneindig groot volume waren; evenzoo $\int C_1\,dT$, $\int C_2\,dT$, $\int C_3\,dT$ en $\int C_4\,dT$ de kinetische energie in dat geval. Hebbe de entropie voor de $(1-x)$ molekulen water tot limietwaarde $(1-x)\left\{MR\log\frac{V}{1-x} + H_1 + \int\frac{C_1\,dT}{T}\right\}$ enz. na de menging in zeer groot volume, dan vinden wij:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y) = MRT\{&(1-x)\log(1-x) + (x-y)\log(x-y) + 2y\log y\}\\ &+(1-x)\left\{E_1 + \int C_1\,dT - \left(H_1 + \int C_1\frac{dT}{T}\right)T\right\}\\ &+(x-y)\left\{\;\;\;

dan vinden wij:

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT} = 0 = \left(\frac{d\mu_{xy}}{dy}\right)_{XpT} + MRT\log\frac{y^2}{(x-y)(1+y)} +$$

$$+ \left\{(E_3 + E_4 - E_2) + \int(C_3 + C_4 - C_2)\,dT -\right.$$

$$\left. - T(H_4 + H_3 - H_2) - T\int(C_3 + C_4 - C_2)\frac{dT}{T}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Nu is

$$\left(\frac{d\mu_{xy}}{dy}\right)_{XpT} = -MRT\log\frac{V-b}{1+y} + MRT + MRT(1+y)\frac{\frac{db}{dy}}{V-b} - \frac{\frac{da}{dy}}{V}$$

en deze waarde gesubstitueerd zijnde in vergelijking (2), vinden wij, als wij $\frac{db}{dy}$ bij benadering gelijk aan 0 stellen,

$$0 = MRT\log\frac{y^2}{(x-y)(V-b)} + MRT - \frac{\frac{da}{dy}}{V} + \{(E_3 + E_4 - E_2)\text{ enz.}\}$$

of

$$\log\frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = \frac{H_3 + H_4 - H_2 - MR + \int(C_3 + C_4 - C_2)\frac{dT}{T}}{MR} -$$

$$- \frac{(E_3 + E_4 - E_2) + \int(C_3 + C_4 - C_2)\,dT - \frac{\frac{da}{dy}}{V}}{MRT} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Is de temperatuur standvastig, dan herleidt zich het tweede lid geheel tot een constante, als wij n.l. $\frac{da}{dy}$ gelijk 0 mogen stellen — en dan vinden wij de formule, die ik in mijn vorigen arbeid heb toegepast, en die door Ostwald het eerst is afgeleid.

§ 3. Stellen wij $\frac{da}{dy} = 0$, dan is uit vergelijking (3) verdwenen alles, of ten minste nagenoeg alles, wat betrekking heeft op het oplosmiddel. Alleen $V-b$ blijft dan nog aan het oplosmiddel herinneren. Bij zeer groote verdunning mogen wij daarvoor een constante nemen, afhankelijk van het intermolekulair-volume van het oplosmiddel. Maar de invloed van een andere waarde dezer constante, als wij bijv. het zout niet in water maar in een andere vloeistof opgelost denken, kan alleen den graad der dissociatie iets grooter of kleiner maken — maar geeft geen rekenschap van het feit, dat wij de dissociatie van zouten in andere media dan water gelijk 0 of ten minste nagenoeg $= 0$ mogen stellen. Dit is een eerste reden geweest, waarom ik tot het besluit ben gekomen, dat als zich een zoo sterke invloed van het oplosmiddel openbaart, wij ongerijmd zouden handelen met juist uit vergelijking (3) den eenigen term weg te laten, die van de specifieke werking van het oplosmiddel kan rekenschap geven.

Nemen wij eerst uiterste verdunning, dan is

$$\frac{da}{dy} = 2\,(a_{13} + a_{14} - a_{12})$$

en handelen wij alsof $C_3 + C_4 = C_2$ was, dan is

$$\log \frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = K - \frac{(E_3 + E_4 - E_2) - 2\,\frac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}}{MRT} \quad . . (4)$$

De grootheid K heeft alleen betrekking op het zoutmolekuul en op de ïonen, is dus van het oplosmiddel onafhankelijk. Evenzoo is dit het geval met $E_3 + E_4 - E_2$.

Deze laatste grootheid stelt het energieverlies voor als de 2 ïonen zich vereenigen in een oplosmiddel, dat geen attractie op haar uitoefent, bijv. in een ledige ruimte, of in een oplosmiddel, dat de 2 ïonen gezamenlijk even sterk aantrekt als het het zoutmolekuul aantrekt. Maar de grootheid

$(E_3 + E_4 - E_2) - 2\frac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}$ stelt het energieverlies voor in een medium, dat op de ïonen een spec. attractie gelijk aan a_{13} en a_{14} en op het zoutmolekuul gelijk aan a_{12} uitoefent. Deze grootheid stelt dus ook voor de warmte, die er vrij komt, als de twee ïonen zich tot een zoutmolekuul vereenigen — en het is dus deze grootheid, die door ARRHENIUS is bepaald geworden, *Phys. Chemie*, Band IV, § 105 u. 106. Ofschoon ik wat de bijzonderheid der berekeningen aangaat bedenkingen heb, geldt dit niet de hoofdzaak — en wij kunnen als een niet te weerspreken feit aannemen 1° dat die warmte opvallend klein is en 2° dat zij in bijna evenveel gevallen negatief als positief is. Om het laatste, dat werkelijk in staat zou zijn het geloof aan de electrolytische dissociatie te schokken, te verklaren, herinnert ARRHENIUS aan het feit, dat twee molekulen O_3 zich dissocieerend tot 3 molekulen O_2, warmte vrijmaken — doch dit heeft niets bevreemdends. Maar dat een atoom Cl zich met een atoom H zou verbinden onder warmteverlies en dat nog al, wanneer zij zoo sterk tegengesteld electrisch zijn, is niet aan te nemen. In dat geval staat er tegenover een verbinding, geen splitsing, zooals bij de vorming van O_3 uit O_2 wel het geval is. Mijns inziens moet men beginnen met $E_3 + E_4 - E_2$ een zeer groote waarde toe te kennen, maar dan ook aan $2\frac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}$. Mocht $W = 0$ gevonden worden, dan zijn zij even groot, is $W > 0$, dan overweegt $E_3 + E_4 - E_2$ en omgekeerd.

En het besluit is dus, dat water bijv. het atoom K en het atoom Cl of beiden of een der twee veel sterker aantrekt dan het zoutmolekuul — of met andere woorden, dat het in ïonen gesplitste zoutmolekuul in het medium water veel meer arbeidsvermogen van plaats heeft verloren, dan het vóór de splitsing verloren had. Dat de aantrekking van water op K of Na of SO_4 zoo groot ondersteld wordt, heeft zeker niets bevreemdends — en dat in een ander medium bijv. alcohol, die sterke attractie op de ïonen niet behoeft aangenomen te worden, zal evenzeer niet verwonderen. Ik

hel er dan ook toe over om de verschillen geheel aan molekulaire of atomistische werking toe te schrijven, al acht ik het ook mogelijk dat de oorzaak van electrischen aard is.

§ 4, Beschouwen wij vergelijking (4) voor een zelfde zout bij een zelfden graad van concentratie in tweëerlei media geplaatst; noemen wij $\frac{y}{x} = z$ in het eerste medium en $\frac{y'}{x'} = z'$ in het tweede medium, dan vinden wij

$$\log \frac{\frac{z^2}{1-z}\,\frac{1}{V-b}}{\frac{z'^2}{1-z'}\,\frac{1}{V'-b'}} = 2\,\frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT} \quad \ldots (5)$$

en door C en C' de parameters der dissociatie voorstellende wordt (5)

$$\log \frac{C}{C'}\,\frac{V'-b'}{V-b} = 2\,\frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT}$$

of

$$\frac{C'}{C} = \frac{V'-b'}{V-b}\,e^{-2\frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT}}.$$

Is $\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V}$ groot en $\frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}$ of klein of gelijk aan 0, dan is C' zulk een klein gedeelte van C, dat de dissociatie niet te constateeren valt, of volgens de waarnemingen niet bestaat. Stoffen die zich dus in water geplaatst dissocieeren behoeven dit in het ledige niet te doen bijv. Cl H.

§ 5. De vergelijking (4) geeft de dissociatie alleen in uiterste verdunning terug — zij stelt, al is het dan ook met andere duiding van den parameter de gewone formule der electrolytische dissociatie voor, die geen rekenschap geeft van het bestaan van een maximumwaarde van y. Wij heb-

ben den waren vorm van $\frac{da}{dy}$ noodig om den werkelijken loop der dissociatie te kunnen overzien. Ik herinner hier aan de omstandigheid, dat juist, waar de dissociatie sterk is, de parameter zeer veranderlijk is gevonden, reeds als de waarde van x maar weinig varieerde, en dat voor grootere waarde van x het bestaan van een maximum-waarde voor de geleidbaarheid met de benaderde formule niet in overeenstemming te brengen is.

Met andere woorden als men stelt:

$$y^2 = C(x - y)$$

is C zelve een functie van x.

Volgens vergelijking (3) is bij gegeven temperatuur dan ook:

$$\frac{y^2}{x - y} = K(V - b)\, e^{-\frac{(E_3 + E_4 - E_2) - \frac{\frac{da}{dy}}{V}}{MRT}} \quad \ldots . (6)$$

Reeds $V - b$ is een functie van x, maar bovenal $\frac{da}{dy}$ Wij kunnen uit deze vergelijking de voorwaarde vinden waarbij $\frac{dy}{dx} = 0$ is. Vooraf echter deze opmerking. Hiervoor hebben wij de mogelijkheid erkend, dat $\frac{db}{dy} = 0$ is, en dit in elk geval als benadering aangenomen. Bij de differentiatie naar x, die wij nu hebben uit te voeren, ontmoeten wij de grootheid $\frac{db}{dx}$ en $\frac{dV}{dx}$ Nu is $\frac{db}{dx}$ zeker niet gelijk aan 0. Hier geldt het de verandering in het molekulairvolume, als wij een watermolekuul vervangen door een zoutmolekuul, en $b_2 - b_1$ zal bij benadering de waarde van $\frac{db}{dx}$ zijn. Als wij $\frac{db}{dx}$ en $\frac{dV}{dx}$ verwaarloozen vinden wij een zeer eenvoudige voorwaarde voor $\frac{dy}{dx} = 0$, nl.

$$\frac{1}{x-y} = \frac{2}{V\,MRT}\{(a_{12}+a_{13}-a_{14})-(a_{23}+a_{24}-a_{22})\}\,..\,(7)$$

De grootheid $a_{23}+a_{24}-a_{22}$, die de meerdere attractie voorstelt die een zoutmolekuul uitoefent op de ïonen dan op het niet gesplitste molekuul, behoeft niet groot te zijn maar is zeker wel niet negatief. Een chloornatrium-molekuul of zwavelzuur-molekuul zal zijn gesplitste bestanddeelen wel niet zwakker aantrekken dan het ongesplitste molekuul. Was dus (7) nauwkeurig genoeg, dan konden wij stellen, dat y de maximumwaarde bereikt, als

$$\frac{1}{x-y} < \frac{2\,\dfrac{a_{12}+a_{13}-a_{14}}{V}}{MRT}$$

wat dus een middel zou opleveren om als x en y_m bekend zijn een benedenste waarde voor den factor $\dfrac{a_{12}+a_{13}-a_{14}}{V\,MRT}$ te bepalen.

In dezelfde onderstelling, dat dus $V-b$ als onafhankelijk van x mocht ondersteld worden, zouden wij kunnen schrijven

$$\frac{y^2}{x-y} = C\,e^{-\frac{2\,\frac{(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V}}{MRT}x}$$

als C de waarde van den parameter der dissociatie voorstelt bij uiterste verdunning. Met andere woorden de parameter der dissociatie neemt met toenemenden concentratiegraad af — en daarin brengt slechts weinig verandering het in rekening brengen van de veranderlijkheid van V en b met x. Ofschoon bij sommige stoffen er twijfel kan bestaan of deze regel in alle gevallen bevestigd wordt, wordt bij sterke zuren en zouten, waar de dissociatie een maximumwaarde bezit, geen tegenspraak door de proef geleverd.

Om $\dfrac{db}{dx}$ en $\dfrac{dV}{dx}$ in rekening te kunnen brengen, en ten minste te kunnen begrooten in hoever deze grootheden van

invloed zijn, zal ik V een constant aantal malen b stellen, of $V = n\,\{b_1 + (b_2 - b_1)\,x\}$ *).

Dan is

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dx} = \frac{b_2 - b_1}{b_1 + (b_2 - b_1)\,x} = \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}$$

en

$$\frac{1}{V - b}\,\frac{d\,(V - b)}{dx} = \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}.$$

Dan is, voor het geval van $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$-\frac{1}{x - y} = +\frac{\dfrac{b^2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x} + \frac{\dfrac{d^2 a}{dx\,dy}}{MRT\,V} - \frac{\dfrac{da}{dy}}{V\,MRT}\,\frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_1 - b_1}{b_1}\,x}$$

of

$$\frac{1}{x - y} = -\frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \left(\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\right)} + \frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}\left\{1 + \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}\right\}.$$

Kent men $\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}$ en x en y dan is de factor $\dfrac{2\,(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}$ te berekenen. Nemen wij $\dfrac{b_2 - b_1}{b_1} = 2$, wat ongeveer bij SO_4H_2 de waarde dezer uitdrukking zijn zal, dan is

---

*) De volgende berekeningen hebben slechts tot doel eenigermate de verschillende invloeden te kunnen begrooten. Weldra hoop ik in staat te zijn, met behulp van den gang der electrolytische geleiding en volgens juister berekeningen, meer vertrouwbare uitkomsten mede te deelen.

$$\frac{1 + 2x}{x-y} = -2 + \frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}(3 + x)$$

of daar x tegenover 3 verwaarloosd kan worden

$$\frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT} = \frac{2}{3} + \frac{1 + 2x}{3(x-y)}.$$

Stelt men $x = 0.08$ waarvoor bij SO_4H_2 maximum van geleidbaarheid plaats heeft en begroot men y op een waarde tusschen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ van x, bijv. 0,4, dan vindt men voor de waarde van $\frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}$ ongeveer 8, wat trouwens kleiner is dan gevonden wordt, wanneer men in de formule bezigt de waarden van V_x, zooals ze door de kennis der waargenomen densiteiten berekend worden. Daarenboven valt de maximumwaarde van y niet samen met de maximumwaarde voor de geleidbaarheid — deze laatste valt veel meer samen met de maximumwaarde van $\frac{y}{V_x}$.

Voor ClH en SO_4H_2 wijst de gang van de geleidbaarheid op veel grooter waarden van $\frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}$ dan 8. Maar om ze met volkomen zekerheid uit de afwisseling der geleidbaarheid met den graad van concentratie te kunnen afleiden, is het noodig al de invloeden die daarbij in het spel komen ten minste te kunnen begrooten. Voorloopige berekeningen hebben mij daarvoor de waarde 12 à 13 geleverd.

OVER OPHOOPING

VAN

ATMOSPHERISCHE STIKSTOF IN CULTUREN VAN BACILLUS RADICICOLA.

DOOR

M. W. BEIJERINCK.

Terwijl ik in vroegere mededeelingen moest vermelden dat het mij niet was gelukt een winst aan stikstof te koste van de atmosfeer in de culturen van *Bacillus radicicola* aan te toonen, kan ik thans, op grond van proeven welke op betere kennis van de voedingsvoorwaarden der bacterie berusten en doeltreffender waren ingericht, uitkomsten noemen, die overtuigend bewijzen, dat ophooping van stikstof uit de atmosfeer in zoodanige culturen mogelijk is.

Deze proeven hebben betrekking op cultuurvloeist[illegible]. Door middel van de dialysemethode in gelatine is het [illegible] daarentegen tot nu toe niet gelukt, om met zekerheid [illegible] een overeenkomstig resultaat te geraken. Daar ik wa[illegible] [illegible]nen stikstofvormende werking in de culturen bovendien [illegible] geering is, achtte ik het [illegible] dat niet de vrije stikstof [illegible] maar de atmosferische stoffen [illegible] aan deze [illegible] [illegible]vering ten grondslag liggen.

Tenzijde de omstandigheden, waaronder de stikstof [illegible] [illegible] geschiedde wel te begrijpen is, het mogelijk kort aan [illegible] [illegible] welke wijze [illegible] zich voedt.

Deze bacterie behoort tot de koolstofstikstoforganismen, w. z. voor volledige voeding en groei moeten, behalve aliumphosphaat, twee stoffen toegediend worden, waarvan e eene als koolstofbron, de andere als stikstofbron dienst an doen *). Uit mijn vroegere onderzoekingen was reeds geleken, dat glucose, en nog beter rietsuiker, voor de koolofvoedig geschikt zijn †). Uit latere proefnemingen leerde t, dat niet alleen pepton, maar ook, hoezeer veel minder emakkelijk, asparagine, zwavelzure ammoniak en kali- of atronsalpeter als stikstofbronnen kunnen fungeeren. Niriten schijnen in alle verdunningen schadelijk te werken en immer tot groei aanleiding te geven.

Verder kwam ik tot het besluit, dat aftreksels van Papionaceen of verdund moutextract den groei van *Bacillus radicicola* ongemeen begunstigen. Dit berust hoogst waarschijnlijk op het aanwezig zijn in zoodanige aftreksels van *mengsels* van meerdere peptonsoorten, die, gelijk mengsels van voedselstoffen in het algemeen, krachtiger voeden, dan iedere der bestanddeelen afzonderlijk §).

Door de kennis dezer feiten is het mij mogelijk geworden om in cultuurvloeistoffen, niet, gelijk bij mijn vroegere proeven met kunstmatige mengsels, slechts een betrekkelijk geringe vermenigvuldiging der wortelbacteriën te bereiken, maar reeds na verloop van korten tijd, daarin een uiterst

---

*) Peptonoplossingen, zonder verdere toevoeging, geven slechts tot een geringe vermenigvuldiging aanleiding.

†) Asparagine is daarentegen voor de koolstofvoeding veel minder geschikt. In mijn vroegere mededeelingen heb ik mij daarover geheel anders uitgelaten, waarschijnlijk tengevolge eener verwisseling van *Bacillus radicicola* met de daarmede niet identieke bacterie, die aanleiding geeft tot de »bacteriënuitputting" der knolletjes.

§) Het is wellicht duidelijkheidshalve niet overbodig hier nog een ander voorbeeld te noemen: De bierkaam, *Mycoderma cerevisiae*, kan bij aanwezigheid van een ammoniakzout matig snel groeien en zich vermenigvuldigen ten koste van alkohol, zeer langzaam daarentegen ten koste van glycerine. Geeft men echter deze beide lichamen tegelijkertijd, dan is de daarmede verkregen groei nog sneller dan zich uit de vereeniging der aan den alkohol en de glycerine afzonderlijk toe te schrijven resultaten zou laten verwachten.

gevens de verklaring is gelegen van het negatieve resultaat mijner vroegere proeven. Daarbij toch heb ik juist die omstandigheden buiten rekening gelaten, welke mij gebleken zijn op de activiteit der wortelbacteriën van bijzonderen invloed te wezen. Ik heb toen namelijk met kunstmatige voedselmassa's gewerkt, waarin de aangeboden stikstofverbindingen niet in eenen voor de aanvankelijke vermenigvuldiging zeer geschikten toestand voorkwamen, zoodat het aantal werkzame bacteriën, per volumeneenheid van de onderzochte mediën, betrekkelijk gering was. Bovendien waren de gekozen temperaturen niet de meest gunstige. Verder was het phosphaatgehalte der cultuurvloeistoffen wellicht te hoog. In een woord de verrichte proeven konden niet wel meer leeren dan zij gedaan hebben, namelijk, dat de stikstof-aanwinst ten koste van de lucht, bij minder juist gekozen voedingsconditiën uitblijft, of in elk geval onmerkbaar gering wordt.

Bij mijn nieuwe proeven heb ik zorg gedragen met een zeer groot aantal zeer actieve bacteriën te werken. Dit is gebleken op de volgende wijze te kunnen geschieden.

Duivenboonen werden in een thermostaat tot ontkieming gebracht. De kiemstengels werden van de kiemplanten afgesneden en 100 gram daarvan kortstondig in een liter duinwater opgekookt. De daarbij verkregen vloeistof is eenigszins looistofhoudend en kleurt zich later ten koste van de ijzerverbindingen, die in het water en de plant voorkomen, licht bruin.

Van dit vocht werden in een aantal KJELDAHL'sche verbrandingskolfjes telkens 100 cub. centim. gedaan, en daaraan in alle gevallen $1^1/_2$ pCt. of 2 pCt. rietsuiker toegevoegd. Eenige dezer kolfjes ontvingen nu nog bovendien $^1/_{30}$ of $^1/_{10}$ gram kaliummonophosphaat, bij de overige geschiedde deze toevoeging niet.

Voor zes beneden aangevoerde, in November begonnen proeven was een boonenstengel-aftreksel gebruikt met een lager stikstofgehalte dan voor die, welke in Januari aanvingen.

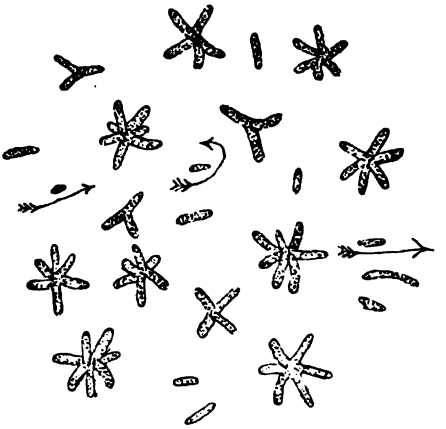
Wat het voor de infectie gebruikte bacteriënmateriaal

betreft is het noodig eenige bepaalde aanwijzingen te doen, daar het, bij proeven in een beperkt tijdsverloop te nemen, wenschelijk is, dat de bacteriënvermenigvuldiging zoo spoedig mogelijk begint, zoodat een zeer groot aantal actieve bacteriën van het oogenblik van het uitzaaien af aanwezig zijn.

Voor alle proeven is gebruik gemaakt van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, in 1889 uit knolletjes van Windsorboonen geisoleerd. De culturen waren op voedingsgelatine bewaard, en, tegen dat de proeven zouden beginnen overgeënt, zoodat de infectie kon geschieden uitsluitend met levende en voor vermeerdering geschikte bacteriën. Als een uitmuntende vaste voedingsbodem was voor de *Fabae*-bacillen de volgende erkend: Afkooksel van lucernestengels (10 deelen op 100 deelen water) met 2 pCt rietsuiker en 8 pCt. zuivere gelatine zonder verdere toevoeging. Bij reagceerbuisculturen, uitgevoerd bij omstreeks 10° C, verkrijgt men daarop, uit entstrepen, een zeer aanzienlijke hoeveelheid van een week, gemakkelijk in water te verdeelen, wit bacteriën-slijm, dat ongeveer de consistentie bezit van dikke stijfselpap. Sinds ik gebruik maak van het genoemde mengsel als voedingsbodem en het daarop wassende bacteriënmateriaal, zijn alle bezwaren tegen het verkrijgen der wortelbacteriën in iedere gewenschte hoeveelheid opgeheven. Daar de mikroskopische toestand van de met de lucht in aanraking zijnde oppervlakte dezer culturen zeer merkwaardig is en geheel en al afwijkt van die bij alle andere mij tot nu toe bekend geworden bacteriënsoorten, acht ik het wenschelijk daarover het volgende op te merken.

Terwijl het meer in de diepte gelegen bacteriënslijm uit kortere en langere, in het midden meestal naar een kant opgezwollen staafjes bestaat, waartusschen hier en daar magere bacteroiden verstrooid liggen en talrijke zwermers van de gedaante van korte, dikke staafjes zich voortbewegen, bevat de oppervlakte van het slijm nog een ander morphologisch bestanddeel, waaraan de naam van »bacteriën-sterren" kan gegeven worden. Deze sterren (zie figuur) zijn drie tot veelarmig; de driearmige zijn blijkbaar identiek, wat hun wijze van ontstaan betreft, met de gewone bacteroiden, de meer-

armige kunnen als bacteroiden beschouwd worden, wier vertakking verder is voortgegaan dan gewoonlijk. Daar een nauwkeurig onderzoek leert, dat het centrum, vanwaar de stralen ontspringen, niet een enkel punt is, maar zekere afmeting heeft, is het waarschijnlijk, dat elke nieuwe tak aan den voet van een pas gevormden ontspringt, en, dat niet vele gemeenschappelijk uit een enkele bacterie ontstaan.



Zwermers, sterren en bacteroiden in vloeibare culturen van *Bacillus radicicola* var. *Fabae* (V. 1000).

Deze opvatting geeft dus aanleiding om zulk een ster als een sympodium met verkorte assen te beschouwen. Blijkbaar zijn de polen der afzonderlijke takjes van elkander verschillend. Zou, zoo moet men zich afvragen, ook bij de schijnbaar normale wortel-bacteriën een overeenkomstig verschil tusschen de verschillende deelen van het bacteriënlichaam bestaan? De eigenaardige bochelvormige verdikking, die vele staafjes bezitten en die het begin aanwijst van de deeling, wettigt dit vermoeden, en brengt tot de gedachte, dat de vermenigvuldiging steeds door zijdelingsche vertakking geschiedt en niet door gewone tweedeeling. In ieder geval moet men aannemen, dat de zone, waar de wortelbacteriën groeien, slechts een beperkt gedeelte van het bacteriënlichaam is, en dat dus aan iedere afzonderlijke bacterie in zekeren zin een vegetatiepunt bestaat, waar zich de nieuwe levende stof ontwikkelt. Ofschoon bij andere bacteriën een overeenkom-

stige vertakking tot nu toe niet is gezien, kan men daarom toch niet met zekerheid beweren, dat de staafjes der gewone soorten over hun gansche lengte gelijkmatig groeien, zoodat een eigenlijke vegetatiestreek zou ontbreken; de sterren van *Bacillus radicicola* maken het zelfs waarschijnlijk, dat dit laatste niet zoo algemeen het geval is als dit tot nu toe wordt aangenomen. De zaak verdient verder onderzocht te worden.

Bij het zoeken naar analogieën met de hier beschouwde sterren in andere groepen van mikrobiën, is mijn aandacht, behalve op de wieren *Botryococcus* en *Actinastrum*, gevallen op het geslacht *Actinomyces*, hoezeer de vertakking daarbij meer tot de uiteinden der stralen schijnt bepaald te zijn. Verder heeft LAURENT *, daarop opmerkzaam gemaakt door METSCHNIKOFF, de gelijkenis aangewezen tusschen de door METSCHNIKOFF in de sprieten van *Daphnia* gevonden parasieten, welke hij tot eene afzonderlijke familie, de Pasteuriaceen brengt, en de bacteroiden der Papilionaceen. LAURENT en METSCHNIKOFF hebben echter mijne »bacteriënsterren" niet gezien, en zonderling genoeg, ook niet de talrijke en gemakkelijk waar te nemen zwermers kunnen ontdekken.

Intusschen ben ik het met LAURENT geheel eens, dat de zoo eigenaardige vertakking van *Bacillus radicicola* aanleiding geeft om dit organisme als tot een afzonderlijke groep van bacteriën behoorende te beschouwen. Dat daarom evenwel het woord *Bacillus* niet langer zou mogen gebruikt worden om deze bacteriën aan te duiden, zooals LAURENT wil, berust op misverstand, want nimmer is door mij aangenomen dat deze naam met een waren genusnaam gelijk staat. Welke bacterioloog zal niet moeten toestemmen, dat wat wij tegenwoordig *Bacillus* noemen ongeveer beantwoordt aan het »geslacht" *Chaos* van LINNAEUS, en principieel verschillende groepen omvat?

Maar keeren wij thans tot de vloeistofculturen terug.

Van het beschreven bacteriënslijm, bestaande uit staafjes, bacteroiden, sterren en zwermers, werd een geringe hoeveelheid aan de spits eener platinadraad in de cultuur-

---

*) *Annales de l'Institut* PASTEUR, Tome V, pag. 129, 1891.

vloeistoffen in de KJELDAHL'sche verbrandingskolfjes overgebracht en daarbij telkens, naast een geinfecteerd kolfje een tweede, niet geinfecteerd, aan dezelfde condities blootgesteld. Deze condities bestonden nu daarin, dat alle culturen in een kast in het laboratorium geplaatst werden, waarin slechts weinig licht, en een temperatuur heerschte, die gedurende de maanden October, November, December, Januari, Februari en Maart afwisselde tusschen 5 en 12° C., op enkele dagen gedurende eenige uren 15° C. bereikte, en gedurende de zeer koude nachten van den winter nu en dan op 2° C. is gedaald. De meeste culturen vertoonden reeds na 2 of 3 dagen een duidelijke troebeling. De controle kolfjes zijn zonder een enkele uitzondering volkomen helder gebleven. Het sterilisceren had steeds plaats gevonden door herhaald opkoken gedurende enkele minuten.

De verschijnselen, welke in de kolfjes ten gevolge van den groei der bacteriën werden opgemerkt, waren in vele opzichten belangwekkend. Aanvankelijk ontstond tegen het glas een gelijkmatig beslag van bacteriën, dat op eenigen afstand onder de vloeistofspiegel plotseling eindigde in een scherpen eenigszins gegolfden grensrand. Later, bij het toenemen der bacteriën in getal, heeft zich het beslag naar boven uitgebreid, bijna de oppervlakte bereikt en een grensrand gevormd gelijk de voorgaande.

Intusschen ontstond er op den bodem een wit neerslag, dat, naar het schijnt, uit inactieve of doode bacteriën was samengesteld, wier mikroskopische structuur doet vermoeden, dat een gedeelte van hun lichaamsinhoud tot de cultuurvloeistof was teruggekeerd. Dit witte, zware poedervormige bacteriënneerslag is aanhoudend toegenomen, en, toen de culturen na 8 weken ingedroogd en verbrand werden, was aan de vermeerdering daarvan waarschijnlijk nog geen einde gekomen. Op grond van andere ervaringen vermoed ik, dat deze stilstand onder de gegeven condities wel niet binnen het jaar bereikt zou zijn.

Vooral de tegen den glaswand gevormde bacteriënvegetatie, zooeven genoemd, werd herhaaldelijk door mij mikroskopisch onderzocht, en tot mijn groote verrassing als bijna

geheel uit »bacteriënsterren" bestaande herkend. Overigens vond ik ook in het genoemde praecipitaat vele sterren en bacteroiden.

Boven deelde ik mede, dat aan sommige mijner cultuurvloeistoffen phosphaat was toegevoegd, aan andere niet. Mikroskopisch beantwoordde aan dit verschil in samenstelling het volgende onderscheid in den bacteriëntoestand. Terwijl bij de aanwezigheid van het phosphaat slechts met moeite zwermers konden ontdekt worden en deze zeer klein waren, waren de zwermers in de phosphaatvrije-oplossingen, toen de proeven gestaakt werden, in groot getal aanwezig, en betrekkelijk groot van afmetingen. Sterren werden in het laatste geval veel rijkelijker aangetroffen dan in het eerste, en over het algemeen waren alle leedjes en staafjes sterker gezwollen, en vermoedelijk actiever, in de vloeistof zonder phosphaat dan in de andere.

Ik ga thans over tot de beschrijving van het resultaat der stikstofbepalingen.

Het indampen geschiedde bij 100° C., telkens in het cultuur- en controlekolfje gelijktijdig in een luchtstroom, die zich, nabij de openingen der kolfjes, door middel van een drieweggglasbuis in tweeën vertakte. Steeds was nog suiker in overmaat voorhanden. Voor het verbranden dienden 20 cM³ sterk zwavelzuur met phosphorzuuranhydriet en een droppel metallisch kwik. Bij het afdistilleeren werd verdund met 400 cM³ water, 20 cM³ natronloog van 40 pCt. en 20 cM³ zwavelkaliumoplossing toegevoegd. Voor het opvangen van de ammoniak dienden 25 cM³ $^1/_{10}$ normaal zwavelzuur. Het titreeren geschiedde volgens Kjeldahl's voorschrift jodometrisch. Hierbij waren 25 cM³ $^1/_{10}$ norm. zwavelzuur = 27.2 cM³ natriumhyposulfiet. De sterkte der hyposulfietoplossing was op verschillende wijzen gecontroleerd, 17 cM. waren aequivalent gevonden met 0.2 gr. J. dus:

1 cM³ hyposulfiet = 0.001302 gr. N.

Voor het titreeren werden 5 cM³ joodzurekali (4 gr. op 100 cM³ H^2O) en 5 cM³ joodkalium (24 gr. op 100 cM³

H^2O) toegevoegd. De getallen zijn tot in de tiendedeelen van milligrammen vertrouwbaar.

1e *Proef* Aan het boonenstengselafkooksel was behalve 2 gr. rietsuiker $^1/_{10}$ gr. KH^2PO^4 toegevoegd.

Duur der proef 15 November 1890 tot 15 Januari 1891.

Zonder infectie.		*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen*	
27.2 cM³	hyposulf. aeq. 25 cM³ $^1/_{10}$ norm. SO^4H^2	27.2 cM³	hyposulf. aeq. 25 cc. SO^4H^2
23.4	hyposulf. gevonden	22.7	hyposulf. gebruikt
3.8	hyposulf. aequiv. gevormde ammoniak	4.5	hyposulf. aeq. ammoniak
3.8 × 0.001302 = 0.0049476 gr. N.		4.5 × 0.001302 = 0.0058590	

0.0058590
0.0049476

Winst aan stikstof 0.0009114 gr. in 100 cM³ cultuurvloeistof.

Op deze cultuurkolven was een U-vormige buis geplaatst met glaskralen en verdund zwavelzuur, om de toetredende lucht te wasschen.

2e *Proef.* Als voorgaande, maar zonder U-vormige buis.

Niet geïnfecteerd.		*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*	
27.2 cM³	hyposulf.	27.2 cM³	hyposulfiet
23.4 »	» gevonden	22.5 »	» gevonden
3.8 »	» aeq. ammoniak	4.7 »	» aeq. ammoniak
3.8 × 0.001302 = 0.0049476 gr. N.		4.7 × 0.005502 = 0 0061194 gr. N.	

0.0061194
0.0049476

Winst aan stikstof 0.0011718 gr.

3e *Proef.* Als voorgaande, maar slechts met $^1/_{30}$ gr. KH^2PO^4.

Duur der proef 15 November 1890 tot 15 Februari 1891.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
23.3 » » gevonden	21.9 » » gevonden
3.9 » » aeq. ammoniak	5.3 » » aeq. ammoniak
3.9 × 0.001302 = 0.0050778	5.3 × 0.001302 = 0.0069006

0.0069006
0.0050778

Winst aan stikstof 0.0018228.

4e *Proef*. Aan een ander afkooksel van boonenstengel alleen 2 pCt. rietsuiker toegevoegd en geen phosphaat.

Duur der proef 15 Januari tot 15 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
22.1 » » gevonden	20.9 » » gevonden
5.1	6.3

6.3 × 0.001302 = 0.0082026 gr. N
5.1 × 0.001302 = 0.0066402

Winst aan stikstof = 0.0015624.

5e *Proef*. Als voorgaande.

Duur 15 Januari tot 17 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
22.2 » » gevonden	21.4 » » gevonden
5	5.8

5.8 × 0.001302 = 0.0075516
5.0 × 0.001302 = 0.0065100

Winst aan N. = 0.0010416

6e *Proef*. Als voorgaande maar gelijk volume water aan de cultuurvloeistof toegevoegd.

Duur der proef 15 Januari tot 19 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 hyposulfiet
22.1	21.1
5.1	6.1

$$6.1 \times 0.001302 = 0.0079422$$
$$5.1 \times 0.001302 = 0.0066402$$
$$\text{Winst aan stikstof} = 0.0013020 \text{ gr.}$$

Bij deze proeven is de winst aan stikstof gering; dit blijkt vooral duidelijk wanneer men de gevonden stikstof omrekent per liter vloeistof, en uitdrukt, door vermenigvuldiging met 6.25 in eiwit, en, — aannemende, dat de bacteriën voor $^3/_4$ van hun gewicht uit water, voor $^1/_4$ uit eiwit bestaan, — door vermenigvuldiging van het eiwit met 4, in bacteriënzelfstandigheid. Men krijgt dan het volgende overzicht

	Winst aan stikstof per liter.	Winst aan eiwit per liter.	Winst aan bacteriën per liter.
1e Proef..	0.009114 gr.	0.0569625 gr.	0.227850 gr.
2e »	0.011718 »	0.0931375 »	0.292550 »
3e »	0.018228 »	0.1129140 »	0.451656 »
4e »	0.015624 »	0.0976500 »	0.390600 »
5e »	0.010416 »	0.0651000 »	0.260400 »
6e »	0.013020 »	0.0813750 »	0.325500 »

Bij de beoordeeling dezer zeker niet groote hoeveelheden bedenke men, dat de proeven slechts betrekkelijk kort hebben geduurd, en de bacteriën in alle gevallen in volle activiteit verkeerden toen de cultuur gestaakt en tot de verbranding overgegaan werd. Bovendien laat zich een sterke ophooping van stikstof in culturen wier eindproducten niet worden weggevoerd, niet a priori verwachten. Aangenomen dat de vorm, waarin de stikstof zich ophoopt, niet uitsluitend uit vaste bacteriën-zelfstandigheid bestaat, maar als opgelost lichaam (bijv. als eiwit) in de cultuurvloeistof aanwezig blijft, zonder voor vernieuwden bacteriëngroei dienst te doen, dan is wellicht juist in de vermeerdering van dat product een tegenwerkende oorzaak tot de vorming er van

gelegen, eene oorzaak, die in de plant, waar het aanhoudend wordt afgevoerd, niet zou behoeven te bestaan.

Met de *Robinia*-bacillen, die nog langzamer groeien dan die van *Vicia Faba*, heb ik in het genoemde tijdsverloop van acht weken geen stikstoftoeneming kunnen verkrijgen, ofschoon ik op grond van den tegenwoordigen toestand mijner later begonnen culturen daarbij dezelfde verschijnselen als bij *Bacillus Fabae* verwacht te zullen opmerken.

Dat deze kleine hoeveelheden stikstof voor de beoordeeling van het hoofdresultaat der proeven, wat de nauwkeurigheid der waarneming betreft, aan zekerheid niets te wenschen, overlaten behoeft voor de genen, die met KJELDAHL's methode vertrouwd zijn, naar ik meen geen nader betoog.

Wel verdient overwogen te worden tot welke bronnen van onzekerheid de genoemde getallen aanleiding geven, wanneer daaruit zal besloten worden dat de Papilionaceenbacteriën werkelijk atmorpherische stikstof binden.

Vooreerst rijst de vraag in hoever het mogelijk is, dat de boonenstengelafkooksels stikstofverbindingen bevatten, die zich aan de stikstofbepaling volgens KJELDAHL's voorschrift onttrekken, maar als voedsel voor *Bacillus radicicola* kunnen dienen en dan, als bacteriënzelfstandigheid, gemakkelijk in ammoniak kunnen omgezet worden.

Voor zoover ik weet kan hierbij alleen aan salpeterzuur gedacht worden. Daar evenwel de gebruikte aftreksels geen reactie met diphenylamine hebben gegeven, evenzoomin vóór als na het eindigen der culturen, acht ik de mogelijkheid der stikstofwinst als het gevolg van de omzetting van nitraten uit de cultuurvloeistof in bacteriënstikstof als volkomen uitgesloten.

Een andere vraag is het of de bacteriën bij hun groei inderdaad de vrije atmorpherische stikstof opnemen en niet wellicht in de laboratoriumlucht een gezoegzame hoeveelheid chloorammonium of salpeterzure-ammoniak hebben gevonden om daardoor de gevonden stikstofaanwinst verklaarbaar te maken.

Ten einde daaromtrent iets meer te weten te komen is bij de 1e proef de toetredende lucht door een op de kul-

tuurkolf geplaatste U-vormige buis met glaskralen en verdund zwavelzuur aangevuld, gewasschen. Men ziet echter uit de opgegeven getallen, dat hierdoor geen beslissend antwoord op de gestelde vraag is verkregen, ofschoon de niet onbelangrijke stikstofwinst eer schijnt te spreken voor de binding van vrije stikstof dan van de zouten ervan, in het bijzonder omdat ook HELLRIEGEL en WILFARRT tot deze conclusie zijn gekomen, maar bij hen ontbreekt eveneens het volledige bewijs. Het komt mij daarom noodig voor op deze onzekerheid de aandacht te blijven vestigen, en de binding van vrije stikstof door onze bacterien niet als bewezen te beschouwen eer het voldingend bewijs is geleverd, dat zij door het uitputten van hun omgeving aan stikstofverbindingen, — hetgeen zij met zekerheid vermogen te doen, — geen aanleiding geven tot een voor de waargenomen stikstofvermeerdering toereikende toestrooming dezer verbindingen uit de atmospheer.

Van dit oogpunt uit verdienen ook andere mikrobiën, die hun omgeving volledig van stikstofverbindingen kunnen berooven, en die niet tot de Papilionaceen in een symbiostisch verband staan, bijv. het geslacht *Streptothrix*, nader onderzocht te worden. Kan het worden aangetoond, dat ook met deze laatste organismen, in een passenden voedingsbodem stikstofophooping is te bereiken, dan zoude dit proces bij de Papilionaceen, door middel hunner specifieke wortelmikroben veel aan klaarheid winnen. Het zou dan n.l. gemakkelijker begrijpelijk wezen, waarom een zoo gewichtige functie als de binding van vrije atmospherische stikstof, aan het protoplasma van alle hoogere planten en dieren onthouden is, hetgeen zeer bevreemdend zou zijn, wanneer zoodanige eigenschap bij organismen, laagstaande in het natuurlijk systeem, werkelijk aanwezig ware. Dat daarentegen sommige mikroben nog stikstofverbindingen kunnen onttrekken aan oplossingen, die zoo verdund zijn, dat de wortels der hoogere planten dit niet meer vermogen, is veel begrijpelijker.

De beide hoofdpunten van al het voorafgaande nog kort samenvattende, kom ik tot het besluit, dat de wortelbac-

teriën der Papilionaceen, bij aanwezigheid van glucose of rietsuiker in cultuurvloeistoffen aanleiding kunnen geven tot ophooping van stikstof ten koste van de atmospheer. Dat het evenwel noch door de proeven van HELLRIEGEL en WILFAHRT, noch door die van SCHLÖSING, die HELLRIEGEL's resultaten bevestigd heeft, noch door de mijne als bewezen kan worden beschouwd, dat daarvoor de vrije atmospherische stikstof, door een physiologisch proces wordt omgezet, maar dat nog steeds de mogelijkheid schijnt te bestaan, dat alleen stikstofverbindingen voor de stikstofvoeding van *Bacillus radicicola* geschikt zijn.

Uit de vastgestelde cultuurvoorwaarden der wortelbacterien laat zich de waarneming van HELLRIEGEL en WILFAHRT, dat wel in de plant en niet in den grond stikstofophooping bij hun proeven was aan te toonen, gemakkelijk verklaren. Dit moet namelijk het gevolg zijn van het ontbreken van het voor de stikstofbinding noodzakelijke koolhydraat, — bij mijn proeven de rietsuiker. Daar zulke lichamen in den, bij hun proeven steeds gegloeiden grond natuurlijk ontbraken, kon daarin geen belangrijke vermeerdering der wortelmikroben plaats vinden. Maar zelfs wanneer in den grond een zekere hoeveelheid suiker aanwezig ware, dan nog zou het niet waarschijnlijk zijn dat deze ten goede zou komen aan zulk een langzaam groeiend organisme als *Baccillus radicicola*, veeleer zou de suiker door andere, sneller groeiende bacteriën worden opgebruikt.

Thans rest ons nog de beschouwing van een laatste vraagstuk. Ik bedoel het mechanisme der stikstofvoeding bij de Papilionaceen, wanneer hun wortels door middel der wortelmikrobiën stikstof ophoopen.

Naar het mij voorkomt moet deze voeding uitsluitend berusten op het afsterven van de in de knolletjes aanwezige bacteroiden, daar alleen de dooide bacteroiden geschikt schijnen te wezen om de opgenomen stikstof of stikstofverbindingen als eiwit af te staan. Als deze onderstelling juist is dan doen zich de volgende vragen voor: Kan de plant invloed uitoefenen op het afsterven van de bacteroiden of op de vernieuwde vorming daarvan? Dit zou bijv. dan noodza-

kelijk wezen, wanneer de grond arm is aan stikstofverbindingen, waardoor de behoefte der plant aan »bacteroïdenstikstof" stijgt. Zoo ja, op welke wijze komt zoodanige invloed dan tot stand?

Wat het afsterven der bacteroiden betreft zie ik niet in op welke wijze de plant daarop direct kan inwerken; dat dit niet geschiedt door middel van enzymen, volgt uit het steeds ontbreken van pepsine en trypsine in de knolletjes. Gemakkelijker schijnt de vraag te beantwoorden te zijn hoe de vermeerdering der bacteriën in de knolletjes het gevolg van stikstofarmoede in de plant kan wezen. Men moet n.l. veronderstellen, dat een te kort aan assimileerbare stikstof in de plant tot het onstaan van een overmaat van koolhydraten zal aanleiding geven, omdat de eiwitvorming dan moet ophouden terwijl de koolzuurontleding voortgaat. Er is dan alle reden om aan te nemen, dat de koolhydraten ten goede komen van de bacteriën en deze daardoor in de gelegenheid gesteld worden ten koste van stikstof uit de omgeving zich krachtiger te gaan vermeerderen.

In welken toestand de aan de afstervende bacteroiden ontleende lichamen zich door de plant bewegen om de bovenaardsche deelen te bereiken, en langs welke wegen deze strooming geschiedt, zijn nog onbeantwoorde vraagstukken. Als pepton kunnen die producten der opgeloste bacteroiden moeielijk de knolletjes verlaten, want juist peptonen worden bij uitstek gemakkelijk door de wortelbacteriën, bij tegenwoordigheid van suiker voor eigen voeding gebruikt. Wellicht geschiedt de strooming in den vorm van een eiwit, dat wel kan dienen voor voeding van de plant en niet voor de bacteriën; ik houd mij bezig met dienaangaande proeven te nemen, waarover ik later hoop te kunnen berichten.

7

3 2044 092 715 069